

# Markov 過程の multiplicative functional による 変換と generator の関係

名古屋大 理 国田 寛 述  
東工大 理 土谷 正明 記

## § 0 Introduction

$S$  ; locally compact Hausdorff space .

$(X_t, \mathcal{F}_t, B_t, P_x), (X_t, \mathcal{F}_t, B_t, P'_x)$  ;  $S$  を state space にと  
2 つの standard process .

$\mathcal{F}_t$  ,  $B_t$  は  $X_s, s \leq t$  を可測にする最小の  $\sigma$ -algebra

◦  $B_t[t \wedge \zeta]$  の上  $P_x \sim P'_x \quad \forall t, \forall x \in S$

$\Rightarrow$  density  $\frac{dP'}{dP}(B_t[t \wedge \zeta])$  の version とし

$M_t(\omega) \geq 0$  ; multiplicative functional (M.F.) と  
とる = と出来る。

$$(M_t(\omega) \circ_t M_s(\omega) = M_{t+s}(\omega))$$

◦ 逆に  $M_t(\omega) \geq 0$  , right continuous

$$M_t(\omega) \circ_t M_s(\omega) = M_{t+s}(\omega)$$

$$E_x(M_t) = 1$$

$$\Rightarrow P'_x(B) \equiv P_x^M(B) \equiv E_x(M_t; B) \quad B \in \mathcal{B}_t$$

とあくく  $P_x^M < P_x$ .

②  $P_x > P_x'$  とする条件を解析的な量 (generator) で特徴づけたい.

例1.  $(X_t, P_x)$ ;  $R^d$ -Brown 運動とする.

$(X_t, P_x') < (X_t, P_x)$  の十分条件は, 丸山, 本尾, Dynkin により得られた.

$(X_t, P_x')$  の generator が,  $(f^i)$  の正則条件を仮定して

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} \Delta + \sum_{i=1}^d f^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (\text{Drift の変換})$$

であればよい.

必要条件を Hille-Yosida あるいは Dynkin generator で特徴づけることは, あくく不可能であるが, generator の定義域を拡張すれば, 上記の表現が必要十分であることが, Wentzell の結果により知られている.

例2.  $(X_t, P_x)$ ; Markov chain  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_x (\pi(x, y) - \delta(x, y))$

$(X_t, P_x')$ ; Markov chain  $\mathcal{G}' = \mathcal{G}_x' (\pi'(x, y) - \delta(x, y))$

$$"(X_t, P_x) \leq (X_t, P_x')" \iff "\mathcal{G}_x \pi(x, y) = 0 \iff \mathcal{G}_x' \pi'(x, y) = 0"$$

chain の場合は, M.F の変換は Lévy measure の変換であり, その特殊な場合として, time change を含んでいる.

1343, 
$$\mathcal{G} = -\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta$$

このときは、 $t$  方向の drift の変換は、M.F. による変換に含まれない。即ち、

$$\mathcal{G}' = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta} + \left( \sum f' \frac{\partial}{\partial x} + \underbrace{f' \frac{\partial}{\partial t}} \right)$$

とはならない。

= 階の elliptic の項は  $t$  方向に degenerate .

これらの例から

(a) diffusion の場合は、M.F. の変換は、いわゆる drift の変換であるが、drift の変換をすべて含むのではない。

M.F. の変換で移れる class は generator の = 階の項の ellipticity に関連する = とが予想される。

(b) 一般の Markov 過程 (必ずしも diffusion でないとき) では、M.F. による変換は、ある種の drift の変換と、Levy-measure の変換の結合されたものである = とが予想される。

しかし、上記の予想を、Hille-Yosida の意味の generator の言葉で実現する = とは出来ないのじ、generator の定義域を拡張し、その上で議論したい。尚、diffusion の境界条件が、M.F. の変換で、どう変えるかについても議論したい。

例. Generator の拡張.

$(X_t, \zeta, \mathbb{F}_t, P_x)$  ; standard process とする.

仮定:

(i) Meyer の (L)

(ii)  $\zeta$  は accessible . 即ち

$\exists T_m$  ; quasi-hitting time (Q.H.T)

$T_m \uparrow \zeta$  , 且  $T_m < \zeta$  .

