

HASSE-WEIL L 関数の関数等式の符号

斎藤 毅 (東大数理)

0. 主結果.

X を $\mathbb{Q}$ 上の射影非特異代数多様体とし, m を自然数とする. Hasse-Weil L 関数 $L(H^m(X), s)$ は

$$L(H^m(X), s) = \prod_{p \text{ 良}} \det(1 - Fr_p \cdot p^{-s} : H^m(X_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_{\ell}))^{-1} \\ \times \prod_{p \text{ 悪}} \text{ある Euler 因子}$$

と定義される. ここで素数 p が良いとは, $X \bmod p$ が非特異であることとする. そのとき $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}} = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の ℓ 進 etale cohomology $H^m(X_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_{\ell})$ への作用は, $\ell \neq p$ なら不分岐である. 従って $\text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ の生成元 p 乗写像の逆元 Fr_p の作用の固有多項式

$$\det(1 - Fr_p t : H^m(X_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_{\ell}))$$

が定義される. Weil 予想により, これは素数 ℓ のとり方によらず, $\mathbb{Z}$ -係数である. さらに Weil 予想により, 右辺の無限積は $\text{Res} > \frac{m}{2} + 1$ で絶対収束し正則関数を定める.

L 関数に Hodge 構造 $H^m(X(\mathbb{C}), \mathbb{R})$ が定める Γ -因子をかけて

$$\Lambda(H^m(X), s) = L(H^m(X), s) \times \text{ある } \Gamma\text{-因子}$$

とおくと

予想. $L(H^m(X), s)$ は全 s 平面上の有理形関数に解析接続され, 関数等式

$$\Lambda(H^m(X), s) = \pm N^{\frac{m+1}{2}-s} \Lambda(H^m(X), m+1-s)$$

を満たす.

ここで N は $H^m(X)$ の導手とよばれるある自然数で, 悪い素数のみを素因子として持つ. 上の符号を $H^m(X)$ の関数等式の符号と呼び, $w(H^m(X))$ とかく.

例. X を楕円曲線 E とし, $m = 1$ とすると, Birch, Swinnerton-Dyer 予想は

$$w = (-1)^{\text{rank } E(\mathbb{Q})}$$

を導く.

Poincaré 双対性と難 Lefschetz により $G_{\mathbb{Q}}$ -同変な非退化双一次形式 $H^m(X) \times H^m(X) \rightarrow \mathbb{Q}(-m)$ が定まる. これは m が奇数なら交代形式で, 偶数なら対称形式である. 以下では

斎藤 毅 (東大数理)

定理. m が偶数とし, Deligne の積公式の予想を認めれば

$$w(H^m(X)) = 1$$

となる.

を示す.

ここでは証明の方針だけを示す. 種々の定義等はあとで与える. 以下 $H^m(X)$ を M と略記する.

まず局所 ϵ -因子の理論により, $\mathbb{Q}$ の各素点 p にたいし, 局所符号 $w_p(M) = \pm 1$ が定まり, 有限個の p を除いて $w_p(M) = 1$ となる. Deligne の積公式の予想は

$$w(M) = \prod_{p \text{ 素点}} w_p(M)$$

を導く. 従って相互法則

$$\prod_{p \text{ 素点}} w_p(M) = 1$$

を示せばよい.

十分よい素点 ℓ を選び, $V_\ell = H^m(X_\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_\ell)(\frac{m}{2})$ を考える. Poincaré 双対性と難 Lefschetz により直交表現

$$\rho_\ell : G_\mathbb{Q} \rightarrow O(V_\ell)$$

がえられる. $sw_2(\rho_\ell)$ を ρ_ℓ の第 2Stiefel-Whitney 類とする. 局所体の Brauer 群の構造により, 各素点 p にたいし $H^2(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}/2) \simeq \{\pm 1\}$ であるので, $sw_{2,p}(\rho_\ell) = \pm 1$ とみなす. すると平方剰余の相互法則より

$$\prod_{p \text{ 素点}} sw_{2,p}(\rho_\ell) = 1$$

となる.

従って各素点 p にたいし, $sw_{2,p}(\rho_\ell)$ と $w_p(M)$ を比較すればよい.

$p \neq \ell, \infty$. Deligne の定理より $sw_{2,p}(\rho_\ell) = w_p(M)$.

$p = \infty$. 直接計算して $sw_{2,\infty}(\rho_\ell) = w_p(M) \times (-1)^{h(M)}$. ここで $h(M) = \sum_{q > \frac{m}{2}} (q - \frac{m}{2}) \dim_{\mathbb{Q}} H^q(X, \Omega^{m-q})$.

$p = \ell$. p が良いとすると $w_p(M) = 1$. 従って

定理'. p が良くて $p \geq 2m + 2$ ならば $sw_{2,p}(\rho_p) = (-1)^{h(M)}$.

を示せば良い.

この定理は,

- (1) $sw_{2,p}(\rho_p)$ を 2 次形式つき $\mathbb{Q}_p$ -線形空間 $H^m(X_{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{Q}_p)$ と $H_{dR}^m(X_{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ の Hasse-Witt 類と, 直交表現 $\rho_p : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow O(V_p)$ の spinor 類で表す.
- (2) (1) の Hasse-Witt 類, spinor 類を, 具体的に Hodge 数を使って表し, 定理' の等式を確かめる

ことにより証明する.

(1) は $G_{\mathbb{Q}_p}$ の表現 $H^m(X_{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{Q}_p)$ が Hodge-Tate 表現であることと, 直交表現に対する Fröhlich の定理の Hodge-Tate 表現への拡張とから従う. (2) は $G_{\mathbb{Q}_p}$ の表現 $H^m(X_{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{Q}_p)$ が cristalline 表現であることと, その mod p 表現に対する Fontaine-Lafaille 理論を使って示す.

1. 局所体の Galois 群の ℓ 進表現.

K を剰余体 F が有限の完備離散付値体とし, p を F の標数とし q を F の位数とする. K の絶対 Galois 群 $G_K = \text{Gal}(K^{\text{sep}}/K)$ は次のような filtration を持つ

$$1 \subset P \subset I \subset G_K.$$

ここで $I = \text{Gal}(K^{\text{sep}}/K^{nr})$, $P = \text{Gal}(K^{\text{sep}}/K^{tr})$ はそれぞれ K の最大不分岐拡大 K^{nr} , 最大馴分岐拡大 $K^{tr} = K^{nr}(\pi^{1/m}, p \nmid m, \pi \text{ は } K \text{ の素元})$ に対応する部分群である. 各商群には標準同型

$$G/I \simeq G_F = \text{Gal}(F^{\text{sep}}/F), \quad I/P \simeq \varprojlim_{p \nmid m} \mu_m(F^{\text{sep}}) = \prod_{p' \neq p} \mathbb{Z}_{p'}(1)$$

があり, P は pro- p 群である.

