

New approach to e-entropy and Its comparison with Kolmogorov's e-entropy

東京理科大学 理工学部 井上 啓
東京理科大学 理工学部 松岡隆志
東京理科大学 理工学部 大矢雅則

1. まえがき

近年、部分同士の相関や部分と全体の関係を考慮して、複雑な現象を解明しようとする複雑系に関する試みが盛んに行われている。従来は、複雑な現象を解明するために、非常に簡単な部分にわけて、その部分を解析するによって全体の複雑な現象を解明しようとしていた。この方法は、還元的方法とよばれるもので、部分を解析して得られた結果を全体の結果として適用できるという考え方である。しかし、実際の自然現象は、そのような理想化されたものではないことから、部分同士の相関や、部分と全体の関係を考慮する必要がでてきた。最近、盛んに行われているカオスやフラクタルの研究はこの複雑系の部類に入っている。

カオスは、微分方程式(差分方程式)の解などの予測の難しい複雑な挙動として知られており、エントロピー、リアプノフ指数、分岐構造、エルゴード理論などの視点から研究されている[1,2,5,24]。しかしながら、これらの概念は各分野で個別に扱われており、様々なカオスの定義や相関が必ずしも明確になっていない。こうした状況のなか、著者の一人はさまざまな複雑さを統一的に扱うために、複雑さと状態変化の融合である情報力学を提唱した[19,22,7,11]。カオス尺度は、この情報力学の2つの複雑さから定義される力学系のカオス度合いを測るものであり、これまでにカオスを示す代表的な写像であるロジスティック写像やパイコね変換に対して適用され、リアプノフ指数の不都合な点を解消し、さらに計算が容易であることが示されている[23,8,21]。

一方、フラクタルに関する研究は、Mandelbrotが自然現象の複雑さを目に見える形の複雑さとして評価するフラクタル幾何学を提唱したことに由来する[15]。フラクタル幾何学の特徴は、自己相似性という簡単な基本図形の繰り返しによって、複雑な形を構成できるという性質を利用している点であり、その複雑さはフラクタル次元によって表現される。フラクタル次元は、一般に非整数値を取るもので、ユークリッド次元では区別できない形の複雑さを評価することが出来る。Ohyaは、この幾何学図形のフラクタル次元を幾何学図形だけでなく、確率分布や量子系の密度行列で表される状態の複雑さを調べる指標として使うために、このフラクタル次元を一般(C*系)の状態に拡張し、状態のフラクタル次元を定めた[18,11]。

本稿では、Gauss分布として与えられる状態に対して、状態のフラクタル次元による特徴付けを行う。

2. 幾何学図形のフラクタル次元

この節では、幾何学図形のフラクタル次元のうち、尺度次元と容量次元について説明する。

2. 1 尺度次元(Scaling次元)

ある基本図形より作られた対象（複雑な図形）が非常に粗い尺度（これを"1"とする）で見たとき、その基本図形の個数を $N(1)$ とし、尺度 r で見たときの基本図形の個数を $N(r)$ で表す。このとき、

