

初期構造異方性を有する多重せん断型非線形弾性体の updated Lagrange法に基づく大変形定式化

**Large Deformation Formulation Based on the Updated Lagrange Method for a Nonlinear Elastic Body
within a Framework of Multiple Shear Mechanism Accounting for Inherent Anisotropy**

上田恭平・中原知洋⁽¹⁾・井川誠二⁽¹⁾

Kyohei UEDA, Tomohiro NAKAHARA⁽¹⁾ and Seiji IGAWA⁽¹⁾

(1) 五洋建設株式会社

(1) Penta-Ocean Construction Co., Ltd.

Synopsis

A constitutive model for a nonlinear elastic body within a framework of multiple shear mechanisms has been proposed to consider the geometrical nonlinearity based on large deformation (or finite strain) theory. The constitutive model has been extended to incorporate the effect of inherent anisotropy based on the total Lagrange method in the large deformation theory. This manuscript presents a formulation based on the updated Lagrange method to complete the description of a nonlinear elastic body model that can consider the inherent anisotropy effect as well as the geometrical nonlinearity.

キーワード: 初期構造異方性, 非線形弾性体, 多重せん断機構, 幾何学的非線形性, updated Lagrange法

Keywords: inherent anisotropy, nonlinear elastic body, multiple shear mechanism, geometrical nonlinearity, updated Lagrange method

1. はじめに

地盤の液状化に代表される強非線形性を伴う土の複雑な繰返し挙動を精緻に表現するため、著者らは砂の構成モデルとして多重せん断機構の概念に基づくひずみ空間多重せん断モデル (Iai et al, 1992; 2011) の改良を行ってきている。改良の一つの方向性として、地盤・構造物系の大変形現象を高精度に表現するため、大変形 (有限ひずみ) 理論に基づき材料非線形性に加えて幾何学的な非線形性を厳密に考慮した構成式の定式化を提案している (Iai et al., 2013)。他方、微小変形理論の枠組みではあるものの、地盤の堆積環境等に起因する初期構造異方性 (もしくは固有異方性) の影響を構成モデルに組み込む研究もなされている (Ueda and Iai, 2019; 2021)。

このような大変形 (有限ひずみ) 理論における幾何学的非線形性の影響と、初期構造異方性による影響の両者を液状化解析において同時に考慮するため、前稿 (上田ら, 2021) では初期構造異方性を有する非線形弾性体を対象に、大変形 (有限ひずみ) 理論における total Lagrange法に基づく定式化を行った。本稿では、前稿同様に材料非線形性は考慮せず (材料非線形の組み込みは今後の課題とする)、大変形 (有限ひずみ) 理論におけるもう一つの定式化の方法である updated Lagrange法に基づき、初期構造異方性を有する非線形弾性体の大変形定式化について示す。

2. 微小変形理論に基づく初期構造異方性を考慮した多重せん断型弾性体の定式化 (復習)

2.1 初期構造異方性を考慮したひずみ空間多重せん断モデル（復習）

以下では、微小変形理論に基づく初期構造異方性を考慮したひずみ空間多重せん断モデル（Ueda and Iai, 2019; 2021）の復習を行う。

粒状体を連続体ととらえたときの巨視的応力は、粒子間の接点力のある種の平均により与えられる。Fig. 1に示すような平面内の円形粒子の集合体では、接点力 $\mathbf{P}$ は接点垂直（もしくは粒子の中心を結ぶ枝）方向の成分 $\mathbf{n}$ ，およびこれに直交する接線方向成分 $\mathbf{t}$ に分解できる。

$$\mathbf{P} = f_n \mathbf{n} + f_t \mathbf{t} \quad (1)$$

ここに、

$$\mathbf{n}^T = [\cos \theta \quad \sin \theta], \quad \mathbf{t}^T = [\sin \theta \quad -\cos \theta] \quad (2)$$

巨視的応力は代表体積要素（体積 V ）における接点力の平均として、枝の長さ l を用いて以下のとおり与えられる（Christoffersen et al., 1981; Mehrabadi et al., 1982）。

$$\boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{V} \sum l \mathbf{P} \otimes \mathbf{n} \quad (3)$$