$G_K^{ab} = \text{Gal}(K^{ab}/K)$ を G_K の abel 化とすると, 局所類体論の写像 $K^\times \rightarrow G_K^{ab}$ が定義される. 図式

$$\begin{array}{ccc} K^\times & \longrightarrow & G_K^{ab} \\ \text{付値} \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & G_F : 1 \mapsto Fr_F \end{array}$$

が可換になるようにする. ここで幾何的 Frobenius $Fr_F \in G_F$ は q 乗写像の逆である.

ℓ を p と異なる素数とする. この節では G_K の有限次元 ℓ 進表現 $\rho : G_K \rightarrow GL_{\mathbb{Q}_\ell}(V)$ に対し, その導手 $a(V)$, 局所 L 因子 $L(V, t)$ および局所 ϵ 因子 $\epsilon(V, \psi)$ の定義をする.

G_K の ℓ 進表現について, 基本的なのは次の定理である.

Monodromy 定理 (Grothendieck) $\rho : G_K \rightarrow GL_{\mathbb{Q}_\ell}(V)$ を G_K の有限次元 ℓ 進表現とすると, I のある開部分群 J と, べき零行列 $N \in \text{End}(V)$ で, $\sigma \in J$ に対し

$$\rho(\sigma) = \exp(t_\ell(\sigma))$$

となるものが存在する.

ここで $t_\ell : J \rightarrow \mathbb{Z}_\ell$ は $I/P \rightarrow \mathbb{Z}_\ell(1)$ に同型 $\mathbb{Z}_\ell(1) \simeq \mathbb{Z}_\ell$ を合成したものである.

V の Artin 導手 $a(V)$ を

$$a(V) = \dim V - \dim V^I + sw V$$

により定義する. これは作用の I への制限のみで定まる. V^I は I による固定部分であり, Swan 導手 $sw(V)$ は次のように定義される, 作用の P への制限のみで定まる自然数である. 上のような J で I の正規部分群であるものを取り, L を対応する K^{nr} の有限次 Galois 拡大とし, $G=I/J$ とおく. 関数 $Tr(\sigma : V)$ は G 上の関数を定める. G の Swan 指標を

$$sw(\sigma) = \begin{cases} -\text{ord}_L(\sigma(\pi_L)/\pi_L - 1) & \sigma \neq 1 \\ \text{length}_{\mathcal{O}_L}(\Omega_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_{K^{nr}}}^1) - ([L : K^{nr}] - 1) & \sigma = 1 \end{cases}$$

斎藤 毅 (東大数理)

により定義する. ここで π_L は L の素元で ord_L は L の正規離散付値である. σ が P の像に入らなければ $sw(\sigma) = 0$ である. Swan 導手

$$sw(V) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} sw(\sigma) \text{Tr}(\sigma : V)$$

は自然数となり, J のとり方にはよらない.

すみませんが, 本文は次のページに続きます.

REFERENCES

- [D1] P. Deligne, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L*, Modular functions of one variable II Lecture Notes in Math. 349 (1973), Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 501-597,.
- [D2] ———, *Les constantes locales de l'équation fonctionnelle de la fonction L d'Artin d'une représentation orthogonale*, Inventiones Math. 35 (1976), 299-316.
- [D3] ———, *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, Proceedings of Symp. in Pure Math. 33 part 2 (1979), AMS, Providence, 313-346.
- [Fo] J.-M. Fontaine, *Astérisque* (1994), SMF, Paris.
- [Fo-L] J.-M. Fontaine-G. Laffaille, *Construction de représentation p-adiques*, Ann. Scient. École Norm. Sup. 4e série, 15 (1982), 547-608.
- [Fo-Ma] J.-M. Fontaine-B. Mazur, *Geometric Galois representation*, Proc. of Conf. on Ell. curves, (1995), ?.
- [Fo-Me] J.-M. Fontaine-W. Messing, *p-adic periods and p-adic étale cohomology*, Contemporary Math. vol 67 (1987), 179-207.
- [Fr] A. Fröhlich, *Orthogonal representations of Galois groups, Stiefel-Whitney classes and Hasse-Witt invariants*, J. reine angew. Math. 360 (1985), 84-123.
- [Fr-Q] A. Fröhlich-J. Queyruet, *On the functional equation of the Artin L-function for characters of real representations*, Inventiones Math. 20 (1973), 125-138.
- [S] T. Saito, *The sign of the functional equation of the L-function of an orthogonal motive*, Inventiones Math. (1995).
- [S2] ———, *Hasse-Weil L 関数の関数等式の符号*, 数理研講究録 代数的整数論と数論的幾何学 925 (1995).
- [Se-1] J.-P. Serre, *Corps Locaux*, Hermann, Paris.
- [Se-2] ———, *Zeta and L-functions*, Oeuvres no 64.
- [Se-3] ———, *Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques*, Oeuvres no 87.
- [Se] J.-P. Serre, *Conducteurs d'Artin des caractères réels*, Inventiones Math. 14 (1971), 173-183.
- [W] N. Wach, *Représentation p-adiques cristallines du groupe de Galois d'un corps local*, these à Orsay.

$$S_W(V) = 0 \Leftrightarrow V \wedge \text{の } P \text{ の作用が自明}$$

$$\alpha(V) = 0 \Leftrightarrow V \wedge \text{の } I \text{ の作用が自明}$$

である. $V \wedge \text{の } I \text{ の作用が自明であるとき } V \text{ は不分岐である}$
 という. Monodromy 定理で $I = J$ ととれるとき, V は安定で
 あるという. 直交表現については次がなりたつ.

定理 (Serre). V が直交表現でかつ $\dim V \equiv \mathbb{Q}$ のとき $\exists$ 整数 r
 $\alpha(V)$ は偶数である.

局所 L 因子 $L(V, t) \in \mathbb{Q}_\ell(t)$ は

$$L(V, t) = \det (1 - \text{Fr}_F t; V^I)^{-1}$$

と定義する

Σ 表現の Σ 因子を定義するために, まず Weil 群 W_K の
 連続表現に對し Σ 因子を定義する. W_K を標準字像 $G_K \rightarrow G_F$
 $= \hat{\mathbb{Z}}$ による $\mathbb{Z}$ の逆像とし, 核 $I \subset W_K$ を開部分群とする位相
 という. $\mathbb{C}$ を標数 0 の代数閉体とする. (後に $\mathbb{C}$ または $\overline{\mathbb{Q}}$ に
 する). 局所体 K と有限次元連続表現 $W_K \rightarrow GL_{\mathbb{C}}(V)$ と非
 自明加法的指標 $\psi: K \rightarrow \mathbb{C}^\times$ の組に對し, Σ 因子

$$\Sigma_K(V, \psi) \in \mathbb{C}^\times$$

を次の条件 (1) ~ (3) で特徴づけられるものとして定義する.

