

Brauer Correspondence について

北大 理 奥山 哲郎

1. 論文 [1] において, Alperin は, 有限群 G とその部分群 H で $N_G(P) \supseteq H \supseteq P \subset G$, P はある p -部分群となっているものとの間の Brauer correspondence についての加群論的記述を行っている。ここでは, 一般の部分群 H と G の間の Brauer correspondence について考えてみる。

F を標数が $p > 0$ の代数閉体, G を有限群, $F[G]$ を F 上の G の群多元環とする。加群は右加群と考える。 $F[G]$ 自身は, $t(x, y) = x^{-1}txy$, $t \in F[G]$, $x, y \in G$ とおくことによって, $F[G \times G]$ -加群とみることができ, G の p -block は, $F[G \times G]$ -加群としての $F[G]$ の直既約直和因子と一致している。Brauer correspondence など, モジュラー表現の理論についての用語, 定義は, [2], [3] を参照されたい。

2. これから, G , その部分群 H , H の p -block b を固定

して考える。

$F[H \times H]$ -加群として自然に $F[G] = \bigoplus_y F[HyH]$, (ここで y は (H, H) 両側剰余類の代表系を動き, $F[HyH]$ は HyH の元を基底として $F[H \times H]$ -加群とみたもの) と書ける。 b は $F[H]$ の $F[H \times H]$ -直和因子であるから、自然な $F[H \times H]$ -射影 $\tau: F[G] \rightarrow b$ と, $F[H \times H]$ -入射 $\sigma: b \rightarrow F[G]$ がある。

ここで次の定義をする。

(定義) F -線型写像 $\theta: \text{End}_{G \times G}(F[G]) \rightarrow \text{End}_{H \times H}(b)$ を $f \mapsto \sigma f \tau$ で定義する。

また、 λ を自然な全型 $\text{End}_{H \times H}(b) \rightarrow \text{End}_{H \times H}(b) / J(\text{End}_{H \times H}(b))$ とする。

このとき、次の事が言える。

(Proposition 1.)

b^G is defined in the sense of the Brauer correspondence if and only if $\theta\lambda$ is an algebra homomorphism.

次の命題は、 b^G が定義されるとき、 b^G と b の加群としての関係を与える。

(Proposition 2.)

If b^G is defined, then b as an $F[H \times H]$ -module is isomorphic to a direct summand of $b^G|_{H \times H}$.

次に, b^G が定義できるある十分条件を与える。

(Theorem).

If b has a multiplicity 1 in the decomposition of $F[G]$ into indecomposable $F[H \times H]$ -modules, then b^G is defined.

最後に、上の定理の仮定をみたす例、すなわち b^G が定義できる例を与えておく。

(例 1.) 上の G, H, b で, b の defect group D が

$C_G(D) \leq H$ となっているとき。([2], §2)

(例 2.) 同じく, ある複素既約指標 $\chi \in b$ について, χ^G が既約指標であるとき。([5], Theorem 2).

参考文献

[1], J.L. Alperin. J. Algebra 47 (1977), 197-200

[2], R. Brauer. Math. Zeit. 72 (1959/60), 25-46

[3], W. Feit. "Representations of Finite Groups", Yale Univ (1969)

[4], J. A. Green Math. Zeit. 79 (1962), 100-115

[5], W.F. Reynolds, Nagoya Math. J. 22 (1963), 15-32.