$$d_s = \log \frac{N(r)}{N(1)} / \log \frac{1}{r}$$

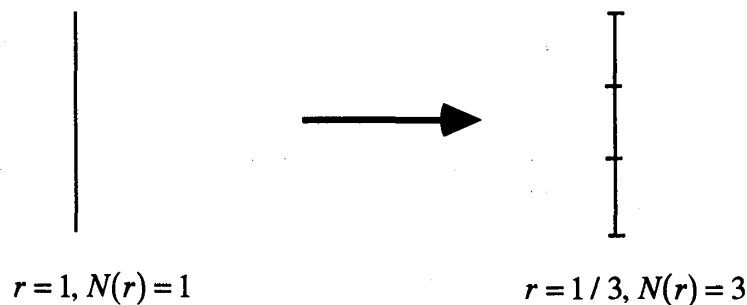
を尺度次元(Scaling次元)という[15]。いろいろと実験を行うと、

$$N(r) \cong r^{-d} N(1)$$

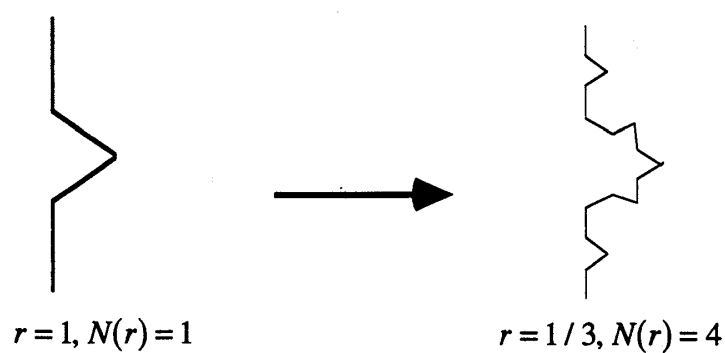
という関係式が出てくる場合が経験的に多いことによる[4]。

以下では、尺度次元の具体的な計算例を紹介する。

（例2. 1：直線とコッホ曲線の尺度次元）

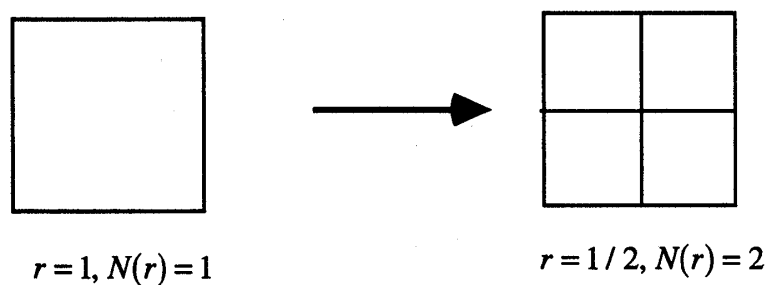


$$d_s = \log \frac{3}{1} / \log \left(1 / \frac{1}{3} \right) = \log 3 / \log 3 = 1$$

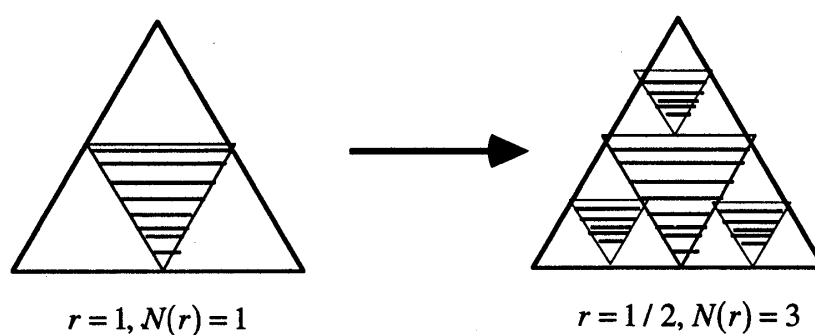


$$d_s = \log \frac{4}{1} / \log \left(1 / \frac{1}{3} \right) = \log 4 / \log 3$$

(例 2. 2 : 正方形とシルピンスキーのガスケットの尺度次元)



$$d_s = \log \frac{4}{1} / \log \left(1 / \frac{1}{2} \right) = \log 4 / \log 2 = 2$$



$$d_s = \log \frac{3}{1} / \log \left(1 / \frac{1}{2} \right) = \log 3 / \log 2$$

上記の例を見てわかるように、幾何学図形のフラクタル次元は非整数値を取ることから、幾何学図形のフラクタル次元を用いれば、ユークリッド次元ではわからない、「見た目の形の複雑さの違い」を定量的に測ることができる。

この尺度次元において、図形を集合に拡張した定義になっているのが、以下の容量次元である。

2. 2 容量次元(Capacity次元)

ある集合 $X(\subset \mathbf{R}^d)$ を直径が ε の凸集合 (立方体, 球など) で被覆するのに必要なその凸集合の最小の個数を $N(\varepsilon)$ とする。このとき,

$$d_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$$

を容量次元(Capacity次元)という[15]。

上記の例に対して、この容量次元を用いても、尺度次元と同様の結果が得られる。

この容量次元の分子にある $\log N(\varepsilon)$ は距離空間上の ε エントロピー[12]と呼ばれる量であることから、容量次元は、 ε エントロピーを用いて定義される量であることがわかる。そこで、Ohyaは、一般の状態(C*系の状態)に ε エントロピーを定義できれば、「一般の状態に対するフラクタル次元」が定義できると考え、状態のフラクタル次元を定義した[18]。次の節では、状態が連続的な確率分布で表される古典連続系の状態のフラクタル次元の定義について説明する。

3. 古典連続系の状態の ε エントロピーとフラクタル次元

古典連続系の状態の ε エントロピーは、Kolmogorovの確率変数の ε エントロピーを用いて定義される。そこで、このKolmogorovの確率変数について、簡単に振り返る。