(1) 完全系列

$$0 \rightarrow V' \rightarrow V \rightarrow V'' \rightarrow 0$$

に對し,

$$\Sigma_k(V, \psi) = \Sigma_k(V', \psi) \cdot \Sigma_k(V'', \psi).$$

(1) により仮想表現 (表現の形式的な差) $V = V_1 - V_2$ に対し

$$\Sigma_k(V, \psi) = \Sigma_k(V_1, \psi) \Sigma_k(V_2, \psi)^{-1}$$

と定義できる.

(分離)

(2) $L \subseteq K$ の有限次拡大とし, $V \in W_L$ の次元 0 の仮想表現とすると

$$\Sigma_k(\text{Ind}_{W_L}^{W_K} V, \psi) = \Sigma_L(V, \psi \circ \text{Tr}_{L/K}).$$

(3) $\dim V = 1$ とし $\chi: K^\times \rightarrow C^\times$ と局所類体論の同型 $K^\times \rightarrow W_K^{\text{ab}}$ によって V に対応する指標とすると $\Sigma_k(V, \psi)$ は次のように具体的に定義される.

(3)-1. χ が不分岐 ($\chi(O_K^\times) = 1$) のとき.

$$\Sigma_k(\chi, \psi) = \chi(\text{Fr}_F^{\text{ord } \psi}) \cdot g^{\text{ord } \psi}.$$

$\text{ord } \psi$ とは $\psi(m_K^{-n}) = 1$ となる最大の整数 n である.

(3)-2. χ が分岐するとき.

$$\Sigma_k(\chi, \psi) = \int_{K^\times} \chi^{-1}(x) \cdot \psi(x) dx$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\text{ord } x = n} \chi^{-1}(x) \cdot \psi(x) dx.$$

こゝで積分は, compact 集合 $\{x \in K^\times \mid \text{ord } x = n\}$ 上の局所定数関数の値に体積 $\text{vol}(a + m_K^{-n}) = g^n$ をかけし和をとったものである.

指標 $\chi: K^\times \rightarrow C^\times$ に対し, 対応する W_K の 1 次元表現 V_χ の導手 $a(\chi) = a(V_\chi)$ は

$$a(\chi) = \begin{cases} 0 & \chi \text{ 不分裂} \\ \chi(1+m^n)=1 \text{ とする最小の } n & \chi \text{ 分裂} \end{cases}$$

で与えられる. χ が分裂すると χ の指標の直交関係より,

$$n \neq -(\text{ord } \psi + a(\chi)) \text{ ならば } \int_{\text{ord } x = n} \chi^{-1}(x) \cdot \psi(x) dx$$

は 0 となるので Σ -因子は

$$\Sigma_{\chi}(\chi, \psi) = \int_{\text{ord } x = -\text{ord } \psi + a(\chi)} \chi^{-1}(x) \cdot \psi(x) dx$$

である.

上の (1) ~ (3) が特徴づけであることを見よう. (1) より単純な V について考えればよい. $\varphi \in W_K$ で $\mathbb{Z}$ の像が 1 となるものにとると, F のある中 (すなわち $W_K \rightarrow GL(V)$ の中心に) はいるから, V が単純ならそれは定数倍で作用する. 従って W_K の不分裂な指標 α と W_K の有限な商 $G \Sigma$ とある表現 V' で

$$V \simeq \alpha \otimes V'$$

となるものがある. Brauer の定理の強い形により,

$$V \simeq \alpha^{\oplus \dim V} + \alpha \otimes \sum_i \text{Ind}_{W_{L_i}}^{W_K} (\chi_i - 1)$$

と表わせる. (3) と (2) により右辺の Σ 因子は定まるから,

特徴づけに当たっていることがわかる.

Σ 因子の交差 $\Sigma_0(V, \psi)$ を

$$\Sigma_0(V, \psi) = \det(-\text{Fr}_F : V^{\mathbb{I}})^{-1} \Sigma_0(V, \psi)$$

により定義する. Σ と Σ_0 の関係は α と Sw の関係にあたる.

Σ 因子は次の性質を持つ

1. V 不分岐とすると

$$\Sigma(V, \psi) = \det(Fr_F^{\text{ord } \psi}; V) \cdot g^{\text{ord } \psi \cdot \dim V}$$

より一般に

$$\Sigma(V \otimes W, \psi) = \det(Fr^{\text{ord } \psi \cdot \dim W + a(W)}; V) \times g^{\Sigma(W, \psi) \dim V}$$

2. V 可分岐とし、 $\text{ord } \psi = -1$ とすると、 $\Sigma_0(V, \psi)$ は無限

$\text{Res}_{\mathbb{F}}^{\mathbb{G}_k} V$ と $\psi_0 = \psi|_{\mathbb{F}}: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ にしかよらない。 V は単純とし

$\dim V = f$ とすると、 $\text{Res}_{\mathbb{F}}^{\mathbb{G}_k} V$ は $\mathbb{F}_{g^f}^\times = \bigwedge_{g^f-1}^{\times}$ の指標 χ によって $\bigoplus_{i=0}^{f-1} \chi^{(g^i)}$ と表わされ、

$$\Sigma_0(V, \psi) = (-g)^{-f} \sum_{\chi \in \mathbb{F}_{g^f}^\times} \chi^{-1}(x) \cdot \psi_0(\text{Tr}_{\mathbb{F}_{g^f}/\mathbb{F}_g} x)$$

となる。

3. $\dim V = 1$ とし、対応する $k^\times$ の指標 χ とする。まず $a(\chi)$

≥ 2 と仮定する。 $a(\chi) = 2m$ または $2m+1$ とおく。 p は 2

でないとする。 $x \in m_k^\times$ に對し

$$\chi(1+x) = \psi(y_0(x - \frac{x^2}{2}))$$

となる付随か $-(\text{ord } \psi + a(\chi))$ とある $k^\times$ の元 y_0 による。

$u \in \mathcal{O}_k^\times$, $x \in m_k^\times$ に對し

$$\begin{aligned} & \chi^{-1}(y_0 u(1+x)) \psi(y_0 u(1+x)) \\ &= \chi^{-1}(y_0 u) \psi(y_0 u) \psi(y_0((u-1)x - \frac{x^2}{2})) \end{aligned}$$

となる。

指標の直交関係より

$$\Sigma(\chi, \psi) = \int_{y_0} U^m \chi^{-1}(x) \cdot \psi(x) dx$$

$U^m = 1 + m_k$ とする. $\pm$ に上の式を代入すると

$$\Sigma(\chi, \psi) = \chi^{-1}(y_0) \psi(y_0) \cdot g^{\text{ord} \psi} \begin{cases} g^{\frac{a(x)}{2}} & a(x) \text{ 偶数} \\ G \cdot g^{\frac{a(x)-1}{2}} & a(x) \text{ 奇数} \end{cases}$$

かえらる. G は 2 次の Gauss 和

$$G = \sum_{\substack{m_k \\ k}} \psi(-y_0 \frac{x^2}{2})$$

であり $G^2 = (\frac{-1}{g}) g = ((\frac{-1}{p}) p)^d$, ($g = p^d$) をみたす.

