

Strongly compacts についての二つの定理

福島高専 阿部吉弘 (Yoshihiro Abe)

Strong compactness と supercompactness の関係について二つの視点から考察する。 $\mathcal{U}$ を $P_\kappa \lambda$ 上の κ -complete ultrafilter とする時

$$(1) \mathcal{U} \text{ is fine} \iff \forall \alpha < \lambda (\{x \in P_\kappa \lambda \mid \alpha \in x\} \in \mathcal{U})$$

$$(2) \mathcal{U} \text{ is normal} \iff \forall f: P_\kappa \lambda \rightarrow \lambda (\forall x \in P_\kappa \lambda (f(x) \in x) \rightarrow \exists \gamma < \lambda (\{x \in P_\kappa \lambda \mid f(x) = \gamma\} \in \mathcal{U}))$$

$$(3) \kappa \text{ is } \lambda\text{-compact} \iff \exists \mathcal{U}: \text{fine ultrafilter on } P_\kappa \lambda$$

$$(4) \kappa \text{ is } \lambda\text{-supercompact} \iff \exists \mathcal{U}: \text{normal ultrafilter on } P_\kappa \lambda$$

$$(5) \kappa \text{ is strongly compact} \iff \forall \lambda \geq \kappa (\kappa \text{ is } \lambda\text{-compact})$$

$$(6) \kappa \text{ is supercompact} \iff \forall \lambda \geq \kappa (\kappa \text{ is } \lambda\text{-supercompact})$$

である。(Large cardinal については [7] を参照)

§1. ある種の fine ultrafilter とその normality

κ を strongly compact cardinals の limit になってい

るような measurable cardinal とする. (このような κ の存在は, extendible cardinal の仮定より得られる) T. K. Menas はこのような κ について 以下の結果を出している.

$\alpha < \kappa$ で α が strongly compact の時, $\mathcal{U}_\alpha$ を $P_\alpha \lambda$ 上の fine ultrafilter とする. $\mathcal{D}$ を κ -complete ultrafilter on κ で $\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ is strongly compact}\} \in \mathcal{D}$ を満たすものとする. (これらは κ についての仮定から存在が保証される) $\mathcal{U}$ を次のように定める.

$$X \in \mathcal{U} \iff X \in P_\kappa \lambda \wedge \{\alpha < \kappa \mid X \cap P_\alpha \lambda \in \mathcal{U}_\alpha\} \in \mathcal{D}$$

定理 (Menas) (Ref. [5])

- (i) $\mathcal{U}$ は fine ultrafilter. (従って κ は strongly compact)
- (ii) κ が仮定を満たすような最小のものならば, κ は 2^κ -supercompact でない.
- (iii) λ が regular で $\{\alpha < \kappa \mid \mathcal{U}_\alpha \text{ is minimal}\} \in \mathcal{D}$ ならば $\mathcal{U}$ は normal でない.

ただし, $\mathcal{U}_\alpha$ が minimal とは,

$\forall \varphi: P_\alpha \lambda \rightarrow P_\alpha \lambda$ s.t. $\{X \subset P_\alpha \lambda \mid \varphi^{-1}(X) \in \mathcal{U}_\alpha\}$ が fine ultrafilter on $P_\alpha \lambda$ $\exists A \in \mathcal{U}_\alpha$ (φ is injective on A)
 ということ.

$(\lambda: \text{regular or } cf(\lambda) < \alpha) \wedge \mathcal{U}_\alpha: \text{normal} \rightarrow \mathcal{U}_\alpha: \text{minimal}$
 ということが証明される。

我々はこの結果を拡張し、上のように定められた $\mathcal{U}$ は
 どのような条件でも normal にはならないことを示す。

定理 1. $\mathcal{U}$ は normal でない。

(証明) $x \in P_\kappa \lambda$ に対し、 $\alpha_x = \text{the least strongly compact cardinal } > |x|$ とする。

$$(1) \ x \in P_\alpha \lambda \wedge \alpha: \text{strongly compact} \rightarrow \alpha_x \leq \alpha$$

次に、 $f: P_\kappa \lambda \rightarrow P_\kappa \lambda$ を $f(x) = x \cap \alpha_x$ で定める。