3. 1 Kolmogorovの確率変数の ε -エントロピー

Kolmogorovの確率変数の ε -エントロピーは相互エントロピーによって定義されるので、まず始めに、古典連続系の相互エントロピーについて説明する。

[定義3. 1] 相互エントロピー $I(f, g)$ [6, 10]

$(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ を確率空間, f, g を Ω 上で定義され X, Y 上に値を取る確率変数とする。 f, g によって導かれた確率分布を $\mu_f = \mu \circ f^{-1}, \mu_g = \mu \circ g^{-1}$, μ_f と μ_g の直積分布及び同時確率分布を $\mu_f \otimes \mu_g$ 及び μ_{fg} とおく。このとき、確率変数 f と g の相互エントロピー $I(f, g)$ は

$$I(f, g) = S(\mu_{fg}, \mu_f \otimes \mu_g) \\ = \begin{cases} \int_{X \times Y} \frac{d\mu_{fg}}{d\mu_f \otimes \mu_g} \log \frac{d\mu_{fg}}{d\mu_f \otimes \mu_g} d\mu_{fg} & (\mu_{fg} \ll \mu_f \otimes \mu_g) \\ \infty & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

で与えられる。ただし、 $S(\mu_{fg}, \mu_f \otimes \mu_g)$ は μ_{fg} と $\mu_f \otimes \mu_g$ の相対エントロピー [17], $\mu_{fg} \ll \mu_f \otimes \mu_g$ は μ_{fg} が $\mu_f \otimes \mu_g$ に関して絶対連続であることを意味し、 $\frac{d\mu_{fg}}{d\mu_f \otimes \mu_g}$ は $\mu_f \otimes \mu_g$ に対する μ_{fg} のRadon-Nikodym微分を表す。

この相互エントロピーは、確率変数 f と g （または確率分布 μ_f と μ_g ）の共有している情報量を表す。この相互エントロピーを使うと、確率変数 f のエントロピー $S(f)$ が以下のように定義できる。

$$S(f) = I(f, f) \quad (3.1)$$

いくつかの文献には、確率密度関数 $p(f)$ をもつ確率変数 $f = (f_1, \dots, f_d)$ のエントロピーとして、微分エントロピー $h(f)$

$$h(f) = - \int_{\mathbf{R}^d} \dots \int p(x_1, \dots, x_d) \log p(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d$$

を確率変数 f のエントロピーとして定義しているものもあるが、微分エントロピー $h(f)$ は、一般に負の値を取るため、情報量としては都合がよいことを明記しておく。

(3.1)式のエントロピー $S(f)$ は、負の値を取らないものの、多くの場合、 $+\infty$ の値を取ることが知られている。そこで、Kolmogorovはある極限として(3.1)式に一致する量を定義した。これが、以下の確率変数の ε エントロピーである。

[定義3. 2] 確率変数の ε エントロピー[13]

$(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ を確率空間、 $M(\Omega)$ を Ω 上で定義され、距離空間 (X, d) 上に値を取る確率変数とする。このとき、確率変数 $f \in M(\Omega)$ の ε エントロピー

$$S_K(f; \varepsilon) = \inf_g \{I(f, g); g \in M_d(f; \varepsilon)\}$$

で定義される。ただし、

$$M_d(f; \varepsilon) = \left\{ g \in M(\Omega); \sqrt{\int_{X \times X} d(x, y)^2 d\mu_{fg}(x, y)} \leq \varepsilon \right\}$$

である。

確率変数の ε エントロピーは、確率変数 f から距離が ε 離れた場所に少なくとも伝えられる確率変数 f の情報量を意味しており、(i) $0 \leq S_K(f; \varepsilon) < +\infty$

(ii) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_\kappa(f; \varepsilon) = S(f)$ の性質を満たす.

4. 古典(連続)系における状態の ε -エントロピーとフラクタル次元

この節では、状態(i.e. 確率測度)をベースとした古典系でのより一般的な ε -エントロピー定式化と状態のフラクタル次元の定義について述べる. この定義は、確率変数として記述できない事柄に対してでも、計算することが可能である. まず、状態をベースとした相互エントロピーの定義から説明する.

情報理論において、確率測度や量子状態として記述される入力状態は、チャネル(通信路) Λ^* を通して伝達され、別の状態として出力される. このチャネル Λ^* は、物理的には、電話線や光ファイバーであり、数学的には、入力空間から出力空間への写像である.

状態が確率測度で表される古典系のチャネルの定義は以下の通りである.