4. $\text{Hom}(k, C^X)$ は自然に k -線型空間の構造をもつ.

$$\Sigma(V, a\psi) = \det V(a) g^{-\text{ord} \frac{\dim V}{2} \psi} \Sigma(V, \psi)$$

$$5. \Sigma(V, \psi) \cdot \Sigma(V^*, \psi) = \det V(-1) \cdot g^{a(V) + 2 \dim V \cdot \text{ord} \psi}$$

$C(m)$ を不分岐指標 $\text{Fr} \mapsto g^{-m}$ に対応する表現とし $V(m) = V \otimes C(m)$ とする. 1 より

$$\Sigma(V(m), \psi) = g^{-m(\text{ord} \psi \cdot \dim V + a(V))} \Sigma(V, \psi)$$

なること $V^* \cong V(m)$ なる

$$\Sigma(V, \psi)^2 = \det V(-1) g^{(m+1)a(V) + (m+2)\dim V \cdot \text{ord} \psi}$$

となる. V を W_k の直交表現とし $\det V \in C$ とすると

Serre の定理により $a(V)$ は偶数だから $\Sigma_k(V, \psi) = \pm g^{\frac{a(V)}{2} + \dim V \cdot \text{ord} \psi}$ となる. この符号は 4 より 4 のとり方により異なるのでこれを $w_k(V)$ と書く

定理 (Deligne) $sw_2(V) \in H^2(k, \mathbb{Z}/2) = \{\pm 1\}$ と
 直交表現 V の第 2 Steifel-Whitney 類とすると

$$w_k(V) = sw_k(V)$$

ここで第 2 Steifel-Whitney 類とは $\mathcal{F}$ で定義される中心拡大

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \mathcal{O}(V) \rightarrow O(V) \rightarrow 1$$

の $W_k \rightarrow O(V)$ によるひまもどきの類のことである.

$\mathcal{Q}$ 直交表現の Σ 因子は次のように定義する. $V \in G_k$ の $\mathcal{Q}$ 直交表現とし $\psi: G_k \rightarrow \mathbb{Q}_\ell^\times$ と非自明加法的指標とする. 局所 Σ 因子はまず $\Sigma_0(V, \psi) = \Sigma_0(V', \psi)$ とおいて

$$\Sigma(V, \psi) = \det(-Fr_F: V^I)^{-1} \Sigma_0(V, \psi)$$

により定義する. ここで V' は monodromy 定理によって与えられた N を使って $V' = \bigoplus_i \ker N^i / \ker N^{i-1}$ とおいた. W_k は自然に各 $\ker N^i / \ker N^{i-1}$ に V の作用する. この表現が $\mathbb{Q}$ 上有理的なら加法的指標 $\psi: k^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ に対し L 因子 $L(V, \psi) \in \mathbb{C}(t)$ Σ -因子 $\Sigma(V, \psi) \in \mathbb{C}^\times$ を定義される. $\mathcal{Q}$ 直交表現について以上と同様に.

系 $V \in G_k$ の直交 $\mathcal{Q}$ 直交表現とし $\det V = 1$ とする.

1. 番号 $a(V)$ は偶数であり.

2. 符号 $w(V)$ は第 2 Steifel-Whitney 類 $sw_2(V)$ と等しい.

2. Hodge 構造.

$k = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする. k 上の重 $\pm n$ の pure (R) Hodge 構造とは

1. $G_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C}/k)$ の作用を持つ有限次元線型空間 V ,
2. 有限減少 filtration F を持つ有限次元線型空間 D
3. $G_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C}/k)$ の作用を保つ $\mathbb{C}$ 線型空間の同型.

$$V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow D \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

の組で, Hodge 分解

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=n} F_{\mathbb{C}}^{p,p} \cap \overline{F}_{\mathbb{C}}^q$$

を満たすものとしてある.

ここで $G_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C}/k)$ の作用は左辺では V と $\mathbb{C}$ の両辺, 右辺では $\mathbb{C}$ のみに作用する. $F_{\mathbb{C}}^p \subset V_{\mathbb{C}}$ は $F^p \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の 3 の同型による像であり $\overline{F}_{\mathbb{C}}^q$ は $F_{\mathbb{C}}^q$ の $V_{\mathbb{C}}$ での複素共役である. $H^{p,q} = F_{\mathbb{C}}^p \cap \overline{F}_{\mathbb{C}}^q$ とおく.

k 上の Hodge 構造 V に附して γ の L -因子 (Γ -因子ともよぶ) と γ -因子を定義する. ~~この~~ L -因子は,

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2).$$

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s)$$

を平行移動 (t_2) ものの積として定義される.

$\ell^{R,q} = \dim H^{R,q}$ とする. $k = \mathbb{R}$ のときは複素共役 $F_{\infty} \in G_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ が同型 $H^{R,q} \rightarrow H^{R,p}$ を定めるので $\ell^{R,q} = \ell^{R,p}$ と

なる. $\pm$ に $n=2p$ が偶数 α と $\pm$ に α . $H^{p,p}$ は $\mathbb{C} \otimes (\mathbb{C}/\mathbb{R})$ の表現となるので

$$H^{p,+} = \{ \alpha \in H^{p,p} \mid F_{\infty}(\alpha) = (-1)^p \alpha \}$$

$$H^{p,-} = \{ \alpha \in H^{p,p} \mid F_{\infty}(\alpha) = (-1)^{p+1} \alpha \}$$

とし. $e^{p,\pm} = \dim H^{p,\pm}$ とおく.

$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 上の $\mathbb{R}$ -Hodge 構造 V に $\neq \mathbb{C}$. $\exists$ α L 因子は

$$L_{\mathbb{R}}(V, s) = \prod_{p+q=n} \Gamma_{\mathbb{C}}(s-p)^{e^{p,q}} \\ \times \Gamma_{\mathbb{R}}(s-p)^{e^{p,+}} \cdot \Gamma_{\mathbb{R}}(s-p+1)^{e^{p,-}} \quad n=2p.$$

$$L_{\mathbb{C}}(V, s) = \prod_{p+q=n} \Gamma_{\mathbb{C}}(s - \min(p, q))^{e^{p,q}}$$

で定める. また標準的な加法的指標 $\psi_K: K \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$, $\psi_K(x) = \exp(2\pi i \operatorname{Tr}_{K/\mathbb{R}}(x))$ に対し Σ 因子 Σ .

$$\Sigma_{\mathbb{R}}(V, \psi_{\mathbb{R}}) = \prod_{p+q=n} i^{(q-p+1)e^{p,q}} \\ \times i^{e^{p,-}} \quad n=2p$$

$$\Sigma_{\mathbb{C}}(V, \psi_{\mathbb{C}}) = \prod_{p+q=n} i^{|p-q|e^{p,q}}$$

とおく. V が直交 Hodge 構造: とならず. 非退化対称双一次形式 $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ で Hodge 構造を保つものを持ち $\det V \cong \mathbb{R}$ である場合を考える. このとき $e^{p,q} = e^{q,p}$ である. $\pm$ $\exists$ $K = \mathbb{R}$ の場合には F_{∞} の固有値 -1 の重複度 $S = e^{p,-} + \sum_{p < q} e^{p,q}$ は偶数となるから. Σ -因子は ± 1 であり. それを $w_K(V)$ と書くことにすると

$$\omega_R(V) = \prod_{q \geq 0} (-1)^{q^2 - q} \times (-1)^{\frac{S}{2}}$$

$$\omega_{\mathbb{C}}(V) = 1$$

となる.

