

4次元の Lipsman 予想の解決

東京大学・数理科学研究科 吉野 太郎 (Taro Yoshino)
Graduate School of Mathematical Sciences,
University of Tokyo

概要

Lipsman は彼の論文 ([1]) において, (CI) と固有の同値性に関するある予想をした. これは Lipsman 予想と呼ばれている. 今回の主結果はこの予想が $n = 4$ のときに正しいというものである.

G をリー群, H をその閉部分群とする. Γ を G の離散部分群とすると, Γ は G/H に自然に作用する. このとき

Definition 1. $\Gamma \curvearrowright G/H$ が固有不連続 (properly discontinuous) かつ自由 (free) であるとき $\Gamma \backslash G/H$ を G/H の **Clifford-Klein form** という.

Remark 作用に properly discontinuous かつ free の条件を課しないと, $\Gamma \backslash G/H$ は一般には多様体にならない. 特に H が非コンパクトなとき, $\Gamma \backslash G/H$ は一般には Hausdorff にすらならない.

この話の出発点となる動機は次のようなものである.

問題 1: いつ $\Gamma \backslash G/H$ は Clifford-Klein form になるか?

ここで properly discontinuous と free の定義をしておこう.

Definition 2. M を多様体とし, 離散群 Γ が M に作用しているとする. このとき $\Gamma \curvearrowright M$ が **properly discontinuous** であるとは, M の任意のコンパクト集合 S に対して

$$\Gamma_S := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(S) \cap S \neq \emptyset\}$$

が有限集合であることをいう.

Definition 3. M を多様体とし, 離散群 Γ が M に作用しているとする. このとき $\Gamma \curvearrowright M$ が **free** であるとは, M の任意の元 x に対して

$$\gamma(x) = x \Rightarrow \gamma = id$$

が成り立つことをいう. これは $\Gamma_{\{x\}} = \{id\}$ と言い替えることもできる.

ここで, いくつかの例を見てみよう.

Example 1. H がコンパクトのとき

$$\Gamma \text{ が torsion free} \Rightarrow \Gamma \backslash G/H \text{ は Clifford-Klein form}$$

が成り立つ.

Example 2. (1962: Calabi-Murkus 現象) $G = SO(n, 1), H = SO(n-1, 1)$ のとき

$$\Gamma \backslash G/H \text{ が Clifford-Klein form} \Rightarrow \Gamma \text{ は有限群}$$

が成り立つ.

Example 3. (1964: Auslander 予想) $G = GL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n, H = GL(n, \mathbb{R})$ のとき

$$\Gamma \backslash G/H \text{ が compact な Clifford-Klein form} \stackrel{?}{\Rightarrow} \Gamma \text{ は virtually finite}$$

が成り立つか?

Remark Auslander 予想は compact の仮定がないと反例が存在する. また $n \leq 6$ に対しては正しいことが Abels, Margulis, Soifer らによって証明されている (1997).

Clifford-Klein form か否かの判定において free の判定は比較的容易である. 一方 properly discontinuous は (定義は簡単だが) 判定は難しい. その難しさの一つは Γ という離散群を扱うことに起因する. そこで, 次のようなアイデアによってその難しさを回避することになろう.

Fact 4. (1989; Kobayashi) L を G の閉部分群とし Γ を cocompact に含むものとする (つまり $\Gamma \subset L$ であり, L/Γ が compact). このとき

$$L \curvearrowright G/H \text{ が proper} \Leftrightarrow \Gamma \curvearrowright G/H \text{ が properly discontinuous}$$

となる.

Definition 5. (1961; Palais) $L \curvearrowright M$ が 固有 (proper) であるとは, M の任意のコンパクト集合 S に対して

$$L_S := \{\ell \in L \mid \ell(S) \cap S \neq \emptyset\}$$

がコンパクトであることをいう.

Remark コンパクトかつ離散な集合は有限集合であるから, 離散群にのみ定義された properly discontinuous という概念を一般の群に自然に拡張したものが proper であると言える.