[定義4. 1] 古典(連続)系のチャネル

$(\Omega_1, \mathfrak{F})$ を入力空間(可測空間), $(\Omega_2, \mathfrak{F})$ を出力空間とし, $P(\Omega_k)$ を $(\Omega_k, \mathfrak{F})$ ($k=1,2$) 上の全ての確率測度とする. このとき, $P(\Omega_1)$ から $P(\Omega_2)$ への写像 Λ^* をチャネル(Markov Kernel) という:

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(Q) &= \Lambda^* \mu(Q) \\ &= \int_{\Omega_1} \lambda(\omega, Q) d\mu(\omega), \quad \mu \in P(\Omega_1)\end{aligned}$$

ただし, λ は, 次のような条件をみたす $\Omega_1 \times \mathfrak{F}$ から $[0,1]$ への写像である.

- (1) 任意の $\omega \in \Omega_1$ に対して, $\lambda(\omega, \bullet) \in P(\Omega_2)$
- (2) 任意の $Q \in \mathfrak{F}$ に対して, $\lambda(\bullet, Q)$ は Ω_1 上の可測関数

このとき, μ と $\bar{\mu}$ の合成状態 Φ は

$$\Phi(Q_1, Q_2) = \int_{\Omega_1} \lambda(\omega, Q_2) d\mu(\omega)$$

で与えられる. これらを用いて, 相互エントロピーが以下のように定義される.

[定義4. 2] 相互エントロピー

$(\Omega_1, \mathfrak{F})$ を入力空間, $(\Omega_2, \mathfrak{F})$ を出力空間とし, $P(\Omega_k)$ を $(\Omega_k, \mathfrak{F})$ ($k=1,2$) 上の全ての確率測度, Λ^* を $P(\Omega_1)$ から $P(\Omega_2)$ へのチャネルとする. このとき, μ と $\bar{\mu} = \Lambda^* \mu$ の合成状態と直積状態を Φ , $\Phi_0 = \mu \otimes \bar{\mu}$ とすれば, μ と Λ^* に関する相互エントロピー $I(\mu; \Lambda^*)$ は

$$I(\mu; \Lambda^*) (= I(\mu, \bar{\mu})) = S(\Phi, \Phi_0) \\ = \begin{cases} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \frac{d\Phi}{d\Phi_0} \log \frac{d\Phi}{d\Phi_0} d\Phi_0 & (\Phi \ll \Phi_0) \\ \infty & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

で定義される。ただし、 $S(\Phi, \Phi_0)$ は Φ と Φ_0 の相対エントロピー[17]、 $\Phi \ll \Phi_0$ は Φ が Φ_0 に関して絶対連続であることを意味し、 $\frac{d\mu_{f_g}}{d\mu_f \otimes \mu_g}$ は $\mu_f \otimes \mu_g$ に対する μ_{f_g} のRadon-Nikodym微分を表す。

すなわち、 $I(\mu; \Lambda^*)$ は、確率測度 μ がチャネル Λ^* を通して $\Lambda^*\mu$ に変化するとき、確率測度 μ のもつ情報量のどれだけが、チャネル Λ^* を通して伝えられるかを表す量と考えられる。(量子系の相互エントロピーの定義については、[20]を参照)

このとき、古典(連続)系の状態の ε エントロピーは、上記の相互エントロピーを用いて、以下で定義される。

[定義4. 2] 古典(連続)系の状態の ε エントロピー (チャネル表現)

定義4. 3において、 $(\Omega_1, \mathfrak{F}) = (\Omega_2, \mathfrak{F}) = (\Omega, \mathfrak{F})$ とする。このとき、 $\mu \in P(\Omega)$ の状態の ε エントロピー $S_o(\mu; f)$ は

$$S_o(\mu; \mu) \equiv \inf_{\Lambda^*} \{ J(\mu; \Lambda^*); d(\mu, \Lambda^*\mu) \leq \varepsilon \}$$

ただし、 $d(\mu, \Lambda^*\mu)$ は μ と $\Lambda^*\mu$ の距離であり、

$$J(\mu; \Lambda^*) = \sup_{\Gamma^*} \{ I(\mu; \Lambda^*); \Gamma^*\mu = \Lambda^*\mu \}$$