$\alpha: \text{strongly compact} < \kappa$ とする。 $\alpha < \beta < \kappa$ とす
 ると、 $\beta < \kappa \leq \lambda$ で $\mathcal{U}_\alpha$ は fine だから、

$$A = \{x \in P_\alpha \lambda \mid \beta \in x\} \in \mathcal{U}_\alpha.$$

$x \in A$ に対し、(1) を用いて

$$x \cap \alpha_x \subseteq x \cap \alpha \subsetneq x \cap \kappa$$

($\beta \notin x \cap \alpha$, $\beta \in x \cap \kappa$ に注意)

ゆえに

$$\{x \in P_\alpha \lambda \mid x \cap \alpha_x \subsetneq x \cap \kappa\} \in \mathcal{U}_\alpha.$$

結局 $\{x \in P_\kappa \lambda \mid x \cap \alpha_x \subsetneq x \cap \kappa\} \in \mathcal{U}$ となる。

これは、 $[f]_\mathcal{U} \notin [\langle x \cap \kappa \mid x \in P_\kappa \lambda \rangle]_\mathcal{U}$ を示している。

$$(2) \ [f]_\mathcal{U} \notin [\langle x \cap \kappa \mid x \in P_\kappa \lambda \rangle]_\mathcal{U}$$

$j: V \longrightarrow M \cong V^{\text{Prel}}/u \in u \nVdash \text{induce } \preceq \text{ なる}$
 canonical な elementary embedding $\prec$ する

(3) $M \models "j(x) \text{ is strongly compact } > \lambda"$

(4) $M \models "$ $[\langle \alpha \mid \alpha \in P_{\kappa \lambda} \rangle]_n$ is the least strongly compact $> [\langle \alpha \mid \alpha \in P_{\kappa \lambda} \rangle]_n$ "

$\mathcal{U}$ is fine だから $\forall \alpha < \lambda (\{x \in P_{\alpha} \mid \alpha \in x\} \in \mathcal{U})$ である.

(5) $M \models " \forall \alpha < \lambda (j'(\alpha) \in [\langle \alpha \mid \alpha \in P_{\alpha\lambda} \rangle]_u) "$

また, ultrapower の Los の定理より

$$(6) \quad M \models "[\langle x \mid x \in P_u \lambda \rangle]_u] = [\langle x \mid x \in P_u \lambda \rangle]_u"$$

5) と 6) より

$$(7) \quad |[\langle x \mid x \in P_{\kappa, \lambda} \rangle]_{\mu}|^M \geq |[\langle x \mid x \in P_{\kappa, \lambda} \rangle]_{\mu}| \geq \lambda$$

(3), (4), (7) より

(5) $M \models " \lambda < [\langle d_\alpha \mid \alpha \in P_{\kappa\lambda} \rangle]_\mu \leq j'(x) "$

したがって

$$\mathcal{K} = j'' \mathcal{K} \cap \mathcal{K} \subset [\langle \alpha \cap \alpha_x \mid \alpha \in P_{n, \lambda} \rangle]_u \quad \neg \exists \eta$$

(9) $\mathcal{K} \subset [f]_{\mu}$

(2) と (9) が 3

(v) $\kappa \in [f]_u \not\subseteq [\langle \alpha, \kappa \mid \alpha \in P_\kappa \rangle]_u$

しかし、もし u が normal なら

(11) $[\langle \alpha \cap \kappa \mid \alpha \in P_{\kappa \lambda} \rangle]_{\mu} = \kappa$ である.

ゆえに $\mathcal{U}$ は normal でない. Q.E.D.

このように $\mathcal{U}$ は normal になり得ないのだが、ある条件を整えれば、弱い normality を持つ。

Definition. $\mathcal{U}$ is weakly normal iff

$$\forall f: P_\kappa \lambda \rightarrow \lambda \left(\forall x \in P_\kappa \lambda (f(x) \in x) \rightarrow \exists \gamma < \lambda (\{x \in P_\kappa \lambda \mid f(x) \leq \gamma\} \in \mathcal{U}) \right)$$

定理 2 $\{\alpha < \kappa \mid \mathcal{U}_\alpha \text{ is weakly normal}\} \in \mathcal{U}$ で $\lambda > 2^\kappa$ が 次のいずれかを満たすとする。

- (i) $\lambda = (2^\kappa)^+$
- (ii) $\lambda = \zeta^{++}$ for some ζ
- (iii) $\lambda = \text{limit cardinal}$ で $\text{cf}(\lambda) \neq \kappa$
- (iv) $\lambda = \zeta^+$ で ζ が (iii) を満たす。