Rothenburg and Bathurst (1989)に従うと、接点密度（単位体積当たりの接点数） m_v ，平均枝長さ $\bar{l}_0$ ，および接点分布関数 $E(\theta)$ を用い、式(3)は以下のとおり書き換えられる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}' = m_v \bar{l}_0 \left[\int_0^{2\pi} F^*(\theta - \theta_0) f_n(\theta) E(\theta) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\theta \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} F^*(\theta - \theta_0) f_t(\theta) E(\theta) \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} d\theta \right] \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、

$$\int_0^{2\pi} E(\theta) d\theta = 1 \quad (5)$$

$$F^*(\theta) = 1 + a_1 \cos 2\theta + a_2 \cos 4\theta \quad (6)$$

式(6)は初期構造異方性を考慮するために新たに導入された関数で、 a_1 , a_2 , θ_0 は初期構造異方性を表現するパラメータである。なお、式(4)における接点力分布を表す f_n, f_t なる記号は、 θ 方向についての平均的な成分として定義し直している。

Ueda and Iai (2019)に示すように、式(4)を展開すると、以下のとおり等方成分（等方応力 p' ）ならびに偏差成分（仮想単純せん断応力 q ）に分解できる。

$$\boldsymbol{\sigma}' = -p' \mathbf{I} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} q \langle \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle d\theta \quad (7)$$

ここに、

$$p' = -\frac{1}{2} m_v \bar{l}_0 \bar{f}_0 \quad (8)$$

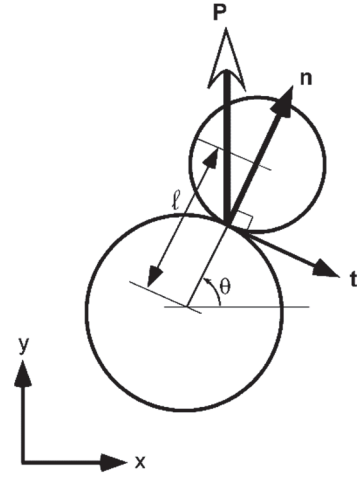


Fig. 1 Contact normal ($\mathbf{n}$) and tangential ($\mathbf{t}$) directions, and contact force $\mathbf{P}$

$$\bar{f}_0 = \int_0^{2\pi} f_n(\theta) E(\theta) d\theta \quad (9)$$

$$\begin{aligned} q = m_v \bar{l}_0 \left[\left\{ F^*(\theta - \theta_0) f_n(\theta) E(\theta) - \bar{f}_0 \bar{E}_0 \right\} \right. \\ \left. + F^*(\theta - \theta_0) f_t \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) E \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\bar{E}_0 = \frac{1}{2\pi} \quad (11)$$

ここで、積分変数 θ を $\omega = 2\theta$ なる変数で置き換えると、式(7)は以下のとおり書き換えられる。

$$\boldsymbol{\sigma}' = -p' \mathbf{I} + \frac{1}{4} \int_0^{4\pi} q \langle \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle d\omega \quad (12)$$

ここに、

$$\langle \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ \sin \omega & -\cos \omega \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$q = F^* \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\omega_0}{2} \right) q_{\text{iso}}(\omega) + q_{\text{Aniso}}(\omega) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} q_{\text{iso}}(\omega) = m_v \bar{l}_0 \left[\left\{ f_n \left(\frac{\omega}{2} \right) E \left(\frac{\omega}{2} \right) - \bar{f}_0 \bar{E}_0 \right\} \right. \\ \left. + f_t \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{4} \right) E \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

$$q_{\text{Aniso}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \tilde{F} \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\omega_0}{2} \right) - 1 \right\} m_v \bar{l}_0 \bar{f}_0 \quad (16)$$

ここで、ひずみ空間多重せん断モデルでは、式(15)に示す（初期構造異方性が存在しない場合の）仮想単純せん断応力 q_{iso} を、次式により仮想単純せん断ひずみ γ と関連付けている（Iai et al., 1992; 2011）。

$$q_{\text{iso}}(\gamma(\omega)) = \frac{\gamma(\omega) / \gamma_v}{1 + |\gamma(\omega) / \gamma_v|} q_v \quad (17)$$

ここに,

$$\gamma = \langle \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (18)$$

であり, 式(17)における q_v , γ_v は, それぞれ各単純せん断機構におけるせん断強度と (せん断) 基準ひずみを表す. 式(17)より,

$$q_{\text{iso}}(\omega + \pi) / q_v = -q_{\text{iso}}(\omega) / q_v \quad (19)$$

なる関係式が成立するので, 式(12)は最終的に以下のように書き表せる.

$$\boldsymbol{\sigma}' = -p' \mathbf{I} + \int_0^\pi q \langle \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \rangle d\omega \quad (20)$$

ここに,

$$q = F(\omega - \omega_0) q_{\text{iso}}(\omega) + q_{\text{Aniso}}(\omega) \quad (21)$$

$$F(\omega) = 1 + a_2 \cos 2\omega \quad (22)$$

$$q_{\text{Aniso}}(\omega) = -\frac{1}{\pi} a_1 \cos(\omega - \omega_0) p' \quad (23)$$

であり, 初期構造異方性を表現する関数 F^* (式(6)) が, 式(22)に示す関数 F に変換されている.