•  $\mathcal{H}_{loc} \ni X_t \xrightarrow{\text{def}} X_t$  ; additive functional (A.F.)

$\exists T_m$  ; Q.H.T.  $T_m \uparrow \zeta$  ;

$X_{t \wedge T_m}$  ; 平均 0 , 2 乗可積分.

•  $\mathcal{H}_{loc} \ni X_t, Y_t \Rightarrow \exists \langle X, Y \rangle_t$  ; continuous additive functional (C.A.F.) ;  
bounded variations

$X_t Y_t - \langle X, Y \rangle_t = \text{local martingale}.$

•  $A_t$  ; C.A.F. ; non-negative

$\Rightarrow \exists \nu$  ;  $S$  上の measure such that

$$\int_0^t I_E(X_s) dA_s = 0 \quad \forall t, \text{ a.e. } P_x \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow \nu(E) = 0 \quad \text{ " } (I_E(x) : E \text{ の定義域})$$

$\nu$  を  $A_t$  の canonical measure とする ;

Def  $A_t$  : non-negative C.A.F. is canonical

$\Leftrightarrow$  (i)  $A_t = t\lambda + B_t$  ( $B_t$  is  $t\lambda = 1$  (sing.)  $\neq$  singular  $\neq$  non-negative C.A.F.)

(ii)  $\langle X \rangle_t \equiv \langle X, X \rangle_t \leq A_t$  for  $\forall t \in \mathcal{D}_{loc}$ .

② canonical  $\Rightarrow A_t$  is exists.

Def  $(A_t, \nu)$  : canonical system is "

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}_A) = \left\{ u \in \mathcal{B}(S) \mid \exists f; X_t^u \equiv u(X_t) - u(X_0) - \int_0^t f(X_s) dA_s \in \mathcal{D}_{loc} \right\}$$

$f$  is locally  $A$ -integrable

$$\left( \begin{array}{l} f \text{ is locally } A\text{-integrable} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists T_n : \text{Q.H.T. } T_n \uparrow \infty \\ \int_0^{T_n} f(X_s) dA_s : \text{integrable} \\ \mathcal{B}(S) : S \text{ 上の bounded Borel function の全体.} \end{array} \right.$$

$$u \in \mathcal{D}(\mathcal{G}_A) \text{ に対し,}$$

$$\mathcal{G}_A u = f$$

とある。

$f$  は  $\nu$ -measure 0 を除いて, unique に定まる。

$\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{D}(\mathcal{G})$  は Ito's generator とする。RPS

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}) \equiv \mathcal{R}(\mathcal{G}_\alpha f; f \in \mathcal{B}(S))$$

$$\mathcal{G} u \equiv (\alpha - \mathcal{G}_\alpha^{-1}) u \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$$

Prop 1

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}) = \{ u \in \mathcal{D}(\mathcal{G}_A) ; \mathcal{G}_A u \text{ は有界 or } \mathcal{G}_A u = 0, \text{ a.e. } \mu \}$$

where,  $\mu$  :  $B_t$  の canonical measure

$\{\eta_i\}$ ; BCS) の基底集合で,  $S$  の点を分離するもの.

$$C^2(\{\eta_i\}) \ni u \xleftrightarrow{\text{def}} \equiv \psi \in C^2(R^n) \quad (n=1,2,\dots)$$

$$u(x) = \psi(\eta_1(x), \dots, \eta_n(x))$$

$$D_{\eta_i} u(x) \equiv \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial \eta_i}(\eta(x)) & i=1,2,\dots,n \\ 0 & i > n \end{cases}$$

### Theorem

$\{\eta_i\}, \{\eta_i^2\} \subset \mathcal{D}(\mathcal{G}_A)$  と仮定する.

$$\Rightarrow C^2(\{\eta_i\}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{G}_A) \text{ かつ } u \in C^2(\{\eta_i\}) \Rightarrow \mathcal{G}_A u \in L^2,$$

$$\mathcal{G}_A u(x) = \frac{1}{2} \sum a^{ij}(x) D_{\eta_i} D_{\eta_j} u(x) + \sum b^i D_{\eta_i} u(x)$$

$$+ \int [u(y) - u(x) - \sum D_{\eta_i} u(x) (\eta_i(y) - \eta_i(x))] \nu(x, dy)$$

$a^{ij}$ ; non-negative definite symmetric

locally  $A$ -integrable measurable functions

$b^i$ ; locally  $A$ -integrable functions

$\nu(x, dy)$ ; kernel.

