

証明論の教科書の中で超準解析を書くとする

筑波大 数学系 本橋信義

超準解析を証明論の枠内で(すなわち, 模型論を用いないで)考察し, "Non-standard Theory" と "Standard Theory" の間の証明論的な相互関係を調べたい。

2.1. 証明論よりの準備.

$L, L', \dots$ で第一階の述語論理を, $PC(L), Fun(L), Con(L)$ でそれぞれ L の述語記号の全体, L の関数記号の全体, L の個体定数記号の全体をあらわすものとする。但し, 等号 $=$ は $PC(L)$ には入らない(論理記号として扱う)ことに注意されたい。
第一階の述語論理 L, L' と L の L' の Theory T , かつ L' の中の指定された n 個の自由変数 $\bar{p} = \langle p_1, \dots, p_n \rangle$ が与えられたとき,

$$I_{\bar{p}} = \langle C(\bar{p}), V(\bar{p}, x), \{F_E(\bar{p}, x)\}_{E \in PC(L)}, \{t_f(\bar{p}, x)\}_{f \in Fun(L)}, \{t_c(\bar{p})\}_{c \in Con(L)} \rangle$$

が 論理 L' の Theory T の $\neq$ の $(n\text{-ary})$ parametrical interpretation
 であるとは:

$C(\bar{p})$ は L の $n\text{-ary formula}$,

$V(\bar{p}, \bar{x})$ は L の $(n+1)\text{-ary formula}$,

$F_p(\bar{p}, \bar{x})$ は L の $(n+m)\text{-ary formula}$ ($p \in PC(L')$ が $m\text{-ary } a$ と $\neq$),

$t_f(\bar{p}, \bar{x})$ は L の $(n+m)\text{-ary term}$ ($f \in \text{Fun}(L')$ が $m\text{-ary } a$ と $\neq$),

$t_c(\bar{p})$ は L の $n\text{-ary term}$ ($c \in \text{Con}(L')$),

で,

$$T \vdash_L \exists \bar{p} C(\bar{p}) ,$$

$$T \vdash_L \forall \bar{p} [C(\bar{p}) \supset \exists \bar{x} V(\bar{p}, \bar{x})] ,$$

$$T \vdash_L \forall \bar{p} \forall \bar{x} [C(\bar{p}) \wedge V(\bar{p}, \bar{x}) \supset V(\bar{p}, t_f(\bar{p}, \bar{x}))] \quad (f \in \text{Fun}(L')) ,$$

$$T \vdash_L \forall \bar{p} [C(\bar{p}) \supset V(\bar{p}, t_c(\bar{p}))] \quad (c \in \text{Con}(L'))$$

が $\forall \bar{p} \exists \bar{x} \dots$ であるとき, 左辺 L , $\bar{x} = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ のとき,

$V(\bar{p}, \bar{x})$ は $V(\bar{p}, x_1) \wedge V(\bar{p}, x_2) \wedge \dots \wedge V(\bar{p}, x_m)$ をあらわすものとす。

I が L' の T の $\neq$ の parametrical interpretation のとき, 上記の

$C, V, F_p, \dots, t_f, \dots, t_c, \dots$ をそれぞれ $C_I, V_I, F_I, \dots, t_{fI}, \dots, t_{cI}, \dots$

とあらわす,

$$I_{\bar{p}} = \langle C_I(\bar{p}), V_I(\bar{p}, \bar{x}), \{F_I(\bar{p}, \bar{x})\}_{p \in PC(L')}, \{t_{fI}(\bar{p}, \bar{x})\}_{f \in \text{Fun}(L')}, \{t_{cI}(\bar{p})\}_{c \in \text{Con}(L')} \rangle$$