である。ここで、 $J(\mu; \Lambda^*)$ は μ と Λ^* に関する極大相互エントロピーと呼ばれるものである。

確率変数をベースにする場合は測度空間を固定して考えるため、極大相互エントロピーのような概念は必要とならないが、状態をベースとしたこの定義では、測度自体が固定されていないため、入力状態 μ から出力状態 $\bar{\mu} (= \Lambda^*\mu)$ へと写すチャネルは一つとは限らなくなる。そこで、入力状態 μ の持つ情報量を最も効率よく伝えるチャネルを用いて状態の ε エントロピーを定義したのである。

入力状態 μ と出力状態 $\bar{\mu}$ の合成状態 Φ が直積状態 Φ_0 に関して全て絶対連続であるとき、上記の ε エントロピーを次のように書き直すことができる。

[定義4. 3] 古典(連続)系の状態の ε エントロピー [9]

$$S_o(\mu; \mu) \equiv \inf_{\Lambda} \{J(\mu, \bar{\mu}); d(\mu, \bar{\mu}) \leq \varepsilon\}$$

ただし, $d(\mu, \bar{\mu})$ は μ と $\bar{\mu}$ の距離であり,

$$J(\mu, \bar{\mu}) = \sup_{\Gamma} \{I(\mu, \bar{\mu}; \Phi); \Phi \ll \Phi_0\}$$

ここで, 状態の ε エントロピーを上記の様に書き換えることが出来るのは, $\Phi \ll \Phi_0$ であるとき, チャンネル Λ^* と合成測度 Φ は, 1対1に対応することによる.

この状態の ε エントロピーを用いて古典(連続)系の状態のフラクタル次元が次のように定義される.

[定義4. 4] 古典(連続)系の状態のフラクタル次元[9]

$$d_c^o(\mu) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S_o(\mu; \varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$$

5. ヒルベルト空間上のGauss測度とGaussain チャンネル

この節では, Hilbert空間上のGauss測度に状態の ε -エントロピーとフラクタル次元を適用するために, まず, ヒルベルト空間上のGauss測度とGaussain チャンネルについて説明する[3,27].

$\mathfrak{B}$ を実可分なヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上のボレル σ -集合体, μ を以下のような条件を満足する $\mathfrak{B}$ 上のボレル確率測度とする.

$$\int_{\mathcal{H}} \|x\| d\mu(x) < +\infty$$

さらに, $T(\mathcal{H})_+ (\equiv \{R \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}); R \geq 0, R = R^*, TrR < +\infty\})$ を $\mathcal{H}$ 上の全ての有界で自己共役な正作用素の集合とする. そのとき, μ の平均ベクトル $m_\mu \in \mathcal{H}$ と共分散作用素

$R_\mu \in T(\mathcal{H})_+$ が存在して, 任意の $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ に対して, m_μ と R_μ が

$$\begin{aligned} \langle x_1, m_\mu \rangle &= \int_{\mathcal{H}} \langle x_1, y \rangle d\mu(y) \\ \langle x_1, R_\mu x_2 \rangle &= \int_{\mathcal{H}} \langle x_1, y - m_\mu \rangle \langle y - m_\mu, x_2 \rangle d\mu(y) \end{aligned}$$

で定義される. このとき, ボレル確率測度 μ がGauss測度であるとは, 以下の条件を満たすことである.

[定義5. 1] (Gauss測度 μ)[3]

任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して, 実数値 m_x と $\sigma_x (> 0)$ が存在して

$$\mu(\{y \in \mathcal{H}; \langle y, x \rangle \leq a\}) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left\{-\frac{(t-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\} dt$$

Gauss測度 μ と (m_μ, R_μ) は, 1対1に対応することが知られており, 平均ベクトル m と共分散作用素 R をもった $\mathcal{H}$ 上の Gauss測度 μ は, $\mu = [m, R]$ と記述される.

次に, Gaussianチャネルについて説明する.

[定義5. 2] (Gaussianチャネル)[3]

$(\mathcal{H}_1, \mathfrak{B}_1)$ を入力空間, $(\mathcal{H}_2, \mathfrak{B}_2)$ を出力空間とし, $P_G^{(k)}$ を $(\mathcal{H}_k, \mathfrak{B}_k)$ ($k=1,2$) 上の全ての Gauss測度とする. 簡単のため, $(\mathcal{H}_1, \mathfrak{B}_1) = (\mathcal{H}_2, \mathfrak{B}_2) = (\mathcal{H}, \mathfrak{B})$ の場合を考え $\mu \in P(\mathcal{H})$ を入力空間上の Gauss測度, $\mu_0 \in P(\mathcal{H})$ をチャネルの雑音を示している Gauss測度とする. そのとき, $P(\mathcal{H})$ から $P(\mathcal{H})$ への Gaussチャネル Λ^* は, 次のような写像 $\lambda: \mathcal{H} \times \mathfrak{B} \rightarrow [0,1]$ によって

