

周期性をもつ基本流の線形安定性について

名大 工 応用物理 磯部文男
桑原真二

1. 序

流れに垂直な平面内に平行に置かれた平板列、または平行円柱列などの周期性をもつ境界の直後の伴流は同じ周期性をもつが、さらに後方ではその周期より長い周期をもつ流れがあらわれることがある。(Fig. 1) これを平行平板等の直後の速度分布をもつ流れの不安定を考へ、Orr-Sommerfeld 方程式を用いて解析する。

岐阜大学の松井教授等による実験では、基本流の最大値 U_0 、平行円柱列、あるいは平行円柱列の周期 λ 、動粘性率 ν による Reynolds 数 $Re = U_0 \lambda / \nu$ とおおよそ、 $2000 \sim 3000$ 以下で存在する。この際、平行板、あるいは円

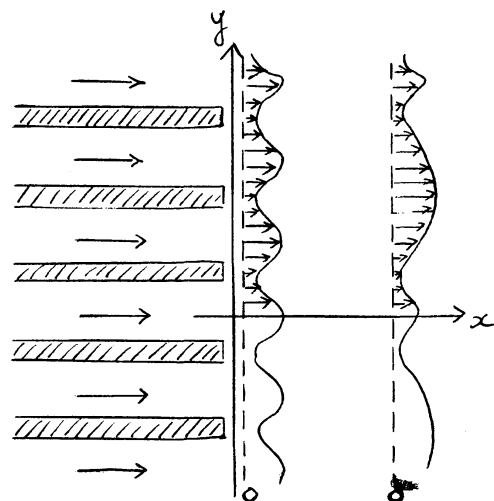


Fig. 1 流れの概略図 速度の x 成分 (基本流の方向) を示す

柱の数は $20 \sim 42$ である。平行板の厚さ、あるいは円柱の直径を d とし、 l/d を変化させて、 $\sqrt{d}$ が小さいほど、大も周期の速度分布がえられる。

2. 問題の定式化

平行な平板列等をすぎたとき、しぼりくは平行流であるとして、2次元流がなされる、これに微小擾乱が加えられるとして Orr-Sommerfeld 方程式を用いる：

$$L\phi = CM\phi \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} L &= -\frac{1}{i k R} \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right)^2 + U(y) \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) - U''(y) \\ M &= \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$\phi \in \mathbb{C}$, L, M は演算子, C : 固有値 (複素数)

ψ : 流れ関数 $= \phi(y) e^{ik(x-ct)}$ である。

主流は平行流: $\vec{U} = (U(y), 0, 0)$ であり y 方向に 2 の周期をもち、さらに xz 面に対して対称とする：

$$U(y) = U(y+2), \quad U(y) = U(-y) \quad (2.3)$$

したがって Orr-Sommerfeld 方程式は係数が同一周期をもつ。

4 階の線形同次常微分方程式となる。

係数が連続で、同一の周期をもち n 階の線形同次常微分方程式は一次独立な n 個の解を次の形をとることができると

Floquet の定理)

$e^{i\mu\pi y} \chi$ (係数と同周期の関数を係数とする y の多項式)

そのうち、次の形の解が少なくとも1つ存在する。

$e^{i\mu\pi y} \chi$ (係数と同周期の関数)

Orr-Sommerfeld 方程式のこの形の解のうち、 $y \rightarrow \pm\infty$ で

ϕ : 有限 かつ物理的に意味のある解は

$$\phi = e^{i\mu\pi y} F(y) \quad F(y) = F(y+2), \quad \mu: \text{実数} \quad (2.4)$$

の形のものである。 μ : 実数 とおくことにより、境界条件のがかりにすることが出来る。この場合は $0 \leq \mu \leq 1$ の範囲でのみ考えればよい。また、 L, M は次のような性質がある。

$$L(-y) = L(y), \quad M(-y) = M(y) \quad (2.5)$$

したがって、 $\phi(y)$ が固有値 c を持つ解のとき、 $y \rightarrow -y$ としてこの性質を持ち 11 と、 $\phi(-y)$ も同じ固有値を持つ解となり、

$$\begin{aligned} \phi(-y) &= e^{-i\mu\pi y} F(-y) = e^{i(1-\mu)\pi y} [e^{-i\mu\pi y} F(-y)] \\ &= e^{i\mu'\pi y} G(y) \quad (G(y) = G(y+2)) \end{aligned} \quad (2.6)$$