$(\nu(x, dy), A)$ ; Levy system とする.

$\mathcal{G}_A(C^2(\{\eta_i\}))$  が  $A_t$  に關し、局所可積分な函数族の中で dense である. 上の  $a^{ij}, b^i, \nu$  は process を  $-\frac{\lambda}{2}$  に与える.

### Remark

$D$ :  $N$ -dimensional  $C^\infty$ -manifold

$\partial D$ :  $N-1$ -dimensional hyper surface  $C^3$ -class

$$A = \sum a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$a^{ij}$ : positive definite symmetric  $C^2$ -class

$b^i$ :  $C^1$ -class.

= 9 4 3 .

Def.  $T_t : \mathbb{C}(\bar{D}) \rightarrow \mathbb{C}(\bar{D})$ : 強連続

$T_t$  の infinitesimal operator が  $A$  の closed extension  
 となることを,  $T_t$  に対応する Markov process を  $A$  の diffusion  
 とする。

$T_t$  の Hille-Yosida の generator の domain を  $\tilde{D}(A)$   
 とおく。

Assumption

I  $(\lambda - A)u = f$  が dense  $T_0 f$  について 2 解をもつ,

II  $\forall x_0 \in \bar{D}$ ,  $\exists (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ : local coordinate

$\eta_i$  は continuous excessive function の  
 差にかけらる。

III  $P_t(x, \partial D) = 0 \quad \forall t > 0, \forall x \in \bar{D}$  但し,  $P_t$  は推移確率。

(上野-佐藤の場合は上の条件を満たしている。)

このとき,

$A_t = t\Lambda + B_t$  なる canonical A.F. は、次の形に与えら  
 3.  $B_t = \int I_{\partial D} dA_s$

$\alpha_{ij}$ ,  $\beta_i$  の境界への制限を  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_i$  と書き、 $\partial_A u$  の境界への制限を  $L u$  とかくと、

$$L u = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N \beta_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \int [u(y) - u(x) - \sum \frac{\partial u}{\partial \eta_i} (\eta_i(y) - \eta_i(x))] V(x, y)$$

(境界での local coordinate  $(\eta_1, \dots, \eta_N)$  を  $\eta_N(x) = 0$   $x \in \partial D$

となる様に与えれば  $\alpha^{iN}(x) = 0$   $x \in \partial D$  となる = 与えられる。)

Prop. 4 により、

$$\widehat{\mathcal{D}}(\mathcal{D}) = \{u \in C^2; L u = 0 \text{ a.e. } \mu\}$$

即ち、境界条件も  $\partial_A u$  で表現出来る。



## §2 Multiplicative functional による変換

 $M_t$  : multiplicative functional (M.F.).

$$(i) \quad M_t > 0 \quad t < \zeta \\
= 0 \quad t \geq \zeta$$

(ii) local martingale

$$0 \leq P_x^M(B) = E_x(M_t; B)$$

 $\Rightarrow (X_t, \zeta, \mathbb{P}_t^M, P_x^M)$  : standard process となる。Theorem $(A_t, \nu)$  : canonical system of  $(X_t, P_x)$  $\Rightarrow (I) (A_t, \nu) ; (X_t, P_x^M)$  の canonical system, かつ

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}_A) = \mathcal{D}(\mathcal{G}_A^M)$$

 $\mathbb{R}^n$ ,  $u \in C^2(\{x_i\})$  とする。

$$\mathcal{G}_A^M u(x) = \mathcal{G}_A u(x) + B u(x)$$

 $= 2''$ 

$$B u(x) = \sum f^i D_{\eta_i} u(x) + \int (u(y) - u(x)) (e^{f(x,y)} - 1) \nu(x, dy) \quad \text{--- } (*)$$