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(Q) &= \Lambda^* \mu(Q) \equiv \int_{\mathcal{H}} \lambda(x, Q) d\mu(x) \\ \lambda(x, Q) &\equiv \mu_0(Q^x) \\ Q^x &\equiv \{y \in \mathcal{H}; Ax + y \in Q\}, x \in \mathcal{H}, Q \in \mathfrak{B}, \end{aligned}$$

で定義される. ただし, A は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への線形変換であり λ は, 以下の条件を満足する.

- (1) 任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して, $\lambda(x, \bullet) \in P(\mathcal{H})$.
- (2) 任意の $Q \in \mathfrak{B}$ に対して, $\lambda(\bullet, Q)$ は, $(\mathcal{H}, \mathfrak{B})$ 上の可測関数.

この Gaussianチャネルは, Gauss測度として入力された状態に, Gauss型の雑音を加わり, 出力されるような線形的な通信路である. このとき, 入力測度 μ と出力測度 $\bar{\mu}$ の合成測度 Φ は, 以下で与えられる.

$$\Phi(Q_1 \times Q_2) = \int_{Q_1} \lambda(x, Q_2) d\mu(x), \quad Q_1, Q_2 \in \mathfrak{B}$$

特に, $\mu = [0, R] \in P(\mathcal{H})$, $\mu_0 = [0, R_0] \in P(\mathcal{H})$ とすれば, そのとき, 出力測度 $\Lambda^* \mu = \bar{\mu}$ は,

$$\Lambda^* \mu = [0, ARA^* + R_0]$$

と表すことが出来る。また、 μ と $\Lambda^*\mu$ に関する相互エントロピー(情報量)は、次のようになる[3,27].

$$I(\mu; \Lambda^*) = \frac{1}{2} \log \frac{|AR^*A + R_0|}{|R_0|}$$

ただし、 $|AR^*A + R_0|$, $|R_0|$ は、 $AR^*A + R_0$, R_0 の行列式である。

6. 確率変数の距離における Gauss 測度の ε -エントロピーとフラクタル次元

この節では、 $\mathcal{H} = \mathbf{R}^n$ で μ_f と μ_g の距離 $d(\mu_f, \mu_g)$ が

$$d(\mu_f, \mu_g) = \sqrt{\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} d(f, g)^2 \mu_{fg}}$$

で与えられる場合を考える。Gauss 測度は平均 0 で、チャネルは、Gaussian チャネルで、入力状態 $\mu_f = [0, R]$ は、 n -次元確率変数 $f = (f_1, \dots, f_n)$ から導かれた測度で、その出力状態 $\Lambda^*\mu_f$ が μ_g の場合を考える。ただし、 g は、 Λ^* から導かれた確率変数 $g = (g_1, \dots, g_n)$ である。このとき、入力状態 μ_f に対して、 $\Lambda^*\mu_f = \mu_g$ となるチャネル Λ^* は唯一つだから、 $J(\mu_f; \Lambda^*) = I(\mu_f; \Lambda^*)$ が成立するので、以下の定理が成り立つ[9].

[定理 6. 1]

2つの状態 μ_f と μ_g の距離 $d(\mu_f, \mu_g)$ が

$$d(\mu_f, \mu_g) = \sqrt{\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} d(f, g)^2 \mu_{fg}}$$

で与えられるとき、以下が成立する：

$$(1) \quad S_0(\mu_f; \varepsilon) = S_K(f; \varepsilon) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log \max\left(\frac{\lambda_i}{\varepsilon^2}, 1\right)$$

ただし、 $\lambda_i (i=1, \dots, n)$ は R の固有値であり、 θ^2 は方程式 $\sum_{i=1}^n \min(\lambda_i, \theta^2) = \varepsilon^2$ によって唯一に決められる定数である。

$$(2) \quad d_c^0(\mu_f) = d_c^K(\mu_f) = n$$

この場合においては、我々の ε エントロピーは、Kolmogorov の ε エントロピーと一致し、状態の ε エントロピーが特殊な場合として Kolmogorov の ε エントロ