2.2 多重せん断型弾性体 (復習)

前節で述べた構成モデルは, 材料的な非線形性を考慮したものである. ここで, 材料特性が (線形) 弾性であると仮定すると, 上田・井合 (2016) に従い,

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + \int_0^\pi q \langle \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \rangle d\omega \quad (24)$$

ここに,

$$p = -K \varepsilon_c = -K (\varepsilon_x^c + \varepsilon_y^c) \quad (25)$$

$$q = \left\{ 1 + a_2 \cos 2(\omega - \omega_0) \right\} \frac{q_v}{\gamma_v} \gamma_c - \frac{1}{\pi} a_1 \cos(\omega - \omega_0) p \quad (26)$$

$$\gamma_c = (\varepsilon_x^c - \varepsilon_y^c) \cos \omega + \gamma_{xy}^c \sin \omega \quad (27)$$

さらに, 線形直交異方弾性体に対応して堆積面が水平である ($\theta_0 = \pi/2$) と仮定すると, 式(24)は以下のように書き換えられる.

$$\boldsymbol{\sigma} = K \varepsilon_c \begin{bmatrix} 1 - \frac{a_1}{2} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{a_1}{2} \end{bmatrix} + G_m^{\text{iso}} \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{a_2}{2}\right)(\varepsilon_x^c - \varepsilon_y^c) & \left(1 - \frac{a_2}{2}\right)\gamma_{xy}^c \\ \left(1 - \frac{a_2}{2}\right)\gamma_{xy}^c & -\left(1 + \frac{a_2}{2}\right)(\varepsilon_x^c - \varepsilon_y^c) \end{bmatrix} \quad (28)$$

ここに,

$$G_m^{\text{iso}} = \frac{q_v}{\gamma_v} \int_0^\pi \sin^2 \omega d\omega = \frac{\pi}{2} \frac{q_v}{\gamma_v} \quad (29)$$

もしくは, 式(28)は以下のように書ける.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^c \\ \varepsilon_y^c \\ \gamma_{xy}^c \end{Bmatrix} \quad (30)$$

ここに,

$$D_{11} = \left(1 - \frac{a_1}{2}\right) K + \left(1 + \frac{a_2}{2}\right) G_m^{\text{iso}} \quad (31)$$

$$D_{12} = \left(1 - \frac{a_1}{2}\right) K - \left(1 + \frac{a_2}{2}\right) G_m^{\text{iso}} \quad (32)$$

$$D_{21} = \left(1 + \frac{a_1}{2}\right) K - \left(1 + \frac{a_2}{2}\right) G_m^{\text{iso}} \quad (33)$$

$$D_{22} = \left(1 + \frac{a_1}{2}\right) K + \left(1 + \frac{a_2}{2}\right) G_m^{\text{iso}} \quad (34)$$

$$D_{33} = \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) G_m^{\text{iso}} \quad (35)$$

式(28)もしくは式(30)をひずみについて解くと,

$$\varepsilon_y^c - \varepsilon_x^c = \frac{1}{(2 + a_2) G_m^{\text{iso}}} \left\{ \left(1 - \frac{a_1}{2}\right) \sigma_y - \left(1 + \frac{a_1}{2}\right) \sigma_x \right\} \quad (36)$$

$$\gamma_{xy}^c = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2} a_2\right) G_m^{\text{iso}}} \tau_{xy} \quad (37)$$

となる.

3. updated Lagrange法 (空間表示) での積分形構成式

上田ら (2021) より, 初期構造異方性を考慮した多重せん断モデル型線形弾性体の total Lagrange法に基づく積分形構成式 (物質表示) は, 第2Piola-Kirchhoff 応力テンソル $\mathbf{S}$ を用いて以下のように与えられる.