とがけるので、 μ について話をすると、 $0 \leq \mu \leq 1/2$ を考えればよい。そこで μ の各々の値 μ に対し、 ϕ の基本周期 S は次のように対応する。すなわち

$$\mu = 0/1 \quad S = 2$$

$$\mu = 1/3 \quad S = 6$$

$$\mu = 1/2 \quad S = 4$$

$$\mu = 1/4 \quad S = 8$$

$$\mu = 1/5 \quad S=10 \quad \mu = 2/5 \quad S=10$$

⋮

$c = 2''$

$$L\phi = L(e^{i\mu\pi y} F(y)) = e^{i\mu\pi y} L'_\mu F(y)$$

$$M\phi = M(e^{i\mu\pi y} F(y)) = e^{i\mu\pi y} M'_\mu F(y)$$

と仮定する. Orr-Sommerfeld 方程式は

$$L'_\mu F = CM'_\mu F \quad (2.7)$$

$$\left. \begin{aligned} L'_\mu &= -\frac{1}{i k R} \left(\left(\frac{d}{dy} + i\mu\pi \right)^2 - k^2 \right)^2 + U(y) \left(\left(\frac{d}{dy} + i\mu\pi \right)^2 - k^2 \right) - U'(y) \\ M'_\mu &= \left(\frac{d}{dy} + i\mu\pi \right)^2 - k^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

と仮定.

U, F は Fourier 級数で展開できると仮定する.

$$\left. \begin{aligned} F(y) &= \sum_n a_n U_n \quad (U_n = e^{i n \pi y} / \sqrt{2}, (U_n, U_m) = \delta_{nm}) \\ U(y) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n U_n U_n \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

(2.7) に U_n をかけ $0 \leq y \leq 2$ で積分を行なう (Galerkin の方法)

$$\sum_n a_n L'_{mn} = C \sum_n a_n M'_{mn} \quad (2.10)$$

$$\left. \begin{aligned} L'_{mn} &= (U_m, L' U_n) \quad M'_{mn} = (U_m, M' U_n) \\ (f, g) &= \int_0^2 f^*(y) g(y) dy \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

と仮定. 行列の形式:

$$L'_{mn} = (L)_{mn}, \quad M'_{mn} = (M)_{mn}, \quad a_n = (a)_n$$

と仮定して (2.10) は次のようになる.

$$(L - CM) a = 0 \quad (2.12)$$

M の逆行列を左から求めて

$$(M^{-1}U - c) \alpha = 0 \quad (2.13)$$

$$\left. \begin{aligned} (M^{-1}U)_{lm} &= B_{lm} = \frac{1}{i\kappa R} [(\ell+\mu)^2 \pi^2 + k^2] \delta_{lm} \\ &\quad + \frac{1}{2} U_{\ell-m} \frac{[(\mu+\ell)(2m+\mu-\ell) \pi^2 + k^2]}{[(\mu+\ell)^2 \pi^2 + k^2]} \\ B_{\ell\ell} &= \frac{1}{i\kappa R} [(\ell+\mu)^2 \pi^2 + k^2] + \frac{1}{2} U_0 \\ B_{\ell m} (\ell \neq m) &= \frac{1}{2} U_{\ell-m} \frac{[(\mu+\ell)(2m+\mu-\ell) \pi^2 + k^2]}{[(\mu+\ell)^2 \pi^2 + k^2]} \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

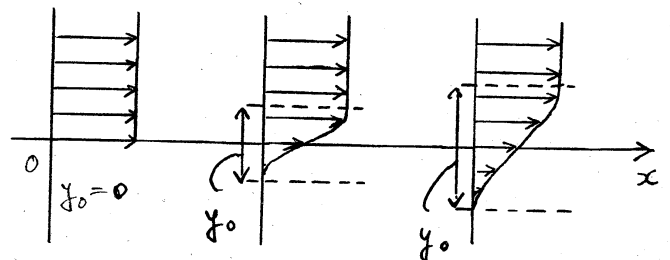
この U は x 依存性が小さいとした。まず一般に平行に広がる自由波 U の x 依存性を議論する。速度 U が $x=0$ で図のように階段関数的に 0 から U_0 まで変化していき、このとき運動方程式の x 成分は近似的に次のようにおける。

$$U_0 \frac{\partial U}{\partial x} = v \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

これは拡散方程式でこれを解けば、 $y=0$ 付近の U の x と y の領域の中 y_0 は次式で評価される。

$$y_0 \propto (v x / U_0)^{1/2}$$

Fig. 2 U の x 依存性の例



したがって y_0 方向の
基本波の周期を d とし
たとき、次の式が満た
される範囲で、 x 依存
性が小さいとみなしてよい。すなわち

$$1 \gg y_0/d \propto (v/d U_0)^{1/2} \cdot (x/d)^{1/2} = [(v/R) \cdot (x/d)]^{1/2}$$