この時、 $\mathcal{U}$ は weakly normal。

補題 1. (Ref. [1], [3])

ν を strongly compact cardinal, W を fine ultrafilter on $P_\nu \eta$ とする。 $\zeta > 2^{\eta < \nu}$ が 次の (i) ~ (iv) を満たすなら $j(\zeta) = \zeta$ 。($j: V \rightarrow M \cong V^{P_\nu \eta / W}$)

- (i) $\zeta = \zeta^{++}$ for some ζ
- (ii) ζ is a limit cardinal $\wedge (cf(\zeta) < \nu \vee cf(\zeta) > \nu^{<\nu})$
- (iii) $\zeta = \zeta^+$ for some ζ $\wedge$ ζ is (ii) を満たす.
- (iv) $\zeta = (2^{\nu^{<\nu}})^+$

補題 2

- (i) W を fine ultrafilter on $P_\kappa \kappa$ $\wedge$ D を

$$X \in D \quad \text{iff} \quad X \subset \kappa \wedge \exists Y \in W (X = Y \cap \kappa)$$
 で定める. この時, D は κ -complete ultrafilter on κ .
- (ii) D を κ -complete ultrafilter on κ $\wedge$ L , W を

$$X \in W \quad \text{iff} \quad X \subset P_\kappa \kappa \wedge X \cap \kappa \in D$$
 で定めると, W は fine ultrafilter on $P_\kappa \kappa$.

(定理 2 の証明) $\{ \alpha \in P_\kappa \lambda \mid f(\alpha) \in x \} \in \mathcal{U}$ だから.

$\{ \alpha < \kappa \mid \{ \alpha \in P_\kappa \lambda \mid f(\alpha) \in x \} \in \mathcal{U}_\alpha \} \in \mathcal{D}$. $\mathcal{U}_\alpha$ の weakly normal という性質から.

- (1) $\{ \alpha < \kappa \mid \{ \alpha \in P_\kappa \lambda \mid f(\alpha) \leq \gamma_\alpha \} \in \mathcal{U}_\alpha \text{ for some } \gamma_\alpha \leq \lambda \} \in \mathcal{D}$.

$j_{\mathcal{D}}: V \longrightarrow M \simeq V^{\kappa}_{\mathcal{D}}$, $[\langle \gamma_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle]_{\mathcal{D}} = \gamma$ とする.

$$\gamma_\alpha < \lambda \quad \forall \alpha$$

- (2) $\gamma < j_{\mathcal{D}}(\lambda)$.

補題 1, 2 で $\eta, \nu \in \kappa$ とすると.

$$(3) \quad j_{\overline{U}}(\lambda) = \lambda.$$

(2) $\times$ (3) か? $\overline{U}$

$$(4) \quad \gamma < \lambda.$$

$\gamma \leq j_{\overline{U}}(\gamma)$ は明らかだから

$$(5) \quad \{\alpha < \kappa \mid \gamma_\alpha \leq \gamma\} \in \overline{U}$$

(1) $\times$ (5) より

$$(6) \quad \{\alpha < \kappa \mid \{\alpha \in P_\alpha \mid f(\alpha) \leq \gamma\} \in U_\alpha\} \in \overline{U}$$

ゆえに

$$\{\alpha \in P_\kappa \mid f(\alpha) \leq \gamma\} \in U \quad \text{and} \quad \gamma < \lambda.$$

Q. E. D.

§2. The least strongly compact cardinal について.

以下の一連の結果がある.

(A) Magidor ([4]): $\text{Con}(\text{ZFC} + \kappa \text{ is strongly compact})$

$\rightarrow \text{Con}(\text{ZFC} + \kappa \text{ is strongly compact} + \kappa \text{ is the least measurable})$

(B) Magidor ([4]): $\text{Con}(\text{ZFC} + \kappa \text{ is supercompact}) \rightarrow$

$\rightarrow \text{Con}(\text{ZFC} + \kappa \text{ is supercompact} + \kappa \text{ is the least strongly compact})$

(C) Apter ([2]): $\text{Con}(\text{ZFC} + \kappa \text{ is a supercompact$

limit of supercompact cardinals) $\rightarrow \text{Con}(\text{ZFC} +$

+ κ is the least strongly compact + κ is $\phi(\kappa)$ -supercompact + $\forall \alpha < \kappa$ (α is not $\phi(\alpha)$ -supercompact)).