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_p + \mathbf{S}_q \quad (38)$$

ここに,

$$\mathbf{S}_p = -J_c p \mathbf{C}_c^{-1} \quad (39)$$

$$\mathbf{S}_q = J_c^{-1} \mathbb{Q} : \bar{\mathbf{S}} = \int_0^\pi q \left(\langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle - \gamma_c \mathbf{C}_c^{-1} \right) d\omega \quad (40)$$

$$J_c = \det \mathbf{F}_c \quad (41)$$

$$p = -K \varepsilon_c \quad (42)$$

$$\varepsilon_c = \ln J_c \quad (43)$$

$$\mathbf{C}_c = \mathbf{F}_c^T \mathbf{F}_c = 2\mathbf{E}_c + \mathbf{I} \quad (44)$$

$$\mathbb{Q} = \mathbb{N} - \frac{1}{2} \mathbf{C}_c^{-1} \otimes \mathbf{C}_c \quad (45)$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \int_0^\pi J_c q \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle d\omega \quad (46)$$

$$\langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ \sin \omega & -\cos \omega \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$q = \{1 + a_2 \cos 2(\omega - \omega_0)\} q_{\text{iso}} - \frac{1}{\pi} a_1 \cos(\omega - \omega_0) p \quad (48)$$

$$q_{\text{iso}} = G_v^{\text{iso}} \gamma_c \quad (49)$$

$$\gamma_c = \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle : \mathbf{E}_c = \frac{1}{2} \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle : \mathbf{C}_c \quad (50)$$

$$G_v^{\text{iso}} = \frac{G_m^{\text{iso}}}{\int_0^\pi \sin^2 \omega d\omega} = \frac{G_m^{\text{iso}}}{\pi/2} \quad (51)$$

式(38)を物質表示から空間表示へpush-forwardすると,

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_p + \boldsymbol{\sigma}_q \quad (52)$$

ここに,

$$\boldsymbol{\sigma}_p = J_c^{-1} \mathbf{F}_c \mathbf{S}_p \mathbf{F}_c^T = -p \mathbf{I} \quad (53)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_q = J_c^{-1} \int_0^\pi q (\mathbf{F}_c \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle \mathbf{F}_c^T - \gamma_c \mathbf{F}_c \mathbf{C}_c^{-1} \mathbf{F}_c^T) d\omega \quad (54)$$

$$\begin{aligned} &= J_c^{-1} \int_0^\pi q (\langle \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \rangle - \gamma_c \mathbf{I}) d\omega \\ \gamma_c &= \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle : \mathbf{E}_c = \mathbf{F}_c \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle \mathbf{F}_c^T : \mathbf{F}_c^{-T} \mathbf{E}_c \mathbf{F}_c^{-1} \\ &= \langle \mathbf{F}_c \mathbf{T} \otimes \mathbf{F}_c \mathbf{N} \rangle : \mathbf{F}_c^{-T} \mathbf{E}_c \mathbf{F}_c^{-1} = \langle \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \rangle : \mathbf{e}_c \end{aligned} \quad (55)$$

なお, 式(54)は以下の形にも書ける.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_q &= J_c^{-1} \mathbf{F}_c \mathbf{S}_q \mathbf{F}_c^T = J_c^{-1} \mathbf{F}_c (J_c^{-1} \mathbf{Q} : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{F}_c^T \\ &= J_c^{-1} \mathbf{F}_c \left\{ J_c^{-1} \bar{\mathbf{S}} - \frac{1}{2} J_c^{-1} (\mathbf{C}_c : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{C}_c^{-1} \right\} \mathbf{F}_c^T \\ &= J_c^{-1} \left\{ J_c^{-1} \mathbf{F}_c \bar{\mathbf{S}} \mathbf{F}_c^T - \frac{1}{2} J_c^{-1} (\mathbf{C}_c : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{I} \right\} \end{aligned} \quad (56)$$

ここで, 式(56)の最右辺第1項は, total Lagrange法における $\bar{\mathbf{S}}$ (式(46)) より以下のように表せる.

$$(\bar{\boldsymbol{\sigma}} =) J_c^{-1} \mathbf{F}_c \bar{\mathbf{S}} \mathbf{F}_c^T = \int_0^\pi q \langle \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \rangle d\omega \quad (57)$$

また, 式(56)と2階の単位テンソルとの縮約をとると,

$$\begin{aligned} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}_q &= \mathbf{I} : J_c^{-1} \left\{ J_c^{-1} \mathbf{F}_c \bar{\mathbf{S}} \mathbf{F}_c^T - \frac{1}{2} J_c^{-1} (\mathbf{C}_c : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{I} \right\} \\ &= J_c^{-2} (\bar{\mathbf{S}} : \mathbf{F}_c^T \mathbf{F}_c - \mathbf{C}_c : \bar{\mathbf{S}}) = 0 \end{aligned} \quad (58)$$