したがって、平板列または円柱列等がある距離 $x_0 \ll R$ を満たす範囲では基本流は x によるものとしてよい。

3. 境界条件の性質

• 安定の十分条件

(2.1) より

$$\int_0^2 (\phi^* L \phi - \phi L^* \phi^*) dy = \int_0^2 (c \phi^* M \phi - c^* \phi M \phi^*) dy \quad (3.1)$$

を得る。

$$\phi^* = (e^{i\mu\pi y} F(y))^* = e^{-i\mu\pi y} F^*(y)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dy^m} \phi &= \frac{d^m}{dy^m} (e^{i\mu\pi y} F(y)) = e^{i\mu\pi y} \left(\frac{d}{dy} + i\mu\pi y \right)^m F(y) \\ &= e^{i\mu\pi y} G(y) \quad (G(y) = G(y+2)) \end{aligned}$$

を用い、部分積分をくりかえすと、Poisson 流等 Q とすると、 $\mu < 0$ のとき、安定の十分条件を μ に依存しない形と得ることが出来る。すなわち

$$R < \min \{ (I_2^2 + 2h^2 I_1^2 + h^4 I_0^2) / I_0 I_1 \}$$

ただし

$$R = \max (|V|)$$

$$I_m^2 = \int_0^2 |d^m \phi / dy^m|^2 dy$$

• 境界条件の比較

ここに固有値問題の代表として、1次元の Schrödinger 方程式を考え、Orr-Sommerfeld 方程式との境界条件の比較を行う。

Navier Stokes 方程式とは Poiseuille 流のように壁に拘束された流れの場合、その境界条件は壁で $u=0$ であり、2次元の場合、流れの関数に対しては $\partial\psi/\partial x = \partial\psi/\partial y = 0$ となる。Orr-Sommerfeld 方程式とはこれに対応し、壁で $\psi = d\psi/dy = 0$ となる。あるいは3次元で関数の値が0という条件は Schrödinger 方程式とは無限の高さの potential の壁における波動関数の条件 $\Psi=0$ に対応させることが出来る。また、伴流、境界層における無限遠での擾乱関数に対する条件としては、擾乱の速度 $=0$ から、無限遠で $\psi = d\psi/dy = 0$ になる。これは Schrödinger 方程式とは束縛された粒子の波動関数が無限遠では $\Psi=0$ となることに対応する。

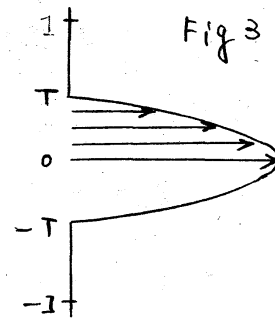
ここで考えた周期的な基本流に対する擾乱の関数は $\psi = e^{ik_0 y} F(y)$ の形で表わされ、これは粒子の中の周期的な potential の中で粒子の波動関数が Bloch の定理、あるいは Floquet の定理により、 $\Psi = e^{ik_0 x} F(x)$ ($F(x)=F(x+y)$) と書かれることに対応する。

4. 計算方法

・主流 $U > 0$

計算は Model として、次直のような厚みの速度分布に対してお

に存在し、周期 2π の壁が動かされて
 いるとき、その壁のすきまを 2π と
 して、速度分布は平行板の内部では
 Poiseuille 流であるので、壁から出る
 とき、しばらくは同じ型をくくると



と仮定した。 T は $0.25, 0.5, 0.75$ と変化させ、計算し、流量
 は 1 に正規化してある。すなわち U_0 の定義として、

$$U_0 = \int_{-l}^l U(y) dy / l$$

ここで l は基本流の周期。この U_0 から Reynolds 数 R は

$$R = U_0 l / \nu = 1/\nu \int_{-l}^l U(y) dy$$

・固有値；固有関数について

F の展開で $F = \sum_{m=-N}^N a_m u_m$ と近似をみると、問題は
 $B_{lm} (-N \leq l, m \leq N)$ の固有値問題に帰着され、 a_m はその
 固有 Vector になる。この行列 B_{lm} の固有値、固有 Vector を数
 値的に計算した。その際 B_{lm} は U_m が $-2N \leq n \leq 2N$ の範
 囲で与えられる。

5. 計算結果

・中立曲線について

角 α の形の基本流についての $\mu = 0/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 2/5$