ただし, $\phi: \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_n$ Σ_2 -increasing function τ , (1), (2) を満たす.

$$(1) |P| = \kappa \wedge \alpha > \kappa \rightarrow \phi^V(\alpha) = \phi^{V[G]}(\alpha)$$

$$(2) \alpha < \beta \wedge \alpha \text{ is } \phi(\alpha)\text{-supercompact} \wedge \beta \text{ is } \phi(\beta)\text{-supercompact} \rightarrow \phi(\alpha) < \beta.$$

ここでは, Apter の結果が, もっと弱い仮定から得られることを示す.

定理 3. $\forall \kappa$ "ZFC + κ is supercompact" とする.

$\phi: \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_n$ increasing function が, 次の条件を満たすとする.

$$(a) \alpha > |\mathcal{Q}| \rightarrow \phi^V(\alpha) = \phi^{V[G]}(\alpha)$$

(b) ある formula ψ が存在して

$$(1) \forall \alpha (\phi(\alpha) < \psi(\alpha))$$

$$(2) \alpha < \beta \wedge \beta \text{ is } \phi(\beta)\text{-supercompact} \rightarrow \psi(\alpha) < \beta$$

$$(3) M, N: \text{ZFC の models } \tau \text{ " } R(\psi^M(\alpha)) \cap M = R(\psi^N(\alpha)) \cap N \text{ ならば } \phi^M(\alpha) = \phi^N(\alpha).$$

このとき $\exists P$ s.t. $V[G] \models \kappa$ is the first strongly

compact + κ is $\phi(\kappa)$ -supercompact + $\forall \alpha < \kappa$
 $(\alpha \text{ is not } \phi(\alpha)\text{-supercompact})$ "

(証明) Forcing notion P は Apter のものと同じ。

$P_0 = \{\emptyset\}$. $\lambda_0 =$ the least cardinal λ that is
 $\phi(\lambda)$ -supercompact.

$P_\alpha =$ the iterated Prikry ordering on $\{\lambda_\beta \mid \beta < \alpha\}$

$\lambda_\alpha =$ the least ordinal λ s.t. $\exists p \in P_\alpha (p \Vdash "\lambda \text{ is } \phi(\lambda)\text{-supercompact}")$

$P = P_\kappa$.

以下の議論は, iterated Prikry ordering について standard なものなので, [4], [2] を参照されたい。なぜ, Apter の仮定を弱めることができるのかだけ記述し, 他の証明は省略する。([6] より $\forall \kappa "2^\kappa = \kappa^{++}"$ としてよい)

補題 1.

- (1) $\alpha < \beta \rightarrow \lambda_\alpha < \lambda_\beta$
- (2) $\{\lambda_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ は unbounded in κ .
- (3) $\lambda_\kappa \geq \kappa$.

補題 2.

$\forall [G] \Vdash "\kappa \text{ is the first strongly compact} + \forall \alpha < \kappa (\alpha \text{ is not } \phi(\alpha)\text{-supercompact})"$

$A = \{\alpha \in \mathcal{O}_n \mid \exists p \in \mathcal{P} (p \Vdash "\alpha = \psi(\kappa)")\}$ とする、
 $|\mathcal{P}| \leq 2^\kappa$ より $|A| \leq 2^\kappa$. $\delta = \sup A + 1$ とする. したがって,

$$(1) \forall p \in \mathcal{P} (p \Vdash "\delta > \psi(\kappa)")$$

$j: V \longrightarrow M$ を κ を critical point とし,

$|R(\delta)|$ $M \subset M$ を満たすものとする. $j(\mathcal{P})_\kappa = \mathcal{P}$ で

$|R(\delta)| > 2^\kappa$ が成立する.

補題 3. $G \subset \mathcal{P}$ に対し

G is V -generic $\iff G$ is M -generic.

補題 4

(1) G is V -generic on $\mathcal{P} \wedge x \in V[G] \wedge x \in M[G] \wedge$
 $\wedge V[G] \models "x| \leq |R(\delta)|" \longrightarrow x \in M[G]$

(2) $\phi^{V[G]}(\kappa) = \phi^{M[G]}(\kappa)$

(証明) (1) $x \in \mathcal{O}_n$ としてよい. α を x の term とする.