ここで, 式(57)を式(58)に代入すると,

$$\mathbf{I} : \boldsymbol{\sigma}_q = \mathbf{I} : J_c^{-1} \left\{ \bar{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{1}{2} J_c^{-1} (\mathbf{C}_c : \bar{\mathbf{S}}) \mathbf{I} \right\} = 0 \quad (59)$$

よって,

$$\mathbf{I} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} = J_c^{-1} (\mathbf{C}_c : \bar{\mathbf{S}}) \quad (60)$$

これを再び式(56)に代入すると, 以下の関係が得られ

る.

$$\boldsymbol{\sigma}_q = J_c^{-1} \left(\mathbf{N} - \frac{1}{2} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) : \bar{\boldsymbol{\sigma}} = J_c^{-1} \mathbb{Z} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (61)$$

ここに,

$$\mathbb{Z} = \mathbf{N} - \frac{1}{2} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (62)$$

以上より, 空間表示における積分形構成式は, 以下のとおり与えられる.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}_p + \boldsymbol{\sigma}_q = -p \mathbf{I} + J_c^{-1} \int_0^\pi q (\langle \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \rangle - \gamma_c \mathbf{I}) d\omega \\ &= -p \mathbf{I} + J_c^{-1} \mathbb{Z} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \end{aligned} \quad (63)$$

ここに, 式(63)における等方圧力 p および仮想単純せん断応力 q は, 物質表示の場合と同様に与えられる.

ここで, 線形直交異方弾性体に対応して堆積面が水平である ($\theta_0 = \pi/2$) と仮定すると, 仮想単純せん断ひずみは, 式(55)より,

$$\begin{aligned} \gamma_c &= \mathbf{F}_c \langle \mathbf{T} \otimes \mathbf{N} \rangle \mathbf{F}_c^T : \mathbf{e}_c \\ &= \begin{bmatrix} F_{11}^c & F_{12}^c \\ F_{21}^c & F_{22}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ \sin \omega & -\cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11}^c & F_{21}^c \\ F_{12}^c & F_{22}^c \end{bmatrix} \\ &\quad : \begin{bmatrix} e_x^c & e_{xy}^c \\ e_{xy}^c & e_y^c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_x \cos \omega + B_x \sin \omega & A_{xy} \cos \omega + B_{xy} \sin \omega \\ A_{xy} \cos \omega + B_{xy} \sin \omega & A_y \cos \omega + B_y \sin \omega \end{bmatrix} \\ &\quad : \begin{bmatrix} e_x^c & e_{xy}^c \\ e_{xy}^c & e_y^c \end{bmatrix} \\ &= \bar{A} \cos \omega + \bar{B} \sin \omega \end{aligned} \quad (64)$$

ここに,

$$\begin{aligned} A_x &= F_{11}^c F_{11}^c - F_{12}^c F_{12}^c, \quad B_x = 2 F_{11}^c F_{12}^c \\ A_y &= F_{21}^c F_{21}^c - F_{22}^c F_{22}^c, \quad B_y = 2 F_{21}^c F_{22}^c \\ A_{xy} &= F_{11}^c F_{21}^c - F_{12}^c F_{22}^c, \quad B_{xy} = F_{12}^c F_{21}^c + F_{11}^c F_{22}^c \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A_x e_x^c + A_y e_y^c + 2 A_{xy} e_{xy}^c \\ \bar{B} &= B_x e_x^c + B_y e_y^c + 2 B_{xy} e_{xy}^c \end{aligned} \quad (66)$$

したがって, 式(63)は以下のように表される.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= -p \mathbf{I} + J_c^{-1} \int_0^\pi q \langle \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \rangle d\omega - J_c^{-1} \int_0^\pi q \gamma_c \mathbf{I} d\omega \\ &= -p \mathbf{I} + J_c^{-1} \int_0^\pi (1 + a_2 \cos 2\omega) q_{\text{iso}} \langle \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \rangle d\omega \\ &\quad + J_c^{-1} \int_0^\pi \frac{1}{\pi} a_1 p \cos \omega \langle \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \rangle d\omega \\ &\quad - J_c^{-1} \int_0^\pi (1 + a_2 \cos 2\omega) q_{\text{iso}} \gamma_c \mathbf{I} d\omega \\ &\quad - J_c^{-1} \int_0^\pi \frac{1}{\pi} a_1 p \gamma_c \cos \omega \mathbf{I} d\omega \end{aligned} \quad (67)$$

ここに, 最右辺の各項は以下のとおり与えられる.