$\Gamma > 11.2$ の中立曲線は別表のとおりである。

こゝで行つた計算とは、試み Γ 基本流の形すべし $\Gamma > 11.2$ $\mu = 0/1$ 、すなわち基本流と同周期の擾乱が最小の臨界 Reynolds 数を与える。このときの中立曲線は $\mu = 0/1$ と他の μ の場合とは大きくことなり、 Γ 形をしており、二次元の Jet 伴流に対する中立曲線と類似した形状。Reynolds 数の依存性を示して置く。なお、この中立曲線をえがくための計算は $N = 20$ で行なつた。

・固有関数 $\Gamma > 11.2$

Poiseuille 流型で $T = 0.75$, $R = 30$, $h = 1.0$ のとき、 $\mu = 0/1$, $1/2$, $1/3$, $\Gamma > 11.2$ 固有関数が計算した。この T , R , h の値のとき、 $\mu = 0/1$ $\Gamma > 11.2$ は 1 つの固有値が不安定を与え、他の固有値は安定性を与える。 $\mu = 1/2, 1/3$ では中立曲線の近くで安定である。固有値の虚数部の大きい順に $m = 1, 2, \dots$ とし Γ とし、 $m = 1 \sim 5$ $\Gamma > 11.2$ の固有関数は別表のとおりである。この計算は $N = 71$ とし、倍精度で行つた。ただし、 $\phi = e^{i\mu y} \psi(y)$ Γ おいて絶対値の最大値をとると $\gamma = 3$ の値が 1 となるようにして正規化してある。

こゝで計算された範囲では安定なもののほど振動が多くなつていく傾向がみられる。また高次の固有関数はその Fourier 係数を比較すると、 $(2m+1)$, $(2m+1)$ 番目の固有関数 ($m = 0, 1, 2, \dots$)

は $U_{\pm m}$ が最も大きくなる。さらに $F(\eta)$ によりは行波、反材料の値にその固有値が近くなる。

6. 結論

以上の Orr-Sommerfeld 方程式を用いた計算結果では、基本波と同周期をもった流れが全体の流れの中で最も不安定であることが示された。そしてこのえられた臨界 Reynolds 数は実験が行なわれたように $100 \sim 1000$ の order の Reynolds 数に比べ、およそ $1 \sim 10$ の order であり、2 ケタ値が異なる。この実験が行なわれた Reynolds 数で 10 以上で調べたすべての周期で不安定になり、実験が行なわれた結果を説明するためには、このすべての周期の擾乱が微小の擾乱から有限の振幅になったのち、有限振幅の非線形相互作用による影響を調べなければならなうであろうと予想をすることができ、あるいはこのたびに非線形の線形安定性の理論ではなく、まっぴり *Approach* が必要であろう。

Poiseuille 流型の流れのとき、壁のあつさと可きまを交代させたとき、流量一定と考えれば、一般に壁のあつさが可きまに比べ大きいときほど不安定になりやすいことが、計算されたすべての周期の擾乱にっくくみえる。

固有関数に関しては、計算を(1)関数の数が少ないため、
 確定的なものと仮定するが一般に次のようなことが言える。
 ある。すなわち、不安定な擾乱の固有関数ほど振動が少なく、
 安定な増幅率の絶対値が大きいものほど、振動の数が大
 きくなる。これは振動の数が大きいものほど、粘性に
 よって減衰しやすいであろうということから予想される
 ことである。逆にこのことから Fourier 級数で上位の N 項まで
 とって近似の収束がよく、 N を小さくするときでも、ある
 程度の精度まで、固有値、固有関数を与えることの説明にも
 なるであろう。

付記

- $V(y)$ の Fourier 級数展開について

Fourier 級数展開を基本流 $V(y)$ に適用することを考えると、
 Orr-Sommerfeld 方程式で $V(y)$ の 2 階微分が現われる。し
 らも上で考えた Model に用いると、 $V(y)$ の 2 階微分は delta 関
 数的な特異性が現われるので、 $V(y)$ の 2 階微分の Fourier
 展開はある振動をもつ。つまり振動をする。計算は Fourier
 級数を用いて行われるので、この V の 2 階微分の振動の影響
 を考えなければならぬ。

そこで、 $V(y)$ をその N 次の近似内 F_N の総和法で近似する。そのときの固有値、固有関数の変化を調べる。(別表参照)
 $V(y)$ を F_N の総和法で近似するにすると、その 2 階微分はほぼ基本流の 2 階微分と特異点以外で一致。あるいは同様に変化をし、特異点のまわりでも有限の値をとり、十分近似が得られる。しかも F_N の総和法で $V(y)$ の近似に関しては、 $N \rightarrow \infty$ の一様収束が得られる。上記の表から明らかなように Fourier 級数展開によつて与えられた固有値、固有関数は近似の項数 N にあまり依存せず、非常によく収束をしてくれる。 F_N の総和法による計算は $N \rightarrow \infty$ にしたがつて Fourier 級数によつて与えられた固有値、固有関数に十分近づくといえる。したがつて、Fourier 級数によつてあらわされる $V(y)$ の 2 階微分の振動の影響は小さいと考えられ、したがって Fourier 級数展開による近似では項数をそれほど大きくする必要はないと予想される。