$\mathcal{P}$ は κ^+ -c.c. を満たすので,

$$\exists D \in V (|D| \leq |R(\delta)| \wedge \forall p \in \mathcal{P} (p \Vdash "\alpha \in \check{D}"))$$

$\alpha \in D$ に対し, $A_\alpha =$ a maximal disjoint subset of
 $\{p \in \mathcal{P} \mid p \Vdash "\check{\alpha} \in \check{x}"\}$ とする.

$$|A_\alpha| \leq \kappa, |D| \leq |R(\delta)|, |R(\delta)| \text{ } M \subset M \text{ より}$$

$\langle A_\alpha \mid \alpha \in D \rangle \in M$ を得る.

ここで, $\alpha = \{\alpha \in D \mid A_\alpha \cap G \neq \emptyset\}$ だから $\alpha \in M[G]$

(2) ψ により

$$R(\delta) \cap V[G] = R(\delta) \cap M[G].$$

$\psi^{V[G]}(x) < \delta$ だから

$$R(\psi^{V[G]}(x)) \cap V[G] = R(\psi^{V[G]}(x)) \cap M[G]$$

ゆえに $\phi^{V[G]}(x) = \phi^{M[G]}(x)$. (b)-(3) による)

Q. E. D.

補題 5

$V[G] \models "K \text{ is } \phi(\kappa)\text{-supercompact}" \text{ for some } G.$

(証明) $(\lambda_\kappa)^M > \kappa$ の時は, Apter と同じく

$$\mu \Vdash "\underline{\tau} \in \underline{U}" \iff \mu \Vdash "\underline{\tau} \in P_\kappa \phi(\kappa)" \wedge \exists q \leq j(\mu)$$

$$(1q - j(q)) = 0 \wedge q \Vdash "j(\phi(\kappa)) \in j(\underline{\tau})"$$

と $\underline{U}$ を定義すればよい.

$(\lambda_\kappa)^M = \kappa$ の時。この時 Apter は $M[G] \models "K \text{ is strongly compact}"$ を必要と思ったのであるが, 実は, $V[G]$ でも K は $\phi(\kappa)$ -supercompact であることに気づかなかったようである。 $V[G] \models "K \text{ is strongly compact}"$ は当然だから, supercompact の仮定でよかったわけである。(17で K が strongly compact とは限らない.)

$$(\lambda_x)^M = \kappa \text{ とする}$$

$\exists p \in \mathcal{P} \ (M \models "p \Vdash \kappa \text{ is } \phi(x)\text{-supercompact}" \text{ "})$

$G \in M$ -generic filter on $\mathcal{P}$ と $p \in G$ とする

$M[G] \models " \kappa \text{ is } \phi(x)\text{-supercompact}"$

補題 3.4 を使うと, G は V -generic on $\mathcal{P}$ と

$$\phi^{V[G]}(x) = \phi^{M[G]}(x).$$

$$V[G] \models " |P_x \phi(x)| \leq 2^{\phi(x)} \leq 2^{\lambda(x)} \leq |R(\delta)| " \quad \text{だから}$$

補題 4 より,

$$P_{\kappa} \phi^{V[G]}(x) \cap V[G] = P_{\kappa} \phi^{M[G]}(x) \cap M[G].$$

したがって, $\mathcal{U}$ は normal ultrafilter on $P_{\kappa} \phi^{M[G]}(x)$ in $M[G]$ とすれば, $\mathcal{U}$ は normal ultrafilter on $P_{\kappa} \phi^{V[G]}(x)$ in $V[G]$ である。 したがって,

$V[G] \models " \kappa \text{ is } \phi(x)\text{-supercompact}"$

Q. E. D.

References.

- [1] Y. Abe, Strongly compact cardinals, elementary embeddings and fixed points. (to appear.)
- [2] A.W. Apter, On the least strongly compact cardinal, Israel J. Math. 35 (1980)

- [3] J. B. Barbanel, Supercompact cardinals, elementary embeddings, and fixed points, J. Symbolic Logic 47 (1982)
- [4] M. Magidor, How large is the first strongly compact cardinal, Ann. Math. Logic 10 (1976)
- [5] T. K. Menas, On strong compactness and supercompactness, Ann. Math. Logic 7 (1974)
- [6] T. K. Menas, Consistency results concerning supercompactness, Trans. Amer. Math. Soc. 223 (1976)
- [7] R. M. Solovay, W. N. Reinhardt, A. Kanamori, Strong axioms of infinity and elementary embeddings, Ann. Math. Logic 13 (1978)