3. Motive.

k を代数体とする. k 上の $\mathbb{Q}$ 係数の重 $\pm n$ の pure motive の実現 $V = ((V_{\mathbb{Q}})_e, (V_{\mathbb{Q}})_v, D)$ とは各素数 l に対する $\mathbb{F}_l$ の $\mathbb{Q}_l$ -表現 V_l と k の各無限素点 v に対する k_v 上の Hodge 構造 V_v と有限減少 filtration γ 上の有限次元 k 線型空間 D の組で.

代数幾何的に定義されるもののことをいう. この節と §5 ではこのように多少あいまいなところや. これから述べる motive の性質のように 予想 ではないものもある.

例 1. $\mathbb{Q}(m)$ m は整数. $V_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}_{\mathbb{Q}}(m)$ は $\mathbb{Q}$ -円分指標の m 重に対応する $\mathbb{Q}$ -表現. $D = k$. $F^m D = D$. $F^{m+1} D = 0$ であり. V_v は Hodge 構造 $R(m)$. すなわち V_v は標準射 $\mathrm{Gal}(\bar{k}_v/k_v) \hookrightarrow \mathbb{Z}$ の m 重に対応する $\mathbb{R}$ -表現. $D_v = k_v \otimes D$, Hodge 構造を定める同型 $R \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong k_v \otimes_{k_v} \mathbb{C}$ は $\mathbb{C}$ の identity.

$\mathbb{Q}(m)$ の重 $\pm$ は $-2m$ である.

例 2. X を k 上の proper smooth 代数多様体とし. m を自然数とすると $\pm H^m(X)$. $V_{\mathbb{Q}} = H_{\text{ét}}^m(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_{\mathbb{Q}}) \cap$ の自然な $\mathbb{F}_k$ の表現. $D = H_{\text{dR}}^m(X/k)$. とする Hodge filtration.

$V_v = H^m(X(K_v), \mathbb{R})$ で同型 $V_v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong D \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ は de Rham の同型. $H^m(X)$ の重さ (weight) は m .

Motive は一般に次の性質をみたすと考えられる. $\mathbb{Q}(m)$ の場合は自明であり, $H^m(X)$ についてはそのかなりの部分は Weil 予想から従う.

K の素点の有限集合 S で S にはいる有限素点に対しては V が良い reduction を持つようなものが存在する. $v \notin S$ にはいる有限素点とすると, v に対する G_K の ℓ -進表現 V_ℓ の G_{K_v} への制限は不変であり, さらに固有多項式 $P_v(t) = \det(1 - \text{Frob}_v t | V_\ell)$ は $\mathbb{Q}[t]$ にはいり ℓ によらない. これより, L 因子.

$$L_v(v, t) = \det(1 - \text{Frob}_v t | V_\ell)^{-1} \in \mathbb{Q}(t)$$

は ℓ によらず定義される. さらに加法的指標 $\psi_K: K_v \rightarrow \mathbb{C}^\times$

$$\psi_{K_v} = \exp(-2\pi i \text{Tr}_{K_v/\mathbb{Q}_p} x)$$

とする. ここで $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と同一視した. §1 の ε -因子の定義より.

$$\begin{aligned} \Sigma_{K_v}(V, \psi_{K_v}) &= \det(\text{Frob}_v^{D(K_v/\mathbb{Q}_p)}, V) \\ &\quad \times N_v^{-D(K_v/\mathbb{Q}_p) - \dim V} \in \mathbb{Q}^\times \end{aligned}$$

となる. ここで $D(K_v/\mathbb{Q}_p)$ は K_v の共役差積の体積である.

より一般に v を有限素点とする. $N \in \text{End}(V_\ell)$ を I_v の ℓ への作用が monodromy 定理により定める中要作用素とする.

$\ker N^i / \ker N^{i-1}$ の Weil 群 W_K の自然な作用は $\mathbb{Q}$ 上有理的であり, ℓ によらない. $\Rightarrow$ ℓ より L 因子.

$$L_v(V, \tau) = \det(1 - \text{Frob}_v \tau : V_\ell^{I_v})^{-1}$$

は $\mathbb{Q}(t)$ に属し, ℓ によらない. また $a_v(V) = a_v(V_\ell) \in \mathbb{N}$ も ℓ によらない. $\Rightarrow$ ℓ 上の加法的指標, $\psi_{k,v}: K \rightarrow \mathbb{C}^\times$ に對し, Σ -因子.

$$\Sigma_{k,v}(V, \psi_{k,v}) = \det(-\text{Frob}_v | V_\ell^{I_v})^{-1} \prod_{\chi} \Sigma_{\chi,k}(\ker N^i / \ker N^{i-1}, \psi_{k,v})$$

$\in \mathbb{C}^\times$ も ℓ によらない.

一方無限素点 v に對しては, L 因子, Σ 因子.

$$L_v(V, S) = L_{k,v}(V, S)$$

$$\Sigma_v(V) = \Sigma_{k,v}(V, \psi_{k,v})$$

k 上の Hodge 構造により定義される. ここで $\psi_{k,v}: K \rightarrow \mathbb{C}^\times$ は $\psi_{k,v}(x) = \exp(2\pi i \cdot \text{Tr}_{K_v/\mathbb{Q}} x)$ である. 各 v に對し Hodge 構造の filtered k -線型空間 D_v は k -線型空間 D の k_v への k -線型係数拡大である. よって Hodge 数 $h^{p,q}$ は D により定まる. また G_{K_v} の表現 V_v は V_ℓ の G_{K_v} への制限と同型である (たか, $\mathbb{Z}_\ell^{p,q}$ は D と 1 つの V_v とで定まる. よって L 因子 Σ 因子は D と 1 つの V_v で定まる.

Motivic V の L -関数 $L(V, S)$ を次のように定める. 各有限素点 v について $v \notin S$ なら.

$$L_v(V, \tau) = \det(1 - \text{Frob}_v \tau : V_\ell)^{-1} \in \mathbb{Q}_\ell(t)$$

とある. 一般の有限素点 v については

$$L_v(V, t) = \det(1 - F_v t; V_v^{I_v})^{-1} \in \mathbb{Q}_\ell(t)$$

とある. 無限素点 v については

$$L_v(V, s) = L_k(V_v, s)$$

とある. $L(V, s)$ は

$$L(V, s) = \prod_{v: \text{有限素点}} L_v(V, Nv^{-s})$$

と定義する. さらに完備化された L 関数 Λ

$$\Lambda(V, s) = L(V, s) \times \prod_{v: \text{無限素点}} L_v(V, s)$$

と定義する.