但し、 $f^i, f(x, y)$  は次の条件を満たす。(a)  $f^i \in \mathcal{F}_t$ ,  $\exists$  locally  $A$ -integrable function  $h \geq 0$  ;

$$|\sum f^i g_i| \leq h^{\frac{1}{2}} (\sum a^{ij} g_i g_j)^{\frac{1}{2}} \quad \text{for } \forall \{g_i\}$$

$$(b) f(x, y) ; \int \nu(x, dy) | (e^{f(x, y)} - 1) | ; \text{locally integrable}$$

(II) 逆に  $Q'$  が  $\mathcal{D}(Q') \equiv \mathcal{D}(Q_A)$  から  $\nu$  局所可積分な函数族への線形作用素で、かつ

$Q' - Q_A$  の  $C^2(\mathcal{H}_1)$  への制限が  $(*)$  に一致するならば

$$(Q', \mathcal{D}(Q')) = (Q_A, \mathcal{D}(Q_A)) \text{ と } (x_t, P_x) \text{ の}$$

$M_t$ -Process が存在する。

### Remark

① (a) は  $\Gamma$  の  $(a')$  と equivalent

$(a') \Rightarrow \{f_i\} : \sum a^{ij} f_i f_j ; \text{locally integrable}$

$$f^i = \sum_j a^{ij} f_j \text{ となる}$$

②  $(a') \Rightarrow (a)$

$$\begin{aligned} \left| \sum f^i g_i \right| &\leq \left| \sum_j \left( \sum_i a^{ij} f_i \right) g_j \right| = \left| \sum a^{ij} f_i g_j \right| \\ &\leq \underbrace{\left( \sum a^{ij} f_i f_j \right)}_{\Gamma}^{\frac{1}{2}} \left( \sum a^{ij} g_i g_j \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

② Diffusion case (前出)

$(a^{ij})$  : strictly positive definite となる

$(a)$  と  $(a'')$  は同値

$(a'') \Rightarrow \sum a_{ij} f^i f^j$  が locally integrable

但し,  $(a_{ij})$  は  $(a^i_j)$  の inverse matrix.

③ diffusion の場合 = 境界条件は, いかにも変るが,

変換した process の境界条件;

$$\underline{g_A^M u = 0 \text{ on } \partial D \quad \text{a.e. } \mu}$$

$g_A^M u$  の  $\partial D$  上への制限を  $L^M u$  とおけば,

$$L^M u = Lu + B'u$$

但し,

$$B'u(x) = \sum_{i=1}^{N-1} f^{i'} \frac{\partial u}{\partial \eta_i}(x) + \int (u(y) - u(x)) (e^{f(x,y)} - 1) \nu(x, dy)$$

であり,  $\{f^{i'}\}$  は Theorem の (I) (a) の条件 (a') を  $d^i$  に置きかえてゝをみたし,  $f$  は (b) の条件をみたす.

従つて, 特に, 境界条件が  $n$ -階の微分作用素を含まないとき, (例へば 反射壁) は境界条件は変らない.

定理の証明;

(I) の証明.

$\log M_t$  の jump が有界と仮定しておく.

$$M_t = \exp \left\{ X_t - \frac{1}{2} \langle X \rangle_t \right\} \exp \left\{ Q_t(f) - \int_0^t \nu \cdot (e^f - 1 - f) dA_s \right\}$$

とあらわされる.

従つて, 確率積分の公式から,

$$M_t - 1 = \int_0^t M_s dX_s + \int_0^t M_s dQ_s (e^t - 1) \equiv \int_0^t M_s dZ_s$$

$$Z_t = X_t + Q_t (e^t - 1)$$

Bu ;  $\langle X^u, Z \rangle$  の  $A_t$  に関する density である。

即ち, 
$$\int B u(x_s) dA_s = \langle X^u, Z \rangle$$

今、簡単のため、diffusion の場合を示す。

即ち, 
$$M_t = \exp \left\{ X_t - \frac{1}{2} \langle X \rangle_t \right\}$$

$$Z_t = X_t \quad \text{である。}$$

$$\begin{aligned} \langle X^u, Y \rangle &= \langle X^u, \int M_s dX_s \rangle = \int M_s d\langle X^u, X \rangle_s \\ &= \int M_s B_u dA_s \end{aligned}$$

但し,  $Y_t = M_t - 1 = \int_0^t M_s dX_s$ .