第1項:

$$-p \mathbf{I} = K \varepsilon_c \mathbf{I} = K \varepsilon_c \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (68)$$

第2項:

$$\begin{aligned}
& J_e^{-1} \int_0^\pi (1 + a_2 \cos 2\omega) q_{\text{iso}} \langle \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \rangle d\omega \\
&= J_e^{-1} G_m^{\text{iso}} \left[\begin{aligned} & \left(1 + \frac{a_2}{2}\right) \bar{A}A_x + \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) \bar{B}B_x \\ & \left(1 + \frac{a_2}{2}\right) \bar{A}A_{xy} + \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) \bar{B}B_{xy} \\ & \left(1 + \frac{a_2}{2}\right) \bar{A}A_{xy} + \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) \bar{B}B_{xy} \\ & \left(1 + \frac{a_2}{2}\right) \bar{A}A_y + \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) \bar{B}B_y \end{aligned} \right] \quad (69)
\end{aligned}$$

第3項：

$$\begin{aligned}
& J_e^{-1} \int_0^\pi \frac{1}{\pi} a_1 p \cos \omega \langle \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \rangle d\omega \\
&= -\frac{1}{2} J_e^{-1} a_1 K \varepsilon_e \begin{bmatrix} A_x & A_{xy} \\ A_{xy} & A_y \end{bmatrix} \quad (70)
\end{aligned}$$

第4項：

$$\begin{aligned}
& -J_e^{-1} \int_0^\pi (1 + a_2 \cos 2\omega) q_{\text{iso}} \gamma_e \mathbf{I} d\omega \\
&= -J_e^{-1} G_m^{\text{iso}} \left\{ \left(1 + \frac{a_2}{2}\right) \bar{A}^2 + \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) \bar{B}^2 \right\} \mathbf{I} \quad (71)
\end{aligned}$$

第5項：式(64)より，

$$-J_e^{-1} \int_0^\pi \frac{a_1}{\pi} p \gamma_e \cos \omega \mathbf{I} d\omega = \frac{a_1}{2} J_e^{-1} K \varepsilon_e \bar{\mathbf{A}} \mathbf{I} \quad (72)$$

以上より，式(63)は最終的に以下のように表される．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= K \varepsilon_e \left\{ \left(1 + \frac{a_1}{2} J_e^{-1} \bar{A}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{a_1}{2} J_e^{-1} \begin{bmatrix} A_x & A_{xy} \\ A_{xy} & A_y \end{bmatrix} \right\} \\
& - J_e^{-1} G_m^{\text{iso}} \left\{ \left(1 + \frac{a_2}{2}\right) \bar{A}^2 + \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) \bar{B}^2 \right\} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& + J_e^{-1} G_m^{\text{iso}} \left[\begin{aligned} & \left(1 + \frac{a_2}{2}\right) \bar{A}A_x + \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) \bar{B}B_x \\ & \left(1 + \frac{a_2}{2}\right) \bar{A}A_{xy} + \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) \bar{B}B_{xy} \\ & \left(1 + \frac{a_2}{2}\right) \bar{A}A_{xy} + \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) \bar{B}B_{xy} \\ & \left(1 + \frac{a_2}{2}\right) \bar{A}A_y + \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) \bar{B}B_y \end{aligned} \right] \quad (73)
\end{aligned}$$

ここで，仮に変形が微小であるとする，

$$\begin{aligned}
A_x &= 1, \quad B_x = 0 \\
A_y &= -1, \quad B_y = 0 \\
A_{xy} &= 0, \quad B_{xy} = 1 \quad (74)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= \varepsilon_x^e - \varepsilon_y^e \\
\bar{B} &= \gamma_{xy}^e \quad (75)
\end{aligned}$$

かつ $J_e = 1$ となるので，ひずみに関する2次の項（体積ひずみと軸差せん断ひずみのカップリングも含む）を無視すると，式(73)は式(28)のように簡略化される．

4. 単純せん断の場合

単純せん断では，

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \quad (76)$$

より，

$$\mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$J_e = \det \mathbf{F}_e = 1 \quad (78)$$

$$\varepsilon_e = \ln J_e = 0 \quad (79)$$

$$\mathbf{C}_e = \mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 + \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (80)$$

$$\mathbf{b}_e = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_e^T = \begin{bmatrix} 1 + \gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$\mathbf{E}_e = \frac{1}{2} (\mathbf{C}_e - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (82)$$

$$\mathbf{e}_e = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{b}_e^{-1}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & -\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (83)$$