・高次の固有値についで

M : 小 α ときの固有値の R 依存性。この依存性も F は基本流の形による依存性は予想どき存したが、高次の固有値は次のような考察から近似的に得るべきとがわかる。

F は級数展開によつて最初の N 項によつて近似できるとする。この近似は高次の mode がすべて他の mode と分離しているときのみ、正しい。もし高次の mode が分離しないならば、

高次の固有値に対する近似表現を得ることが出来る。もし \$n\$ 番目の mode が分離してあれば行列の対角成分のみが \$a_n\$ に対する方程式にのみ入る。すなわち

$$(B_{nn} - c) a_n = 0$$

これは十分大きな \$l\$ に対して

$$B_{ll} \simeq l^2 \pi^2 / i k R$$

$$B_{lm} \ (l \neq m) \simeq \frac{1}{2} U_{l-m} \frac{2^{m-l}}{l} = U_{l-m} \left(\frac{m}{l} - \frac{1}{2} \right)$$

で

$$\begin{aligned} |B_{lm} / B_{ll}| &\simeq U_{l-m} \left(\frac{m}{l} - \frac{1}{2} \right) / l^2 \pi^2 / k R \\ &\simeq k R U_{l-m} m / l^3 \end{aligned}$$

であるが、十分 \$l\$ が大きければ、対角成分のみをのみ考慮すればよいことが示される。このことから、\$2M\$, \$(2M+1)\$ 番目の固有値は \$M\$ が十分大きければ、

$$C_{\substack{2M \\ 2M+1}} \simeq B_{\substack{-M-M \\ (M,M)}} = \frac{1}{2} U_0 + \frac{1}{i k R} [(-M+M)^2 \pi^2 + h^2]$$

で表わされる。(固有値の Graph 参照) またこの式が、明らかである。この \$C_n\$ の近似式は基本波の Fourier 係数としては \$U_0\$ が入らず、波長の正規化により、\$U_0 = 1\$ としておき、高次の固有値は主波の速度分布にはよらないことがわかる。これは計算結果からも示される。

基本流の Fourier 級数展開と Fejer の総和法による得られた固有値の比較. (Poisson 流型, $T=0.75$, $R=30$, $h=1.0$, $\mu=1/3$)

Fourier 級数

Fejer の総和法

N=15	Fourier 級数		Fejer の総和法	
	実数部	虚数部	実数部	虚数部
m=1	0.90254	-0.02808	0.89110	-0.032805
2	0.07661	-0.05903	0.08982	-0.06140
3	0.52197	-0.26782	0.51884	-0.26078
4	0.50423	-1.02777	0.50487	-1.02108
N=25				
m=1	0.90254	-0.02808	0.89559	-0.030956
2	0.07661	-0.05903	0.08464	-0.06047
3	0.52197	-0.26782	0.5200	-0.26354
4	0.50423	-1.02776	0.50464	-1.02363
N=35				
m=1	0.90254	-0.02808	0.89755	-0.03015
2	0.07661	-0.05903	0.08238	-0.06006
3	0.52197	-0.26782	0.52056	-0.26424
4	0.50423	-1.02777	0.50454	-1.02477