Σ -因子は次のように定義する. k_v の加法的指標 $k_v \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を

$$\chi_{k_v} = \begin{cases} \exp(-2\pi i (\text{Tr } k_v / \mathbb{Q}_p \bmod \mathbb{Z}_p)) & v \text{ 有限} \\ \exp(2\pi i \text{Tr } k_v / \mathbb{R}) & v \text{ 無限} \end{cases}$$

とある. 有限素点については $\mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p$ を同型 $\mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{p}] / \mathbb{Z}$ により, $\mathbb{R} / \mathbb{Z}$ の部分群と同一視する. §1 と §2 でそれぞれ有限素点と無限素点に対し局所 Σ -因子を定義したので

$$\Sigma_v(V) = \Sigma_{k_v}(V, \chi_{k_v})$$

とある. 大域 Σ -因子 $\Sigma(V) \in \mathbb{C}^\times$ を

$$\Sigma(V) = \prod_{v: \text{全素点}} \Sigma_v(V) \times D_k^{-\frac{1}{2} \dim V}$$

と定義する. D_k は k の $\mathbb{Q}$ 上の判別式の絶対値である. 右辺は有限素点 v で k が $\mathbb{Q}$ 上不分岐かつ $v \nmid \Delta$ なる $\Sigma_v(V) = 1$ であるので有限積である

V の導手 $f(V) \in \mathbb{Q}_k$ の整 ideal $\prod_{v \in S} p_v^{a_v(V)}$ と $(Nf(V) \in \mathbb{Z})$ の $1 \leq N \in \mathbb{N}$ とする.

Σ には いる ない有限素点 v に 対し て は $p_v(t)$ は Weierstrass 予想を 満たす と 考 え ら れ る. つ ま り $p_v(t) = \prod_i (1 - \alpha_{v,i} t)$ と $(t \in \mathbb{C})$ と $|\alpha_{v,i}| = q^{\frac{1}{2}}$ と なる. 可 与 と. L 関 数 $L(V, s)$ は 右 半 平 面 $\text{Re } s > \frac{1}{2} + 1$ で 絶 対 収 束 し. そ こ で 正 則 関 数 と 定 め る.

L 関 数 は 次 の よ う な 関 数 等 式 を 満 た す と 予 想 せ ら れ る.

予 想. $L(V, s)$ は 全 s 平 面 上 の 有 理 形 関 数 と 定 め. 関 数 等 式

$$\Lambda(V, s) = \Sigma(V) \cdot (Nf(V) \cdot D_k^{\dim V})^{-s} \Lambda(V, 1-s)$$

と 満 た す

こ こ で V^* は V の 双 対 motive で あ る.

例. V が potentially CM motive また は $GL_2(k)$ (k は 総 実 代 数 体) の 係 型 形 式 か ら く る 時 は 予 想 は 正 し い.

$$V \text{ が } V^*(n) \text{ と 同 型 で あ れ ば } \Sigma(V) = \pm (Nf(V) \cdot D_k^{\dim V})^{\frac{n+1}{2}}$$

← 局 所 素 点 の 付 属 5 に よ り

と なる. こ の 符 号 を $w(V)$ と 書 く //

局所因子の性質^①により $w(V)$ は Tate twist で変わらない
 $w(V) = w(V(m))$. よって ~~もし~~ m が偶数ならば ~~また~~
 $V \in V(\frac{m}{2})$ におきかえてはじめるから $m=0$ の場合を考えればよい.
 さらに $m=0$ かつ $\dim V=1$ であれば, $w(V)$ は $\mathbb{G}_m$ の
 位数が 1 の 2 の 1 次指標の L 関数の関数等式の符号であるの
 でそれは ± 1 である. よって V の ~~を~~ $V \oplus \det V$ におきか
 えることにより, $\det V \in \mathbb{Q}$ の場合を考えればよい.

V を直交 motive で重 $\mathbb{Z}$ の m とする. 可成り. 非
 退化対称双 1 次形式 $V \times V \rightarrow \mathbb{Q}(-m)$ が与えられると
 する. このとき V' を上の m にしてえられる重 $\mathbb{Z}$ の $\det V$
 $\in \mathbb{Q}$ の直交 motive とすると, $w(V) = w(V')$ である. さら
 に, V' については各素点 v に対し局所符号 $w_v(V') = \pm 1$ とは
 ほとんどすべての素点で 1 となるものか, 1 と 2 で有限素点
 無限素点についてそれぞれ定義されている. $w(V')$ の定義に
 より $w(V') = \prod_{v: \text{素点}} w_v(V')$ である. (したがって $w_v(V) = w_v(V')$
 とおけば)

$$w_v(V) = \prod_{v: \text{素点}} w_v(V)$$

かえられる.

4. p -進 Hodge 理論 (crystalline, $e=1$).

$K \subset \mathbb{Q}_p$ の有限次拡大 と $K_0 \subset K$ 内の $\mathbb{Q}_p$ の最大不分岐拡大 とする. また環 A_{cris} , B_{cris} を定義する.

$C = \bigwedge \mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z} \subset \mathbb{O}_C \subset \dots$ の整数環 とする. $R = \varprojlim \mathbb{O}_C/p$ とする. $\pi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{O}_C$ transition map は p 乗写像である. R は集合 と $\mathbb{Z}$ は $\varprojlim \mathbb{O}_C$ と等しい. $\pi: \mathbb{O}_C \rightarrow \mathbb{O}_C/p$ transition map はやはり p 乗写像である. $W(R) \subset R$ α Witt vector の環 とする. $W(R)$ は集合 と $\mathbb{Z}$ は無限積 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ であり. 演算は多項式 $S_i, P_i \in \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_i, y_0, \dots, y_i]$ を用いて

$$\begin{aligned} (x_0, x_1, \dots) + (y_0, y_1, \dots) &= (S_0(x_0, y_0), S_1(x_0, x_1, y_0, y_1), \dots) \\ (x_0, x_1, \dots) \times (y_0, y_1, \dots) &= (P_0(x_0, y_0), P_1(x_0, x_1, y_0, y_1), \dots) \end{aligned}$$

で定める. S_i, P_i は帰納的に

$$\begin{aligned} S_0^{p^i} + p S_1^{p^{i-1}} + \dots + S_i^{p^0} &= X_0^{p^i} + p X_1^{p^{i-1}} + \dots + p^i X_i^{p^0} \\ P_0^{p^i} + p P_1^{p^{i-1}} + \dots + P_i^{p^0} &= (X_0^{p^i} + p X_1^{p^{i-1}} + \dots + p^i X_i^{p^0}) (Y_0^{p^i} + p Y_1^{p^{i-1}} + \dots + p^i Y_i^{p^0}) \end{aligned}$$

で定める. $x \in R$ の $\varprojlim \mathbb{O}_C$ への写像 $\Sigma (x^{(0)}, x^{(1)}, \dots)$

と書く. $\Theta: W(R) \rightarrow \mathbb{O}_C: (x_0, x_1, \dots) \mapsto \sum p^n x^{(n)}$

は環の準同型で核は単項 ideal である. $\ker \Theta = (\pi)$ とおく.