Remark M が特に等質空間 G/H のとき, $L \curvearrowright G/H$ が proper であることは,

G の任意のコンパクト集合 S に対し, $L \cap SHS^{-1}$ がコンパクト

と同値である. これを (L, G, H) が **proper** であるという.

Fact 4 により, 離散群 Γ ではなく, それを cocompact に含む連結な群 L を扱えばよいことが分かる. 従って最初に掲げた問題は, 次のような, もう少し簡単な問題へと降りてくる.

問題 2: 　　いつ (L, G, H) は proper になるか?

これについて既に知られている例を挙げてみよう.

Example 4. (1989; Kobayashi) G を reductive リー群, L, H を G の reductive な部分群としたとき

$$(L, G, H) \text{ が (CI) } \Leftrightarrow (L, G, H) \text{ が proper}$$

である.

ここで, (CI) は次のように定義される.

Definition 6. (1992; Kobayashi) G をリー群, L, H をその閉部分群としたとき, (L, G, H) が **(CI)** であるとは

G の任意の元 g に対して $L \cap gHg^{-1}$ がコンパクト

であることをいう.

Remark (CI) の定義は proper の定義において S を一点からなるコンパクト集合 $\{g\}$ としたものに他ならない. 従って「proper $\Rightarrow$ (CI)」は常に成り立つ.

Example 5. (2001; Nasrin) G を単連結かつ連結な 2-step 巾ゼロリー群とし, L, H を G の連結閉部分群としたとき

$$(CI) \Leftrightarrow \text{proper} \quad \text{for } (L, G, H)$$

である.

Example 6. (1992; Kobayashi) $G = GL(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$, $H = GL(2, \mathbb{R})$ とし, L を G の閉部分群としたとき,

$$(CI) \Leftrightarrow \text{proper} \quad \text{for } (L, G, H)$$

である.

Auslander 予想 (Example 3) は, $G = GL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$, $H = GL(n, \mathbb{R})$ のとき $\Gamma \backslash G/H$ が (compact な) Clifford-Klein form になる条件を調べる, という問題であった. そして Example 6 は, その”連続版”の判定条件を $n = 2$ のときに与えたと言うことができる. この結果を拡張し, 一般の n に対して次のように予想するのは自然なことである.

$H = GL(n, \mathbb{R})$, $G = H \ltimes \mathbb{R}^n$, $L \subset G$ に対して 「(CI) $\Leftrightarrow$ proper」 か?

Lipsman はこの命題にさらに「 L が代数的である」という条件を加えると, 次の命題と同値になることを証明した ([1]).

Example 7. (1995; Lipsman 予想) N を n 次元上三角行列全体 $N(n)$ とし, $G = N \ltimes \mathbb{R}^n$ とする. L を G の連結閉部分群とすると,

$$(CI) \Leftrightarrow \text{proper} \quad \text{for } (L, G, H)$$

となるか?

一般に 「(CI) $\Leftarrow$ proper」 は自明であるから, Lipsman 予想においては 「(CI) $\Rightarrow$ proper」の部分が重要である. この予想は, $n = 2$ のときは Example 6 から簡単な議論により分かる. $n = 3$ のときは Lipsman によって証明された ([1]). $n = 4$ のときに成り立つというのが今回の結果である.

proper という条件が (CI) という条件に帰着されることで, どれくらい判定が簡単になるのかを見るために例を挙げよう.

Example 8. $N = N(3)$, $G = N \ltimes \mathbb{R}^3$ として $X, Y \in \mathfrak{g}$ を次のように定める.

$$X = \left(\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & a \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad Y = \left(\begin{pmatrix} 0 & & b \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

ただし, ここで a, b は実数である. このとき $[X, Y] = 0$ である. さらに,

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_{a,b} := \{\exp(nX + mY) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}, \\ L &= L_{a,b} := \{\exp(pX + qY) \mid p, q \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

とおくと, 次のような同値関係が成り立つ.

$$\begin{aligned}
 \Gamma \backslash G/H \text{ が Clifford-Klein form になる} &\Leftrightarrow \Gamma \curvearrowright G/H \text{ が properly discontinuous} \\
 &\Leftrightarrow L \curvearrowright G/H \text{ が proper} \\
 &\Leftrightarrow (L, G, H) \text{ が proper} \\
 &\Leftrightarrow (L, G, H) \text{ が (CI)} \\
 &\Leftrightarrow ab < 0
 \end{aligned}$$

$n = 4$ のときの Lipsman 予想の証明には次の3つの補題が使われる.