ピーを含むものと考えられる。また、状態 μ_f のフラクタル次元は、ヒルベルト空間の次元と一致するため、次元としての意味合いを持つ。

7. 全変動ノルムにより導かれた距離におけるGauss測度の ε エントロピーとフラクタル次元

この節では、状態の距離を全変動ノルムを用いて与えた場合、我々の ε エントロピーを用いて定義されるフラクタル次元が、非整数値をとり、6とは異なる結果を導き出すことを示す。状態 μ の全変動ノルムとは、

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$$

で定義されるものであり、このノルムから導かれた2つの状態 μ と $\bar{\mu}$ の距離は、

$$d(\mu, \Lambda^* \mu) = \|\mu - \Lambda^* \mu\| = |\mu - \Lambda^* \mu|(\Omega)$$

である。ここでは、実際に、 $\mathcal{H} = R$ で、入力Gauss測度は、1次元Gauss測度 $\mu = [0, \sigma^2]$ 、Gaussianチャネルの線形作用素 A は、実数値 β 、ノイズを表している測度が、1次元Gaussian測度 $\mu_0 = [0, \sigma_0^2] \in P(\mathcal{H})$ によって表現される場合の状態の ε エントロピーとフラクタル次元を計算する。

この場合、出力状態 $\Lambda^* \mu$ は、 $[0, \beta^2 \sigma^2 + \sigma_0^2]$ によって表され、入力Gauss測度から同じ距離だけ離れた出力Gauss測度は、(1) $\beta^2 \sigma^2 + \sigma_0^2 \geq \sigma^2$
(2) $\beta^2 \sigma^2 + \sigma_0^2 < \sigma^2$ の場合に対し、それぞれ1つずつあるので、(1)、(2)の2つ場合に分けて、極大相互エントロピーを計算する。

$d(\mu, \Lambda^* \mu) = \delta \leq \varepsilon$ を満たすGaussianチャネルを考える。このとき、 Λ^* は、 δ と β によって決まるので、 $\Lambda^* = \Lambda_{\delta(\beta, \sigma_0^2)}^*$ とおくと、以下の2つの補題が成立する。

[補題 7. 1] $\beta^2 \sigma^2 + \sigma_0^2 \geq \sigma^2$ ((1)の場合)で、Gaussianチャネル $\Lambda_{\delta(\beta, \sigma_0^2)}^*$ が

$\beta^2 \leq \frac{C_\delta - \delta}{\sigma^2}$ という条件を満足するならば、そのとき、

$$J(\mu; \Lambda_{\delta(\beta, \sigma_0^2)}^*) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \log \sigma^2 \left(1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (\delta + o(\delta)) \right)^2$$

ただし、 $C_\delta = \beta^2 \sigma^2 + \sigma_0^2$ 。

[補題 7. 2] $\beta^2 \sigma^2 + \sigma_0^2 \leq \sigma^2$ ((2)の場合)で、Gaussianチャネル $\Lambda_{\delta(\beta, \sigma_0^2)}^*$ が

$\beta^2 \leq \frac{C_\delta - \delta}{\sigma^2}$ という条件を満足するならば、そのとき、

$$J\left(\mu; \Lambda_{\delta(\beta, \sigma_0^2)}^*\right) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \log \frac{\sigma^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(\delta + o(\delta))\right)^2}$$

ただし, $C_\delta = \beta^2 \sigma^2 + \sigma_0^2$.

これらの2つの補題を用いると, 次の定理が成立する.

[定理 7. 1]

$$(1) \quad S_o(\mu; \varepsilon) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \log \frac{\sigma^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(\varepsilon + o(\varepsilon))\right)^2}$$

$$(2) \quad d_c^o(\mu) = \frac{1}{2}$$

すなわち, 全変動ノルムを用いて距離を導けば, 状態 μ のフラクタル次元は, このように非整数となり, 6 節で求めたものとは異なる結果を導き出される. Mandelbrot は, 一連の研究の一つとして, Renge/Scaling 解析[14,25]によって価格データの時系列を解析し, Gauss 測度に従っている時系列のフラクタル次元は, 1/2 であることを示したが, この結果と上記の Gaussian 測度のフラクタル次元の結果が一致する.

8. まとめ

実際に, Gauss 測度に対して, 状態の ε エントロピーとフラクタル次元を適用した場合, 状態の ε エントロピーが特殊な場合として Kolmogorov の確率変数の ε エントロピーを含むことを示すことができた. これは, 状態(確率測度)をベースとした定義が, 確率変数をベースとした定義を特殊な場合として含むことを意味する. さらに, このとき, n 次元 Gauss 測度のフラクタル次元は n となり, 状態のフラクタル次元が通常次元としての性質も持つことも明らかにできた.