環 A_{cris} は $W(R)$ の p -adic 完備化である。 $\mathbb{Z}_p(1) \subset \varprojlim \mathbb{Q}_p(i) \subset R$ とみなす。 $\xi \in \mathbb{Z}_p(1)$ の生成元とし $[\xi] = (\xi, 0, \dots, 0) \in W(R)$ を Teichmüller lifting とする。 $\theta([\xi]) = 1$ であるから $t = \log[\xi] = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{([\xi]-1)^i}{i!} \in A_{\text{cris}}$ とする。 $B_{\text{cris}}^+ = A_{\text{cris}}[\frac{1}{p}]$ 。 $B_{\text{cris}} = B_{\text{cris}}^+[\frac{1}{t}]$ とおく。

$A_{\text{cris}}, B_{\text{cris}}$ は自然な G_K -作用を受ける。 また R の p -adic 完備化は $A_{\text{cris}}, B_{\text{cris}}$ の Frobenius φ を誘導する。 $A_{\text{cris}}, B_{\text{cris}}$ の filtration を次のように定める。 まず $\text{Fil}^r B_{\text{cris}}^+ \subset \mathbb{Z}^m/m!$ $m \geq r$ を生成する B_{cris}^+ の ideal の閉包とする。 A_{cris} の filtration は $\text{Fil}^r A_{\text{cris}} = \text{Fil}^r B_{\text{cris}}^+ \cap A_{\text{cris}}$ で定める。 B_{cris} の filtration は $\text{Fil}^r B_{\text{cris}} = \bigcup_i t^{-i} \text{Fil}^{r+i} B_{\text{cris}}^+$ で定める。

$V \subset G_K$ の有限次元 p -adic 表現とする。 $D(V) = (B_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ とおく。 $B_{\text{cris}}^{G_K} = k_0$ であるので $D = D(V)$ は k_0 線型空間となる。 これは有限次元で $\dim_{k_0} D \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ である。 φ は D 上の Frobenius φ を誘導する。 $\sigma \in k_0$ の Frobenius とすると φ は σ -linear である。 さらに $k = k_0$ のときは D に B_{cris} の filtration を誘導する φ -filtration を考える。 V が crystalline であれば $V = \text{Fil}^0(D \otimes B_{\text{cris}})^{\varphi=1}$ となる。

V は Frobenius を持つ filtered 加群 D から回復される. ここで $D \otimes B_{\text{cris}}$ の filtration は D の filtration と B_{cris} の filtration の $\otimes$ 積であり, $\varphi=1$ は $\{x \mid \varphi(x)=x\}$ を意味する.

$V \in \mathcal{G}_k$ の crystalline p -進表現とする. V の L -因子, Σ -因子は対応する $D = D(V)$ を定める Weil 群 W_k の不変表現の L -因子, Σ -因子として定義する. k の剰余体 $\mathbb{F}$ の位数を q とする. D の Frobenius φ は σ -linear T_1, T_2 から φ^d は k_0 線型になる. ここで $\text{Fr}_{\mathbb{F}}$ の作用を φ^d と定めることにより, Weil 群 W_k の不変表現 k_0 表現 D がえらえる. L -因子は

$$L_k(V, t) = \det(1 - \varphi^d t : D)^{-1} \in k_0[t].$$

となる. 加法的指標 ψ に対し Σ -因子は

$$\Sigma_k(V, t) = \det(\varphi^{d \cdot \text{ord} \psi} : D) \cdot q^{\text{ord} \psi \cdot \dim V} \in k_0^\times$$

となる.

5. Motive と p -進 Hodge.

k を代数体とし, V を k 上の motive の実現. $\Sigma \ni s$ の外で V が good reduction を持つような有限素点の有限集合とする. $v \in \Sigma$ にはいらない有限素点とする. すると $v|p$ に対し,

$\mathcal{G}_k$ の p -進表現 V_p は crystalline 表現になる. さらに固有多次項式 $\det(1 - \varphi^d t : D_{V_p})$ は $\mathbb{Q}$ 係数であり, $p \neq \ell$ に対する $\det(1 - \text{Fr}_v t : V_\ell)$ と一致すると考えられる.

よって L 因子. Σ 因子は V_p により定義しても V_ℓ により定義しても同じものかえられる. (したがって有限素点に於ては、~~ある~~ $v|p$ ならば v も Σ とする素数 p とすれば、 L 因子. Σ 因子はすべて $\mathbb{C}_\ell$ の p 進表現 V_p のみで定まる.

無限素点についても、 L 因子. Σ 因子は上の p が p の上にある素点 v で不分岐なものを持つ. 次のように V_p だけで定まる. VadeRham 実現 D は有限減少 filtration を持つ k 線型空間であり. 各無限素点 v での Hodge 構造に現れる有限減少 filtration を持つ k_v 線型空間は D の k_v への係数拡大である. 一方 v も上のような素点とすると、 $D_v = D(V_p)$ 有限減少 filtration を持つ k_v 線型空間 $D_v = D(V_p) = (B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_p)^{\text{Gal}(\bar{k}_v/k_v)}$ は D の k_v への係数拡大である. (したがって各無限素点での Hodge 数 $h^{R,0}$ は ~~素点による~~ ^{素点による} D_v の filtration から定まるもの) に一致する. さらに各素点 ~~無限素点~~ ^{素点} v に於て F_v の V_v への作用の固有値 $(-1)^a$ の重複度は V_p への作用の $(-1)^a$ の重複度と一致する a で、重さ n が偶数 a と奇数の $\ell^{\frac{n}{2}, \pm}$ も V_p から定まる. L 因子. Σ 因子は Hodge 数 $h^{R,0}, \ell^{\frac{n}{2}, \pm}$ で定まるから、各無限素点に於ても L 因子. Σ 因子はただ一つの p 進表現 V_p だけで定まることかわかった.

これで定理の正確な定式化を与えることができる.