なので，式(65)(66)は以下のとおり書き表せる．

$$\begin{aligned}
A_x &= 1 - \gamma^2, \quad B_x = 2\gamma \\
A_y &= -1, \quad B_y = 0 \\
A_{xy} &= -\gamma, \quad B_{xy} = 1 \quad (84)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= -\frac{1}{2} \gamma^2 \\
\bar{B} &= \gamma \quad (85)
\end{aligned}$$

したがって，有限ひずみ（大変形）理論（updated Lagrange法）における式(73)は，

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x^{\text{Aniso}} & \sigma_{xy}^{\text{Aniso}} \\ \sigma_{xy}^{\text{Aniso}} & \sigma_y^{\text{Aniso}} \end{bmatrix} = G_m^{\text{iso}} \gamma \left(1 - \frac{1}{2} a_2\right) \begin{bmatrix} \sigma_x^{\text{SS}} & \sigma_{xy}^{\text{SS}} \\ \sigma_{xy}^{\text{SS}} & \sigma_y^{\text{SS}} \end{bmatrix} \quad (86)$$

ここに，

$$\sigma_x^{\text{SS}} = \gamma \left\{ 1 + \frac{2 + a_2}{4(2 - a_2)} (\gamma^2 - 2) \right\} \quad (87)$$

$$\sigma_y^{\text{SS}} = -\gamma \left\{ 1 + \frac{2 + a_2}{4(2 - a_2)} (\gamma^2 - 2) \right\} \quad (88)$$

$$\sigma_{xy}^{\text{SS}} = 1 + \frac{2 + a_2}{2(2 - a_2)} \gamma^2 \quad (89)$$

となる．一方，微小変形理論に基づく式(28)は以下のとおりとなる．

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x^{\text{Aniso}} & \sigma_{xy}^{\text{Aniso}} \\ \sigma_{xy}^{\text{Aniso}} & \sigma_y^{\text{Aniso}} \end{bmatrix} = G_m^{\text{iso}} \gamma \left(1 - \frac{1}{2} a_2\right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (90)$$

なお，式(90)より，初期構造異方性の有無によるせん

断応力への影響は,

$$\frac{\sigma_{xy}^{\text{Aniso}}}{\sigma_{xy}^{\text{Iso}}} = 1 - \frac{1}{2}a_2 \quad (91)$$

となり, 微小変形理論ではせん断ひずみ (γ) に依らず一定 (異方性パラメータ a_2 のみの関数) となる.

他方, 有限変形理論では, 式(86)より,

$$\frac{\sigma_{xy}^{\text{Aniso}}}{\sigma_{xy}^{\text{Iso}}} = 1 + \frac{\gamma^2 - 2}{2(\gamma^2 + 2)}a_2 \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2}a_2 \quad (92)$$

$$\frac{\sigma_x^{\text{Aniso}} - \sigma_y^{\text{Aniso}}}{\sigma_x^{\text{Iso}} - \sigma_y^{\text{Iso}}} = 1 + \frac{\gamma^2 - 6}{2(\gamma^2 + 2)}a_2 \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2}a_2 \quad (93)$$

となり, 初期構造異方性の影響がせん断ひずみ (γ) の大きさに依存することがわかる.

5. 一軸引張りの場合

一軸引張りでは,

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \quad (94)$$

より,

$$\mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (95)$$

$$J_e = \det \mathbf{F}_e = 1 \quad (96)$$

$$\varepsilon_e = \ln J_e = 0 \quad (97)$$

$$\mathbf{C}_e = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (98)$$

$$\mathbf{b}_e = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (99)$$

$$\mathbf{E}_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (100)$$

$$\mathbf{e}_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (101)$$

なので, 式(65)(66)は以下のとおり書き表せる.

$$\begin{aligned} A_x &= \lambda^2, \quad B_x = 0 \\ A_y &= -\frac{1}{\lambda^2}, \quad B_y = 0 \end{aligned} \quad (102)$$

$$\begin{aligned} A_{xy} &= 0, \quad B_{xy} = 1 \\ \bar{A} &= \frac{1}{2} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \\ \bar{B} &= 0 \end{aligned} \quad (103)$$

したがって, 有限ひずみ (大変形) 理論 (updated Lagrange法) における式(73)は,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \begin{bmatrix} \sigma_x^{\text{Aniso}} & \sigma_{xy}^{\text{Aniso}} \\ \sigma_{xy}^{\text{Aniso}} & \sigma_y^{\text{Aniso}} \end{bmatrix} \\ &= G_m^{\text{Iso}} \left(1 + \frac{1}{2}a_2 \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \left(\lambda^4 - \frac{1}{\lambda^4} \right) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \left(\lambda^4 - \frac{1}{\lambda^4} \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (104)$$