補題 1 は, ある "primitive" な L について示せば十分である事を主張する.

補題 2 は, (CI) のリー環での表現を与える.

補題 3 は, proper のリー環での表現を与える.

これらの補題は全て一般の n について証明されている. さらに $n = 4$ のときは "primitive" かつ (CI) なものは3通りに場合分けされ, それらは全て proper であることが示される. 最後に primitive の定義と, 補題 2, 3 のステートメントを述べて終わりにしよう.

Definition 7. $G(:= N \ltimes \mathbb{R}^n)$ の連結閉部分群 L が primitive であるとは, $\mathfrak{l}$ を L のリー環としたとき,

$$\text{任意の } (X, a) \in \mathfrak{l} \text{ に対し } a \in I_{\mathfrak{l}}$$

が成り立つことをいう. ただし, ここで $I_{\mathfrak{l}}$ は

$$I_{\mathfrak{l}} := \text{Span}_{\mathbb{R}} \bigcup_{(X, a) \in \mathfrak{l}} \text{Image}(X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$$

で定まる $\mathbb{R}^n$ の部分空間である.

Lemma 2. $\mathfrak{l}$ を L のリー環としたとき次は同値.

- (i) (L, G, N) は (CI)
- (ii) $\mathbb{R}^n$ の部分空間 $V_{\mathfrak{l}}$ と線型写像 $\Phi : V_{\mathfrak{l}} \rightarrow \mathfrak{n}$ が存在して

$$\mathfrak{l} = \{(\Phi(a), a) \mid a \in V_{\mathfrak{l}}\}$$

とかける. さらに任意の $a \in V_{\mathfrak{l}} \setminus 0$ に対して

$$a \notin \text{Image}(\Phi(a))$$

となる.

Lemma 3. $\mathfrak{l}$ を L のリー環とし, (L, G, N) が (CI) であったとする. さらに $\mathbb{R}^n$ の任意のコンパクト集合 S に対し $V_{(S)}$ がコンパクトならば (L, G, N) は固有である.

ここで, $V_{(S)}$ は

$$\begin{aligned} V_{(S)} &:= \bigcup_{s_1, s_2 \in S} V_{(s_1, s_2)} \\ V_{(s_1, s_2)} &:= \{v \in V_{\mathfrak{l}} \mid s_1 + e_1(\Phi(v))v + e_0(\Phi(v))s_2 = 0\} \\ e_0(X) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = \exp(X) \\ e_1(X) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{(k+1)!} \end{aligned}$$

で定義される. ただし, $V_{\mathfrak{l}}, \Phi$ は Lemma 2 によって定められたものとする.

参考文献

- [1] LIPSMAN, R., *Proper actions and a compactness condition*, J. Lie Theory. **5** (1995), 25-39.
- [2] KOBAYASHI, T., *Discontinuous groups acting on homogeneous spaces of reductive type*, Proceedings of the Conference on Representation Theory of Lie Groups and Lie Algebras held in 1990 August-September at Fuji- Kawaguchiko (ICM-90 Satellite Conference) (1992), World Scientific, Singapore/ New Jersey/London, 59-75.
- [3] T.Kobayashi, H. Alikawa and S.Nasrin, Proper actions of $\mathbb{R}^k$ on a $(k+1)$ -dimensional nilpotent homogeneous manifold (in preparation).
- [4] Nasrin, Salma, Criterion of proper actions for 2-step nilpotent Lie groups, Tokyo J. Math. **24** (2001), 535-543.
- [5] Kobayashi, Toshiyuki, Proper action on a homogeneous space of reductive type, Math. Ann. **285** (1989), 249-263.