定理 m を偶数とし、 $V \in G_{\mathbb{Q}}$ の有限個の有限素点を除いて不分岐な p 進表現で、非退化対称双一次形式 $V \times V \rightarrow \mathbb{Q}_p(-m)$ を持つものとする。 V の $G_{\mathbb{Q}}$ への制限は crystalline と (さらに $D = D(V) = (B_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_{\mathbb{Q}}}$ の filtration は $\text{Fil}^{\frac{m}{2} + \frac{p-1}{2}} = 0$ を満たす) とする。このとき $p \neq 2$ ならば

$$\prod_{v: \mathbb{Q} \text{ の素点}} w_v(V) = 1$$

となる。

§0 と全く同様の議論により、これは次の定理から従う。
定理' $V \in G_{\mathbb{Q}}$ の有限次元 p -進表現で crystalline とする。

$D = D(V)$ の filtration は $\text{Fil}^{\frac{p-1}{2}} = 0$ を満たすとする。 $\ell(D) = \sum_{i \geq 0} i \dim_{\mathbb{Q}_p} G_{\mathbb{Q}}^i(D)$ とおくと $p \neq 2$ ならば

$$\text{SW}_2(V) = (-1)^{\ell(D)}$$

6. 二次形式と直交表現.

k を標数が 2 でない体とし、 V を有限次元 k 線型空間とし、 $g: V \rightarrow k$ を ~~非退化対称双一次形式~~ ^{非退化} 二次形式とし、

$b(x, y) = g(x+y) - g(x) - g(y)$ に対応する 対称双一次形式 とする。 V の直交基底 $(x_1, \dots, x_n)$ をとり $a_i = g(x_i)$ とおく。

V の判別式 $\prod_{i=1}^n a_i \in k^\times / k^{\times 2} = H^1(k, \mathbb{Z}/2)$ を V の $\#1$ Hasse-Witt 類とよび $\ell w_1(V)$ と書く。 $\#2$ Hasse-Witt 類 $\ell w_2(V) \in$

$H^2(k, \mathbb{Z}/2)$ の mod 2 char 類を applying

principle - 2.12.3

$$\ell w(D) = \ell w_1(V) + \ell w_2(V) \in \bigoplus_{i \geq 0} H^i(k, \mathbb{Z}/2)$$

$H^2(k, \mathbb{Z}/2)$ は $\sum_j \{a_i, a_j\}$ と定義される. ここで

$\{a_i, a_j\}$ は $a_i, a_j \in H^1(k, \mathbb{Z}/2)$ の cup 積 $a_i \cup a_j$ である. D と もう一つの $\mathbb{Z}/2$ 二次形式 V を k 線型空間 V としたとき

$$h w_2(D-V) = h w_2(D) + h w_2(V) + (h w_1(D) - h w_1(V)) h w_1(V)$$

とある. (= 44 頁起 mod 2 Chen 題 $h w(D-V) = h w(D) h w(V)$)

(V, g) の Clifford 環 $Cl(V)$ と

$$Cl(V) = \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes n} \right) / (x \otimes x - g(x) : x \in V)$$

と定義する. $\dim Cl(V) = 2^{\dim V}$ である. Clifford 群 $C(V)^{\times}$ と

$$C(V)^{\times} = \{x \in Cl(V)^{\times} \mid x \text{ は odd } \neq \text{ even } \text{ かつ } Ix \cup x^{-1} = V\}$$

とある. ここで $Cl(V) = Cl(V)^+ \oplus Cl(V)^-$ と直和に書いたとき $x \in Cl(V)$ が odd (resp. even) とは $x \in Cl(V)^-$ (resp. $x \in Cl(V)^+$) となることである. x odd ならば $Ix = -x$, x even ならば $Ix = x$ である. $\iota: Cl(V) \rightarrow Cl(V)$ を V の identity を誘導する anti-involution とすると $N(x) = \iota x$ は準同型 $N: C(V)^{\times} \rightarrow K^{\times}$ を定める. $\tilde{O}(V)$ と $\ker N$ とする. $O(V)$ は鏡映により生成されるので $C(V)^{\times} \rightarrow O(V): x \mapsto (v \mapsto Ix \cdot v \cdot x^{-1})$ は全射である. この核は $K^{\times}$ に一致する.

これより ~~完全列~~ 完全列

$$1 \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow \tilde{O}(V) \rightarrow O(V)$$

とえる. $\{\pm 1\}$ は $\tilde{O}(V)$ の中心にはいり. $\tilde{O}(V) \rightarrow O(V)$ は k が
分離閉なら全射である. したがってこの時は中心拡大

$$1 \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow \tilde{O}(V) \rightarrow O(V) \rightarrow 1$$

が得られる. これから定まる Galois cohomology の 整群導同型

$$Sp: O(V) \rightarrow H^1(k, \mu_2) = k^\times / k^{\times 2}$$

を spinor norm という. これは図式

$$\begin{array}{ccc} C(V)^\times & \longrightarrow & O(V) \\ N \downarrow & & \downarrow Sp \\ k^\times & \longrightarrow & k^\times / k^{\times 2} \end{array}$$

と可換になる.

$k = \mathbb{Q}_p$ と $\varphi: G_k \rightarrow O(V)$ を p -進直交表現と取る. $C = \hat{\mathbb{Q}}_p^\wedge$
と取る. C は閉体だから中心拡大

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \tilde{O}(V_C) \rightarrow O(V_C) \rightarrow 1$$

がえられる. これを $G_k \rightarrow O(V)$ で μ_2 を $\mathbb{Z}/2$ と $\mathbb{Z}/2$ に入る中
心拡大の類を V の $\mathbb{Z}/2$ Stiefel-Whitney 類 $sw_2(V) \in H^2$

$(k, \mathbb{Z}/2)$ と取る. $\mathbb{Z}/2$ Stiefel-Whitney 類 $sw_1(V)$ は

V の determinant $\det \varphi \in H^1(G_k, \mu_2) = H^1(G_k, \mathbb{Z}/2)$ と
ある.

V の spinor 類 $Sp(V) \in H^2(k, \mu_2)$ は次のように定義される.

$\varphi: G_k \rightarrow O(V)$ と spinor norm の合成 $Sp \circ \varphi$ は $\text{Hom}(G_k, k^\times / k^{\times 2})$

$\simeq H^1(k, \mathbb{Z}/2) \otimes H^1(k, \mu_2)$ の元を定めるから、その cup 積による $H^2(k, \mu_2)$ での像として $Sp(V)$ が定義される。

命題. 記号は前節の定理のとおりとする。そのとき

$$SW_2(V) = h^2(D-V) + Sp(V)$$

となる。

略証. 上の中心拡大

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \tilde{O}(V) \rightarrow O(V) \rightarrow 1$$

① 自明な G_k -作用と自然な G_k -作用の 2 つの作用について、boundary map $H^1(k, O(V_c)) \rightarrow H^2(k, \mu_2)$ による。

$S \in \text{Hom}(G_k, O(V))$ を定める H^1 の元 ^(の像) を考える。 $SW_2(V)$ は定義により、自明なもの ^に 像に等しい。Cochain の計算により、 $Sp(V)$ はその両者の差に等しい。したがって自然なものの像が $h^2(D-V)$ となることをみればよい。それは Hodge-Tate 分解を使って示す。

定理' を示すには命題により、 $h^2(D-V), Sp(V)$ を D の Hodge 数を使って計算すればよいが、紙数も超過して、 $\times$ 切も過ぎてしまったので、それは Fontaine-Lafaille 理論を使って示すと述べるにとどめたい。雑な説明になつたこととお詫びします。詳しくは文献 [5] を御覧下さい。