となる. 一方, 微小変形理論に基づく式(28)は以下のとおりとなる.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \begin{bmatrix} \sigma_x^{\text{Aniso}} & \sigma_{xy}^{\text{Aniso}} \\ \sigma_{xy}^{\text{Aniso}} & \sigma_y^{\text{Aniso}} \end{bmatrix} \\ &= G_m^{\text{Iso}} \left(1 + \frac{1}{2}a_2 \right) \begin{bmatrix} 2(\lambda - 1) & 0 \\ 0 & -2(\lambda - 1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (105)$$

なお, 式(105)より, 初期構造異方性の有無によるせん断応力への影響は,

$$\frac{\sigma_x^{\text{Aniso}} - \sigma_y^{\text{Aniso}}}{\sigma_x^{\text{Iso}} - \sigma_y^{\text{Iso}}} = 1 + \frac{1}{2}a_2 \quad (106)$$

となり, 微小変形理論ではひずみの大きさ (γ) に依らず一定 (異方性パラメータ a_2 のみの関数) となる.

他方, 有限変形理論でも式(104)より式(106)が導かれることから, 一軸引張りの場合には初期構造異方性の影響がひずみの大きさ (γ) に依存しないことがわかる.

6. まとめ

本稿では, 多重せん断モデル型の線形弾性体の拡張として, 初期構造異方性の影響に加え, 幾何学的非線形性の影響を考慮に入れた, updated Lagrange法に基づく多重せん断型非線形弾性体の定式化を示した. 提案モデルは, 幾何学的非線形性を考慮しない場合には既往の文献に示されている一般的な線形直交異方弾性体と一致し, 多重せん断モデルの枠組みを用いることで, 自然な拡張として大変形 (有限ひずみ) 定式化がなされていると考えられる. また, 既往の線形直交異方弾性体と比較して, 任意方向の初期構造異方性をより柔軟に表現できる利点を有している.

また, 導出した初期構造異方性を有する多重せん

断型非線形弾性体の大変形式化 (updated Lagrange 法) に基づき, 単純せん断および一軸引張りの場合の理論解を導出した. このうち単純せん断では, せん断応力に及ぼす初期構造異方性の影響がせん断ひずみの大きさにも依存するのに対し, 一軸引張りではひずみの大きさには依存せず, 異方性パラメータのみの関数となることがわかった.

参考文献

- 上田恭平・井合進 (2016) : 多重せん断機構の概念に基づく有限変形を考慮した弾性体構成式の提案, 土木学会論文集A2 (応用力学), Vol. 72, No. 2, pp. I_345-I_356.
- 上田恭平・中原知洋・井川誠二 (2021) : 初期構造異方性を有する多重せん断型非線形弾性体のtotal Lagrange法に基づく大変形式化, 京都大学防災研究所年報, 第64号B, pp. 108-114.
- Christoffersen, J., Mehrabadi, M. M., Nemat-Nasser, S. (1981) : A micromechanical description of granular material behavior. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 48, No. 2, pp. 339-344.
- Iai, S., Matsunaga, Y., Kameoka, T. (1992): Strain space plasticity model for cyclic mobility, *Soils and Foundations*, Vol. 32, No. 2, pp. 1-15.
- Iai, S., Tobita, T., Ozutsumi, O. and Ueda, K. (2011): Dilatancy of granular materials in a strain space multiple mechanism model, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 35, No. 3, pp. 360-392.
- Iai, S., Ueda, K., Tobita, T., Ozutsumi, O. (2013): Finite Strain Formulation of a Strain Space Multiple Mechanism Model for Granular Materials, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 37(9), pp. 1189-1212.
- Mehrabadi, M. M., Nemat-Nasser, S., Oda, M. (1982): On statistical description of stress and fabric in granular materials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 6, No. 1, pp. 95-108.
- Rothenburg, L. and Bathurst, R. J. (1989): Analytical study of induced anisotropy in idealized granular materials, *Géotechnique*, Vol. 39, No. 4, pp. 601-614.
- Ueda, K., Iai, S. (2019): Constitutive modeling of fabric anisotropy in a strain space multiple mechanism model for granular materials, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 43(3), pp. 708-737.
- Ueda, K., Iai, S. (2021): Non-coaxiality considering inherent anisotropy under various loading paths in a strain space multiple mechanism model for granular materials, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 45(6), pp. 815-842.

(論文受理日 : 2022年8月31日)