計算した固有関数のうち Poisson 流型 $T=0.75$, $R=30$,

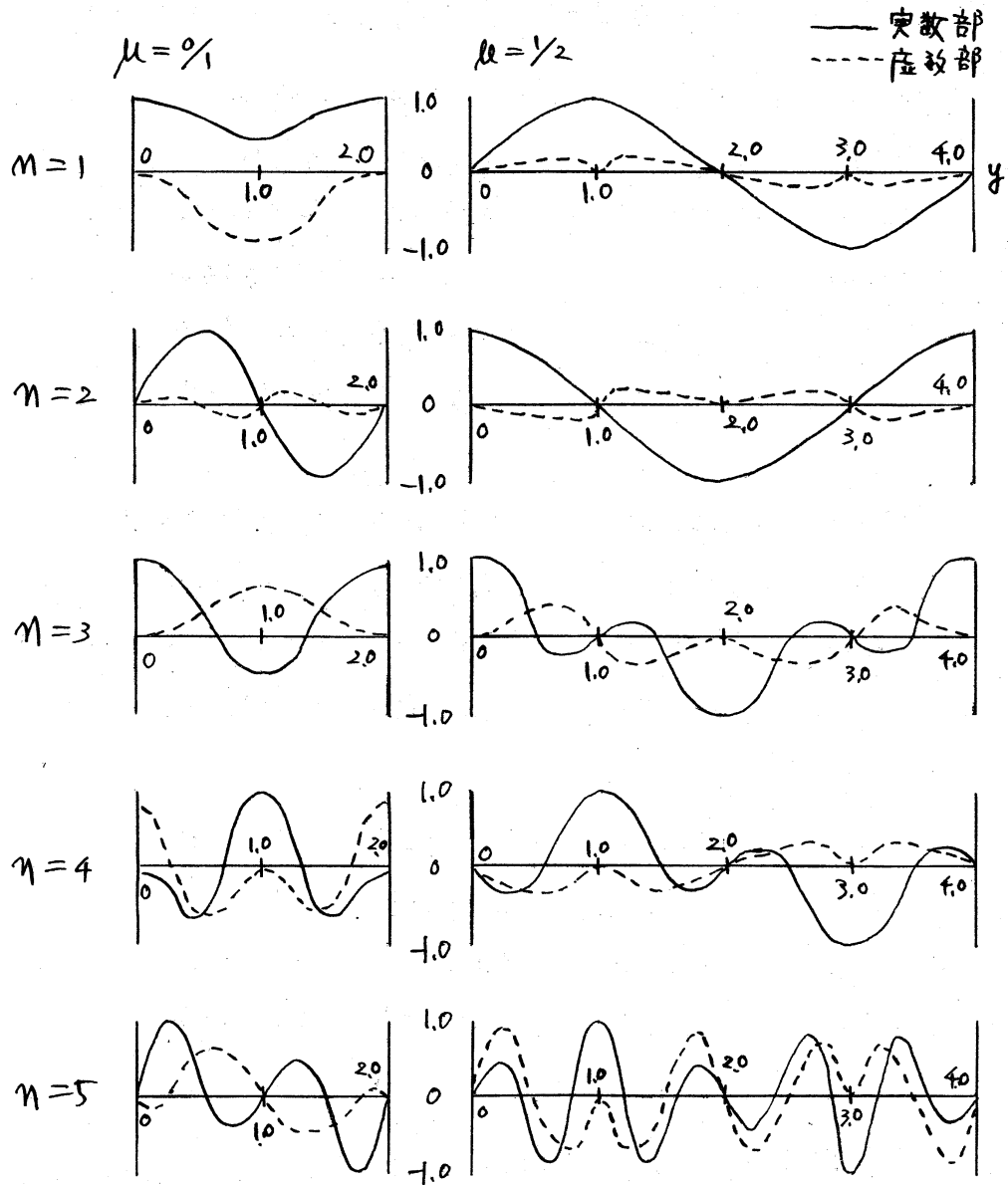
$h=1.0$ のとき $\mu=0/1, 1/2$ に対する固有関数を Graph

に示した. ただし, 固有値の虚数部の大きい順に $m=1, 2,$

... とし, $m=1 \sim 5$ を示した. 近似は $N=35$ で計算を

行った.

Fig. 4

固有関数 (Poiseuille 流型 $T=0.75$ $R_e=30$ $k=1.0$ $\mu=0/1, 1/2$)

次に固有値 c の Reynolds 数による変化と高次の固有値の n 依存性を示す. Reynolds 数による変化のときは $N=20$, 高次の固有値の n 依存性のときは $N=35$ で計算を行った.

Fig. 5

固有値 $C (=C_r + iC_i)$ の Reynolds 数 Re に対する変化の例
 (Poiseuille 流型, $T=0.75$, $\mu=1/3$, $k=1.5$)