と表示する。

$I_{\bar{p}}$ が L' の T の $\neq$ の p -interpretation のとき, L' の各 term t ,

各 formula φ に対して $I_{\bar{p}}(t)$ および $I_{\bar{p}}(\varphi)$ を次のように定

義 3.3 :

$$I_{\bar{p}}(x) = x \quad (x \text{ is free variable})$$

$$I_{\bar{p}}(c) = c_I(\bar{p}) \quad (c \in \text{Con}(L))$$

$$I_{\bar{p}}(f(t_1, \dots, t_n)) = f_I(\bar{p}, I_{\bar{p}}(t_1), \dots, I_{\bar{p}}(t_n)) \quad (f \in \text{Fun}(L))$$

$$I_{\bar{p}}(t_1 \triangle t_2) = I_{\bar{p}}(t_1) \triangle I_{\bar{p}}(t_2)$$

$$I_{\bar{p}}(P(t_1, \dots, t_n)) = P_I(\bar{p}, I_{\bar{p}}(t_1), \dots, I_{\bar{p}}(t_n)) \quad (P \in \text{PC}(L))$$

$$I_{\bar{p}}(\neg \varphi) = \neg I_{\bar{p}}(\varphi)$$

$$I_{\bar{p}}(\varphi \wedge \psi) = I_{\bar{p}}(\varphi) \wedge I_{\bar{p}}(\psi)$$

$$I_{\bar{p}}(\varphi \vee \psi) = I_{\bar{p}}(\varphi) \vee I_{\bar{p}}(\psi)$$

$$I_{\bar{p}}(\varphi \supset \psi) = I_{\bar{p}}(\varphi) \supset I_{\bar{p}}(\psi)$$

$$I_{\bar{p}}(\exists x \varphi(x)) = \exists x (V(\bar{p}, x) \wedge I_{\bar{p}}(\varphi(x)))$$

$$I_{\bar{p}}(\forall x \varphi(x)) = \forall x (V(\bar{p}, x) \supset I_{\bar{p}}(\varphi(x)))$$

3.3.2,

Corollary L' の $\bar{x}$ -formula $\varphi(\bar{x})$ に対して,

$$\vdash_{L'} \varphi(\bar{x}) \Rightarrow \top \vdash_L \forall \bar{p} \forall \bar{x} [C_I(\bar{p}) \wedge V_I(\bar{p}, \bar{x}) \supset I_{\bar{p}}(\varphi(\bar{x}))]$$

が成り立つことは明らかである。

特に、 L が L' の sublogic ($L \subset L'$) かつ $\mathbb{I}$ に、 L' の $\top$ が $\wedge$ の p. interpretation $\mathbb{I}$ が L を保存するとは：

$$(i) \quad V_I(\bar{p}, x) \text{ は } x \triangle x, \quad (ii) \quad P_I(\bar{p}, \bar{x}) = \begin{matrix} P(\bar{x}) \\ \text{if } P \in \text{PC}(L) \end{matrix}$$

$$(iii) \quad f_I(\bar{p}, \bar{x}) = f(\bar{x}) \text{ if } f \in \text{Fun}(L), \quad (iv) \quad c_I(\bar{p}) = c \text{ if } c \in \text{Con}(L)$$

が成り立つことは、

I が L を保存するときには, L の任意の $\bar{x}$ -formula $\varphi(\bar{x})$ について,

$$T \vdash_L \forall \bar{x} [C_I(\bar{x}) \supset I_{\bar{p}}(\varphi(\bar{x})) \equiv \varphi(\bar{x})]$$

が成り立つことに注意されたい。

I が L' の T の中への p -interpretation a とし, L' の sentence φ が I -valid in T であるとは $T \vdash \forall \bar{x} [C_I(\bar{x}) \supset I_{\bar{p}}(\varphi)]$ が成り立つことをとする。以上の概念を用いて我々は次の定義を得る。

Definition. L, L' は一階の述語論理で $L \subset L', T, T'$ はそれぞれ L, L' の中の theory で $T \subset T'$ となっているものとする。 T' が L を保存して局所的に T にうけこめる とは, T' の任意の有限個の公理 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ に対して, L を保存する L' の T の中への parametrical interpretation I が, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ がすべて I -valid in T になるものが存在することである。

この定義の下で, 次の基本的な定理が得られる。

Conservativity Theorem. T' が L を保存して局所的に T にうけこめるならば, T' は T の conservativity extension である。

(証明). L の sentence φ について, $T' \vdash_L \varphi$ を仮定して $T \vdash_L \varphi$ を示せばよい。 $T' \vdash_L \varphi$ を仮定すると compactness Theorem により T' の有限個の公理 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ が存在して,

$$\vdash_{L'} \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \supset \varphi$$