また, 状態の距離を全変動ノルムを用いて与えると, 1 次元 Gauss 測度のフラクタル次元は, 1/2 となって非整数値をとることがわかった. この結果は, Manderbrot が, Renge/Scaling 解析の中で紹介した Gauss 測度に従う時系列のフラクタル次元の値と一致する.

9. 参考文献

[1] S. Akashi, The asymptotic behavior of ε -entropy of a compact positive operator, J.Math.Anal.Appl., 153, pp. 250-257, 1990.

- [2] K.T. Alligood, T.D. Sauer and J.A. Yorke, Chaos-An Introduction to Dynamical Systems-, Textbooks in Mathematical Sciences, Springer, 1996.
- [3] C. R. Baker, Capacity of the Gaussian channel without feedback, Inform. and Control, 37 pp.70-89, 1978.
- [4] A.R. Brooks, A robust layered control system for a mobile robot, IEEE, J. Robotics and automation, RA-2, pp.14-23, 1986.
- [5] R.L. Devaney, An Introduction to Chaotic dynamical Systems, Benjamin, 1986.
- [6] I. M. Gelfand and A. M. Yaglom, Calculation of the amount of information about a random function contained in another such function, Amer. Math. Soc Transl. 12, pp.199-246, 1959.
- [7] R.S. Ingarden, A. Kossakowski and M. Ohya, Information Dynamics and Open Systems, Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [8] K. Inoue, M. Ohya and K. Sato, Application of chaos degree to some dynamical systems, Chaos, Solitons & Fractals, 11, pp.1377-1385, 2000.
- [9] K. Inoue, T. Matsuoka and M. Ohya, ε -entropy and fractal dimension of a state for a Gaussian measure, to appear in Open Systems and Information Dynamics.
- [10] A. N. Kolmogorov, On the shannon theory of information transmission in the case of continuous signals, IEEE. Trans. Inf. Theory, Vol.2, pp.102-, 1956.
- [11] A. Kossakowski, M. Ohya and N. Watanabe, Quantum dynamical entropy for completely positive maps, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2, No.2, pp.267-282, 1999.
- [12] A. N. Kolmogorov and V. M. Tihomirov, ε -entropy and ε -capacity of sets in function space, Amer. Math. Soc. Transmission, Ser. 2, 17, pp.277-364, 1961.
- [13] A. N. Kolmogorov, Theory of transmission of information, Amer. Math. Soc. Translation, Ser. 2, 33, pp. 291-321, 1963.
- [14] B.B. Mandelbrot, Statistical methodology for non-periodic cycles: From the covariance to R/S analysis, Annals of Economic and Social Measurement, 1, 1972.
- [15] B.B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, W. H. Freeman and company, San Francisco, 1982.
- [16] T. Matsuoka and M. Ohya, Fractal dimension of states and its application to Ising model, Rep. Math. Phys. 36, pp.365- 379, 1995.
- [17] M. Ohya, Some aspects of quantum information theory and their applications to irreversible processes, Rep. Math. Phys. 27, pp.19-47, 1989.
- [18] M. Ohya, Fractal dimension of states, in Quantum probability and Related Topics VI (World Scientific, Singapore), pp.359-369, 1991.
- [19] M. Ohya, Information dynamics and its applications to optical communication processes, Lecture Note in Physics, 378, 81-92, 1991.
- [20] M. Ohya and D. Petz, Quantum Entropy and Its Use, Springer-Verlag, TMP, 1993.
- [21] M. Ohya, State change, complexity and fractal in quantum systems, Quantum Communications and Measurement, Plenum Press, New York, pp. 309-320, 1995.
- [22] M. Ohya, Complexity and fractal dimensions for quantum states, Open Systems and Information Dynamics, 4, pp.141-157, 1997.

- [23] M. Ohya, Complexities and their applications to characterization of chaos, International Journal of Theoretical Physics, 37, No.1, pp.495-505, 1998.
- [24] M. Toda, Crisis in chaotic scattering of a highly excited van der Waals complex, Physical Review Letters, 74, No.14, pp.2670-2673, 1995.
- [25] E. E. Peters, Chaos and Order in The Capital Markets, John Wiley, New York, 1988.
- [26] M. S. Pinsker, Gaussian sources, Problems of Information Transmission, 14, pp.59-100, 1963 (in Russian).
- [27] K. Yanagi, An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback, Lecture Notes in Math., 1299, pp.565-570, 1988.