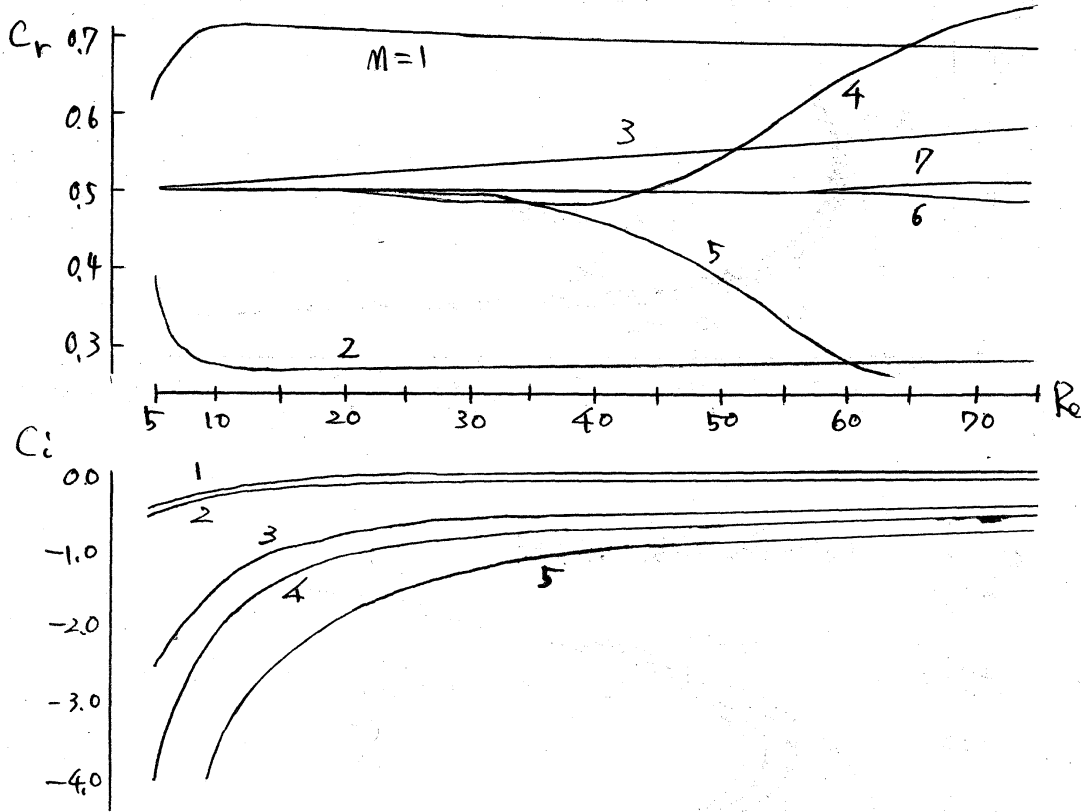


Fig. 6

高次の固有値 $C (=C_r + iC_i)$ の変化の例

(Poiseuille 流型, $T=0.75$, $\mu=1/3$, $k=1.0$, $Re=30$)