が成り立つ。仮定から, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ が I -valid in T になるような L を保存する L' の T の中への parametrical interpretation が

取れる。3頁の corollary から、

$$\vdash_L \forall \bar{p} [C_I(\bar{p}) \supset I_{\bar{p}}(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p \supset \varphi)]$$

$I_{\bar{p}}(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p \supset \varphi)$ は定義から $I_{\bar{p}}(\varphi_1) \wedge \dots \wedge I_{\bar{p}}(\varphi_p) \supset I_{\bar{p}}(\varphi)$ であるから、

$$\vdash_L \forall \bar{p} [C_I(\bar{p}) \supset (I_{\bar{p}}(\varphi_1) \wedge \dots \wedge I_{\bar{p}}(\varphi_p) \supset I_{\bar{p}}(\varphi))]$$

すなわち $\vdash_L \forall \bar{p} [C_I(\bar{p}) \supset (I_{\bar{p}}(\varphi_i))] (i=1, \dots, p)$ で $\vdash_L \forall \bar{p} [C_I(\bar{p}) \supset \varphi \equiv I_{\bar{p}}(\varphi)]$ であるから、

$$\vdash_L \forall \bar{p} [C_I(\bar{p}) \supset \varphi]$$

$\varphi \equiv \bar{p}$ が出てくるから、

$$\vdash_L \exists \bar{p} (C_I(\bar{p}) \supset \varphi)$$

一方、 $\vdash_L \exists \bar{p} (C_I(\bar{p}))$ からも、なるから

$$\vdash_L \varphi \quad \text{を得る} \quad (\text{証明終り})$$

論理 L で formulate されている standard theory T に対して、 L を拡張して得られる論理 L' の中で T の拡張である non-standard theory T' を考え、上の conservativity theorem を用いて、 T' が T の conservativity extension になっていることを示す。以下、第2節でこれを実行していく。

2.2. first order logic with membership.

特定の1項述語記号 $S(x)$ と2項述語記号 $\in^*$ を固定し、 S と $\in^*$ をもつ一階の述語論理 $\mathcal{L}$ を考える。 S と $\in^*$ を用いた通常の集合論的概念は first order logic の中で

formula としてはとんと表現されているものとする:

例 $x \neq \phi$ は $S(x) \wedge \exists y (y \in x)$

$x < y$ は $S(x) \wedge S(y) \wedge \forall z (z \in x \supset z \in y)$

etc.

各 logic L に対して, " S " を "set", " $\in$ " を "membership" と呼んで書かれているある種の集合論の公理系 $\Sigma(L)$ が次の条件

[I] および [II] を満たすように構成されているものとする。

[I], $\Sigma(L) \subset \Sigma(L') \quad \text{if} \quad L \subset L'$.

[II], $L \subset L'$ のとき, $\Sigma(L')$ の各公理の L への reduction はすべて $\Sigma(L)$ で証明可能である。

(注) L' の formula φ に対して φ の L への reduction とは, φ の中に
出てくる, L に入っていない predicate symbol, function symbol
および individual constant symbol をすべて L の formula
および terms でおきかえて得られる L の formula α として
ある。

そして

Corollary. $L \subset L'$ のとき $\Sigma(L')$ は $\Sigma(L)$ の conservative extension である。

[証明]. φ は L の sentence で $\Sigma(L') \vdash_L \varphi$ を仮定する。

compactness theorem から, $\Sigma(L')$ の有限個の公理 $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ が取れて, $\vdash_{L'} \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p \supset \varphi$ が成り立つ. $\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi$ の φ の L に属する predicate symbols, function symbols, constant symbols を取り, L の適当な formula は φ である. φ は $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ から得られる formula を $\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_p, \hat{\varphi}$ とすれば $\hat{\varphi} = \varphi$ であり,

$$\vdash_L \hat{\varphi}_1 \wedge \dots \wedge \hat{\varphi}_p \supset \hat{\varphi}$$

が成り立つ. $\therefore \vdash_L \hat{\varphi}_1 \wedge \dots \wedge \hat{\varphi}_p \supset \varphi$.

よって (I) より $\Sigma(L) \vdash_L \hat{\varphi}_1 \wedge \dots \wedge \hat{\varphi}_p$ である.