$X_t^u Y_t = \text{local martingale} - \langle X^u, Y \rangle$  である。

$$\begin{aligned} \Downarrow \\ X_t^u (M_t - 1) &= (u(x_t) - u(x_0) - \int_0^t \sigma_A^u dA_s) (M_t - 1) \\ &= M_t (u(x_t) - u(x_0)) - M_t \int_0^t \sigma_A^u dA_s - X_t^u \end{aligned}$$

$$M_t (u(x_t) - u(x_0)) - M_t \int_0^t \sigma_A u dA_s - \int_0^t M_s B u dA_s$$

= local martingale.

§8.2.  $T_n \uparrow \infty$  に対して.

$$\begin{aligned} E_x [M_{t \wedge T_n} (u(x_{t \wedge T_n}) - u(x_0))] &= E_x \left( M_{t \wedge T_n} \int_0^{t \wedge T_n} \sigma_A u dA_s \right) \\ &- E_x \left( \int_0^{t \wedge T_n} M_s B u dA_s \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore E_x^M (u(x_{t \wedge T_n})) - u(x) - E_x^M \left( \int_0^{t \wedge T_n} \sigma_A u dA_s \right) - E_x^M \left( \int_0^{t \wedge T_n} B u dA_s \right) = 0$$

§8.2.  $u(x_t) - u(x_0) - \int_0^t (\sigma_A + B) u dA_s$

は,  $(X_t, P_x^M)$  の local martingale である.

$$\therefore \mathcal{D}(\sigma_A) \subset \mathcal{D}(\sigma_A^M).$$

又  $M_t > 0$  ( $t < \zeta$ ) より, 2つの process は互に絶対連続

よって, 逆の変換をして,

$$\mathcal{D}(\sigma_A) = \mathcal{D}(\sigma_A^M).$$

$$X^u = \sum_{i=1}^n \int \frac{\partial u}{\partial \eta_i} dX^{\eta_i}$$

これから,

$$\langle X^u, Z \rangle = \sum_{i=1}^n \int \frac{\partial u}{\partial \eta_i} d\langle X^{\eta_i}, Z \rangle_s = \int \left( \sum_{i=1}^n f^i \frac{\partial u}{\partial \eta_i} \right) dA_s$$

$$\text{但し, } \langle X^{\eta_i}, Z \rangle_t = \int_0^t f^i dA_s, \quad Bu \equiv \sum_{i=1}^n f^i \frac{\partial u}{\partial \eta_i}$$

＝ により,  $g_A^M$  の表現が 得られる.

(II) の証明.

$$g_A + B.$$

$$Bu = \frac{d\langle X^u, Z \rangle}{dA}$$

と なる  $Z$  ( $Z$ : local martingale, A.F.) の存在が証明  
されたい.

$$M_t = \exp \left\{ Z_t - \frac{1}{2} \langle Z \rangle_t \right\}$$

が 変換 されたものが得られる.

そのためには, 一般に, A.F. の場の Riesz の定理;

### Theorem

$$F: \mathcal{M}_{loc} \longrightarrow (\text{locally } A_t\text{-integrable})$$

$$\psi_{X,Y}$$

$$F(X+Y) = F(X) + F(Y)$$

$$F\left(\int f dX\right) = f \cdot F(X)$$

locally  $A_t$ -integrable と  $t \geq 0$  が存在して,

$$F(x) \leq h^{\frac{1}{2}} \left( \frac{d\langle x \rangle}{dA} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall x \in \mathcal{H}_{loc}$$

$$\Rightarrow \exists z \in \mathcal{H}_{loc}; \quad F(x) = \frac{d\langle x, z \rangle}{dA}$$

(証明略)

をばよ。

今の場合  $F(x) \equiv Bu(\cdot)$

とすれば、 $F$  は  $\mathcal{H}_{loc}$  上へ、一意に拡張され、Rieszの定理の条件をみたすことが容易に確かめられる。