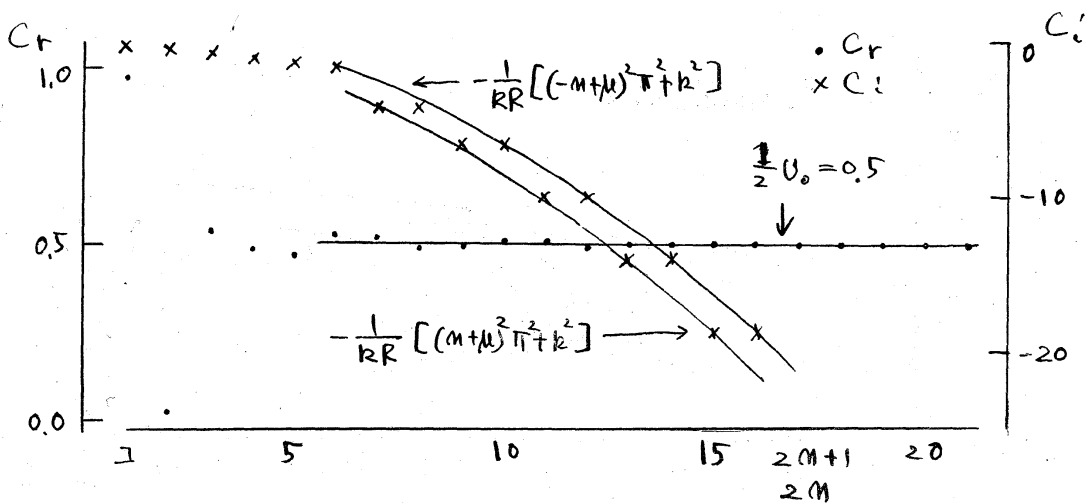
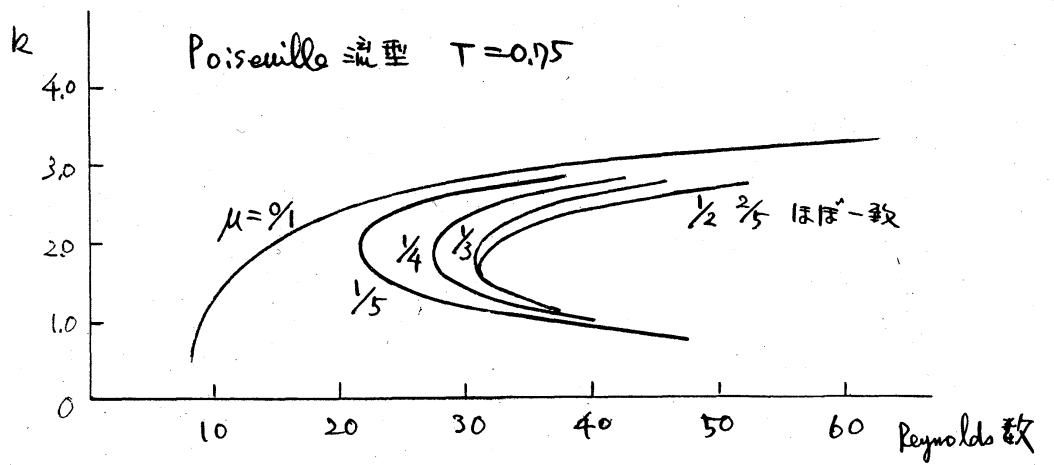
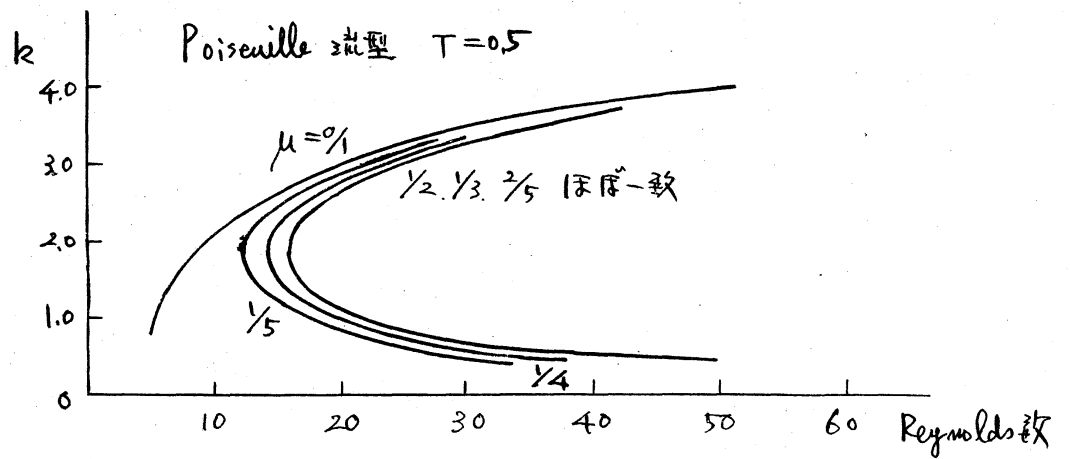
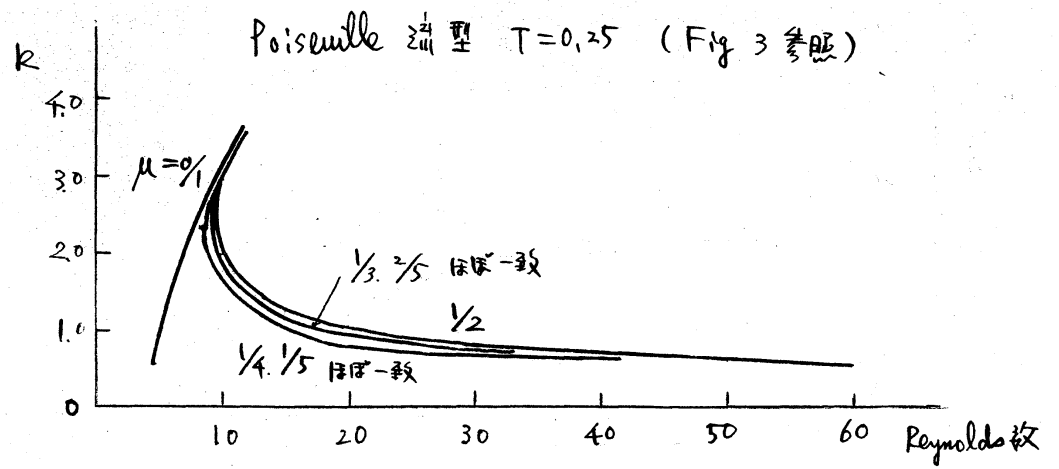


Fig. 7 中立曲線



参考文献

C. C. Lin : The theory of Hydrodynamic stability
(Cambridge University Press)

E. A. Coddington, N. Levinson :
Theory of Ordinary Differential Equations
(McGraw-Hill)

C. Grosch, H. Salven :
J. Fluid Mech. Vol 34 Part 1, 197 (1968)

T. Matsui : 1995 Joint JSME-ASME Applied Mechanics
Western Conference 415