$\Sigma(L) \vdash_L \varphi$ が得られる. (証明終り)

注意 $\Sigma(L)$ とは L での germane Fraenkel の集合論と取れる. 上記の (I), (II) が成り立つ.

2.3 Universe の付加.

論理 L に新しい constant symbol σ を付加して得られた論理 $L(\sigma)$ を考える. 各 L と σ に対して, $L(\sigma)$ での公理系

$Ax(L, \sigma)$ を次の条項 (III), (IV), (V) を満たすように定義する.

(注意, $Ax(L, \sigma)$ は σ が L の universe を与える σ であることを表現している.)

$$(III) \quad \Sigma(L(\sigma)), Ax(L, \sigma) \vdash \exists x (x \in \sigma) \wedge S(\sigma)$$

$$\Sigma(L(\sigma)), Ax(L, \sigma) \vdash \forall x [x \in \sigma \supset f(x) \in \sigma] \quad (f \in F_{L(L)})$$

$$\Sigma(L(\sigma)), Ax(L, \sigma) \vdash c \in \sigma \quad (c \in \text{con}(L))$$

$$(IV) \quad \Sigma(L(\sigma)), Ax(L, \sigma) \vdash \varphi^\sigma \quad \text{for any } \varphi \in \Sigma(L).$$

[V]. $Ax(L, \sigma)$ の各元 $\varphi_1(\sigma), \dots, \varphi_n(\sigma)$ と L の sentence φ について,

$$\Sigma(L) \vdash \exists x (\varphi_1(x) \wedge \dots \wedge \varphi_n(x) \wedge \varphi^x \equiv \varphi),$$

== 2" φ^x は φ の x に関する relativization とする。

[I] ~ [V] の下で我々は次の定理を得る。

Theorem 1. L の任意の sentence φ について

$$\Sigma(L) \vdash_L \varphi \iff \Sigma(L(\sigma)), Ax(L, \sigma) \vdash_{L(\sigma)} \varphi^\sigma$$

[証明] ($\Rightarrow$) $\Sigma(L) \vdash \varphi$ を仮定する。73c $\Sigma(L)$ の有限個の元 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ で $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash_L \varphi$ となるものが取れる。

Relativization の一般論より

$$\exists x (x \in \sigma), \{ \forall x [x \in \sigma \supset f(x) \in \sigma] \}_{f \in \text{Fnd}(L)}, \{ \}_{c \in \text{Cm}(L)},$$

$$\varphi_1^\sigma, \dots, \varphi_n^\sigma \vdash_{L(\sigma)} \varphi^\sigma$$

$$== 2" \text{ (III), (IV) より } \Sigma(L(\sigma)), Ax(L, \sigma) \vdash_{L(\sigma)} \varphi^\sigma,$$

$$(\Leftarrow) \quad \Sigma(L(\sigma)), Ax(L, \sigma) \vdash_{L(\sigma)} \varphi^\sigma \text{ を仮定すると [I] より}$$

$\Sigma(L(\sigma))$ の元 $\varphi_1(\sigma), \dots, \varphi_n(\sigma)$ と $Ax(L, \sigma)$ の元 $\psi_1(\sigma), \dots, \varphi_0(\sigma)$ で

$$\Sigma(L), \varphi_1(\sigma), \dots, \varphi_n(\sigma), \psi_1(\sigma), \dots, \varphi_0(\sigma) \vdash_{L(\sigma)} \varphi^\sigma$$

のやりとりが可能。 σ は L の free variables a である。

に置きかえて

$$\Sigma(L), \varphi_1(a), \dots, \varphi_n(a), \psi_1(a), \dots, \varphi_0(a) \vdash_L \varphi^a$$

が得られた。残が [II] より

$$\Sigma(L) \vdash_L \varphi_1(a) \wedge \dots \wedge \varphi_k(a)$$

だから, $\Sigma(L) \vdash_L \varphi_1(a) \wedge \dots \wedge \varphi_k(a) \supset \varphi^a$ が成り立つ。

よって $\Sigma(L) \vdash_L \varphi_1(a) \wedge \dots \wedge \varphi_k(a) \wedge \varphi^a \equiv \varphi \supset \varphi$ を得る。

$\Sigma(L)$, $\varphi \vdash a$ が成り立つことを示す。

$$\Sigma(L) \vdash_L \exists x (\varphi_1(x) \wedge \dots \wedge \varphi_k(x) \wedge \varphi^x \equiv \varphi) \supset \varphi$$

従って [V] より $\Sigma(L) \vdash_L \varphi$ を得る。(証明終)

注意. Theorem 1 にあいて, φ と σ は bounded formula a が成り立つことを示す。第14 [IV] の代りに

$$[IV]' \quad Ax(L, \sigma) \vdash_{L(\sigma)} \forall x \forall y [x \in y \wedge y \in \sigma \supset x \in \sigma]$$

を用いる方がよい。つまり, [I], [II], [III], [IV]', [V] の下で,

φ が bounded sentence a とする。

$$\Sigma(L) \vdash \varphi \iff \Sigma(L(\sigma)), Ax(L, \sigma) \vdash \varphi^\sigma$$

(i) (i) は上の証明を同じ

$$(ii) \text{ は } \Sigma(L) \vdash \varphi \text{ より } \Sigma(L(\sigma)) \vdash \varphi$$

$$\text{よって } Ax(L, \sigma) \vdash \varphi \equiv \varphi^\sigma \text{ となる}$$

$$\Sigma(L(\sigma)), Ax(L, \sigma) \vdash \varphi^\sigma \quad (\text{Q.E.D.})$$

通常、数学の命題は, " $\in$ " を含む体系で成り立つ

bounded formula で表現されることを示す。[IV] より

[IV]' の方が natural で成り立つことを示す。

2.4 Non-Standard Theory.

$L(\mathcal{U})$ の拡張に於いて L^* を取り, L^* の中で $\text{Theory } N_t$ が次の条件 [VI] を満たしているとする.

[VI] N_t は $L(\mathcal{U})$ を保存して局所的に $\Sigma(L(\mathcal{U}), A_\kappa(L, \mathcal{U}))$ になる.

すなわち Conservation Theorem から次の定理が得られる.

Theorem 2 $\Sigma(L^*), N_t, A_\kappa(L, \mathcal{U})$ は $\Sigma(L(\mathcal{U}), A_\kappa(L, \mathcal{U}))$ の conservative extension である.

(証明). Conservation Theorem により, $\Sigma(L^*)$ ~~と~~ $N_t, A_\kappa(L, \mathcal{U})$ が $\Sigma(L(\mathcal{U}), A_\kappa(L, \mathcal{U}))$ の中に $L(\mathcal{U})$ を保存して局所的になることは示せばよい.

$\Sigma(L^*), N_t, A_\kappa(L, \mathcal{U})$ の中の有限個の formulas $\varphi_1, \dots, \varphi_r, \sigma_1, \dots, \sigma_s, \psi_1, \dots, \psi_g$ を $\varphi_i \in \Sigma(L^*), \sigma_j \in N_t, \psi_k \in A_\kappa(L, \mathcal{U})$ とする. [VII] より $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ が I -valid in $\Sigma(L(\mathcal{U}), A_\kappa(L, \mathcal{U}))$ となるように $L(\mathcal{U})$ を保存する L^* の $\Sigma(L(\mathcal{U}), A_\kappa(L, \mathcal{U}))$ の中の $\text{parametrical interpretation } I$ が取れる. $\varphi_1, \dots, \varphi_g$ は $L(\mathcal{U})$ の sentences であり I は $L(\mathcal{U})$ を保存するから,

$$\Sigma(L(\mathcal{U}), A_\kappa(L, \mathcal{U})) \vdash \forall p [C_I(p) \supset I_p(\varphi_k) \equiv \varphi_k] \quad (k=1, \dots, g)$$

$$\text{よって} \quad \Sigma(L(\mathcal{U}), A_\kappa(L, \mathcal{U})) \vdash \psi_k \quad (k=1, \dots, g)$$

$$\text{よって} \quad \Sigma(L(\mathcal{U}), A_\kappa(L, \mathcal{U})) \vdash \forall p [C_I(p) \supset I_p(\varphi_k)], \quad (k=1, \dots, g)$$

すなわち $\varphi_1, \dots, \varphi_g$ は I による I -valid in $\Sigma(L(\mathcal{U}), A_\kappa(L, \mathcal{U}))$ である.

もし $N \in \Sigma$ を取れば議論が成り立つ。その例を1つあげて、 Σ の語を Σ' にする。

[例] $\Sigma(L)$ とは L で formula となる Zermelo Fraenkel の公理語 (axiom of choice を含む) を取る。この $\Sigma(L)$ による $[I], [II]$ の代わり $\Sigma' = \Sigma \cup \Sigma'$ となる。特に $Ax(L, \sigma)$ は $[III], [IV], [V]$ の代わり Σ' により取らなければならない。

論理 L の各 predicate symbol P には同じ変数の組 $\bar{x}$ を持つ新しい predicate symbol P^* を追加し、 $L^* = L(\sigma) \cup \{P^*\}_{P \in P(L)}$ とする。 $L(\sigma)$ の各 formula φ に対して φ の $P \dots$ を $P^* \dots$ にかきかえて得る formula を φ^* とする。すると $\varphi \models \varphi^*$ となる。

L の formula $\varphi(u, v, \bar{x}, y)$ に対して

$$L_{\Sigma}(\varphi)(y, \bar{x}) \text{ は } \forall z \in P_0(y) \exists v \in \sigma \forall u \in \bar{x} \varphi^{\sigma}(u, v, \bar{x}, y)$$

$$G_{\Sigma}(\varphi)(y, \bar{x}) \text{ は } \exists v \in \sigma \forall u \in y (\varphi^{\sigma}(u, v, \bar{x}, y))^*$$

とする。但し、 $\sigma = \tau$ なら $P_0(y)$ は y の finite subset の全体。と置き、 τ term とする。 $N \in \Sigma$ には、 Σ の sentences 全体とする。

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists z (S(z) \wedge \forall x (x \in \sigma \equiv x \in z)) \\ \forall x \forall y (x \in \sigma \wedge y \in x \supset y \in \sigma) \\ \forall x (x \in \sigma \supset x \in \sigma) \\ \forall \bar{x} [\bar{x} \in \sigma \supset \varphi^{\sigma}(\bar{x}) \equiv (\varphi^{\sigma}(\bar{x}))^*] \text{ for any formula } \varphi(\bar{x}) \text{ in } L, \\ \forall \bar{x} \forall y [\bar{x} \in \sigma \wedge y \in \sigma \wedge L_{\Sigma}(\varphi)(y, \bar{x}) \supset G_{\Sigma}(\varphi)(y, \bar{x})] \text{ for any formula } \varphi(u, v, \bar{x}, y) \text{ in } L. \end{array} \right.$$

すなわち通常の "ultrafilter" を formalize する = 21 = 51 (四) か
 かりやう、ここから示せる。以下、その概略を説明する。

語を簡単にすると、 L は 関係記号と 述語記号 が入る
 言語である、 $\Sigma(L(\sigma))$ の中で σ は comprehension operator を自由
 に使って、 $P(a)$ (a の power set), $P_u(a)$ (a の finite subset の集まり)
 という二種類の term が 形成 できるとして 扱うことにする (つまり、

以下、mutator は通常の公理の集合で、その中に $\exists x \in a \dots$ など、

$L(\sigma)$ での次のような terms 及び formula を与える。

$C(a)$; "a は σ 上の regular ultrafilter" i.e. a は $P_u(\sigma)$
 上の ultrafilter である 各 $i \in \sigma$ に対して $\hat{i} \in a$ である、
 $\Rightarrow \hat{i} = \{p \in P_u(\sigma) \mid i \in p\}$

$eg(a, x)$; $\exists u \in a \forall i \in u (x' i = u' i)$

$\nabla(a, x)$; $\alpha \subset P_u(\sigma) \wedge \exists u \in P_u(\sigma) \forall v \in P_u(\sigma) (v \in x \Rightarrow eg(a, u, v))$

$j(a, \bar{x}) = \{v \in P_u(\sigma) \mid \exists u \in a \forall i \in u (v' i = x_i)\}$

とすると

$\Sigma(L(\sigma)) \vdash \forall a \forall x [C(a) \wedge x \in \sigma \supset \nabla(a, j(a, x))]$

$\Sigma(L(\sigma)) \vdash$ "j は $P(\sigma)$ から $\nabla(a, x)$ の interpretation
 $L(\sigma)$

がかりやう。次に σ の formula $\varphi(\bar{x})$ に対して

$\hat{\varphi}(a, \bar{x}) = \exists \bar{y} \in \bar{x} \exists u \in a \forall i \in u (\varphi(\bar{y}' i))$

を定義する。 $\exists = \hat{\exists}$

$J = \langle C(a), \nabla(a, x), \{\hat{E}(a, \bar{x})\}_{\bar{x} \in P(L)}, \{j(a, \sigma)\} \rangle$

とす。 J は $L(\mathcal{D})$ の $\Sigma(L(\mathcal{D}))$, $Ax(L, \mathcal{D})$ への $\wedge$ による parametric interpretation である。 したがって J は Γ により、次の $\mathcal{D}$ の 定理 ϕ により $\bar{\Gamma}$ である。

Theorem (20) L の 任意の formula $\varphi(\bar{x})$ により

$$\Sigma(L(\mathcal{D})), Ax(L, \mathcal{D}) \vdash \forall a \forall \bar{x} [(C(a) \wedge \bar{x} \in \hat{a} \rightarrow j(a, \bar{x}) \in \mathcal{D}) \supset J_a(\varphi^{\mathcal{D}}(\bar{x})) \equiv \tilde{\varphi}^{\mathcal{D}}(a, \bar{x})]$$

である。

Corollary 1 L の 任意の formula $\varphi(\bar{x})$ により

$$\Sigma(L(\mathcal{D})), Ax(L, \mathcal{D}) \vdash \forall a \forall \bar{x} [(C(a) \wedge \bar{x} \in \mathcal{D} \supset J_a(\varphi^{\mathcal{D}}(j(a, \bar{x}))) \equiv \varphi^{\mathcal{D}}(\bar{x})]$$

特に φ が sentence である。

$$\Sigma(L(\mathcal{D})), Ax(L, \mathcal{D}) \vdash \forall a [(C(a) \supset J_a(\varphi^{\mathcal{D}}) \equiv \varphi^{\mathcal{D}}]$$

Corollary 2 L の formula $\varphi(u, v, \bar{x}, y)$ により

$$\begin{aligned} \Sigma(L(\mathcal{D})), Ax(L, \mathcal{D}) \vdash \forall a \forall \bar{x} \forall y [& (C(a) \wedge \bar{x} \in \mathcal{D} \wedge y \in \mathcal{D} \\ & \wedge L_{\mathcal{D}}(\varphi)(y, \bar{x}) \supset \exists v (V(a, v) \wedge v \in \hat{a} \wedge j'(a, \bar{x}) \wedge \\ & \forall u \in y J_a(\varphi^{\mathcal{D}}(j'(a, u), v, j'(a, \bar{x}), j'(a, y))))] \end{aligned}$$

$\bar{x} = \bar{x}'$, L^* の $\Sigma(L(\mathcal{D}))$, $Ax(L, \mathcal{D})$ への parametric interpretation I は 次の $\mathcal{F}$ により定まる。

$$\begin{aligned} C_I(a, b, p) &= C(a) \wedge \emptyset(\mathcal{D}) \subset b \wedge \exists c (S(c) \wedge \forall x (x \in c \equiv V(a, x)) \wedge \\ & (p: b \xrightarrow{bi} c) \wedge \forall x \in \emptyset(\mathcal{D}) (j'(a, x) = p'x) \end{aligned}$$

$$V_I(a, b, p, x) = "x \in x"$$

$$P_I(a, b, p, \bar{x}) = P(\bar{x}) \quad (P \in \mathcal{P}(L))$$

$P_I^*(a, b, p, \bar{x})$ は $\bar{x} \in b \wedge \hat{P}(a, p(\bar{x}))$ ($P \in PC(L)$)

$D_I(a, b, p)$ は "D"

($p(\bar{x})$ は $p(x_1, \dots, x_n)$)

とすれば $= 9$ 以下 $L(\sigma) \in$ 経路 $N \in \Sigma(L(\sigma)), A_n(L, \sigma)$

の σ の parametric interpretation による。例として (IV) の

$= 9$ $N \in$ 以下 σ は $\bar{x} = \bar{x}_1 = \bar{x}_2$.