

Lie環の歪対称表現作用素に関する一注意

京大 理 野村隆昭

G を実 (又は複素) Lie群, $\mathfrak{g}$ は G の Lie環, $\{U, \mathcal{H}\}$ を G のユニタリ表現とする. $\mathcal{H}_\infty(U)$, $\mathcal{H}_0(U)$ をそれぞれ, U に対する C^∞ -vectors の全体, Gårding の部分空間とする. $X \in \mathfrak{g}$, $x \in \mathcal{H}_\infty(U)$ (resp. $x \in \mathcal{H}_0(U)$) に対して, $U_\infty(X)x$ (resp. $dU(X)x$) を次の様に定義する.

$$\left. \begin{array}{l} U_\infty(X)x \\ dU(X)x \end{array} \right\} = \left. \frac{d}{dt} U(\exp tX)x \right|_{t=0}$$

ここに $\exp$ は $\mathfrak{g}$ から G への指数写像を表す. よく知られている様に, $X \mapsto U_\infty(X)$ (resp. $X \mapsto dU(X)$) は $\mathfrak{g}$ の歪対称作用素 ($A^* = -A$) による表現になる. 一方で Stone の定理から, (一意的に) 自己共役作用素 H があって, $U(\exp tX) = e^{-itH}$ となる. 明らかに $dU(X) \subset U_\infty(X) \subset -iH$ であるが, 実は $\overline{dU(X)} = \overline{U_\infty(X)} = -iH$ が成立する. ($\overline{}$ は作用素の閉包) この事実はよく知られている (Warner [4, p. 269])

ただし証明はなし)。しかしこれだけを取りあげた簡単な証明は見当たらない。そこでこの初等的な証明を与える。

$X \in \mathfrak{g}$ を固定し, $G_0 = \{\exp tX; t \in \mathbb{R}\}$ とおく. $V \in U$ の G_0 への制限とし, V に対しても $dV(X)$ を定義しておく. 明らかに $dV(X) \subset -iH$ であるが次の補題が成立する. (以下 Haar 測度はすべて左不変とする)

補題 1. $dV(X) = -iH$.

証明. G_0 は可換であるから, $\forall x \in \mathfrak{g}, \forall \varphi \in C_0^\infty(G_0)$ に対して

$$V(\exp tX) \int_{G_0} \varphi(q) V(q) x \, dq = \int_{G_0} \varphi(q) V(q) V(\exp tX) x \, dq$$

今 $x \in \text{Dom}(H)$ とすると

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{V(\exp tX) - 1}{t} \int_{G_0} \varphi(q) V(q) x \, dq + i \int_{G_0} \varphi(q) V(q) Hx \, dq \right\| \\ & \leq \int_{G_0} |\varphi(q)| \, dq \left\| \frac{V(\exp tX) - 1}{t} x + i Hx \right\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

ゆえに

$$(1) \quad dV(X) V_\varphi x = -i V_\varphi Hx \quad (x \in \text{Dom}(H)),$$

そこで

$$V_\varphi x = \int_{G_0} \varphi(q) V(q) x \, dq.$$

$\varphi_m \in C_0^\infty(G_0)$ を Dirac sequence とし $x_m = V_{\varphi_m} x$ とおく. 明らかに $x_m \in \mathfrak{H}_0(V) = \text{Dom}(dV(X))$ であり, $x_m \rightarrow x$ である.

さらに(1)より, $dV(X)x_m = dV(X)V_{\varphi_m}x = -iV_{\varphi_m}Hx \rightarrow -iHx$. よって $\overline{dV(X)} \supset -iH$. (証明終)

G' を実(又は複素) Lie 群, $\mathfrak{g}'$ を G' の Lie 環, $\{T, X\}$ を G' の強連続な, 有界作用素による表現とする. (X は Banach 空間) 前と同じく dT を定義する.

補題 2 (Nelson and Stinespring [3, Theorem 1.1])

$Y \in \mathfrak{g}'$ とし, $S \in$ 次の (i), (ii) を満たす closable 作用素で, $\text{Dom}(S)$ は X で稠密とする.

$$(i) \quad T_{\varphi} \cdot \text{Dom}(S) \subset \text{Dom}(S) \quad \text{for } \forall \varphi \in C_0^{\infty}(G').$$

$$(ii) \quad S T_{\varphi} x = T_{Y \cdot \varphi} x \quad \text{for } \forall x \in \text{Dom}(S), \forall \varphi \in C_0^{\infty}(G').$$

$$(\text{ただし, } Y \cdot \varphi(q) = \frac{d}{dt} \varphi(\exp(-tY)q) \big|_{t=0})$$

このとき, $\overline{S} \supset dT(Y)$.

$$\text{定理} \quad \overline{dU(X)} = \overline{U_{\infty}(X)} = -iH.$$

換言すれば, $i dU(X), i U_{\infty}(X)$ は本質的に自己共役.

証明. V を補題 1 に与えるものとする. 補題 2 を $\{T, X\} = \{V, \mathcal{H}\}$, $S = dU(X)$, $Y = X$ として適用する. 条件 (i) を検証しよう. すなわち, $x \in \mathcal{H}_0(U)$ i.e. $x = U\varphi y$ (なる元の有限一次結合) ($\varphi \in C_0^{\infty}(G)$, $y \in \mathcal{H}$) に対して, $V_{\varphi}x \in \mathcal{H}_0(U)$ ($\forall \varphi \in C_0^{\infty}(G_0)$) を示す.

$$V_{\varphi}x = \int_{G_0} \varphi(q_0) V(q_0) \left\{ \int_G \psi(q) U(q) y \, dq \right\} dq_0 =$$

$$= \int_{G_0} \int_G \varphi(g_0) \psi(g_0^{-1}g) U(g) \eta \, dg \, dg_0$$

$$= \int_G \left\{ \int_{G_0} \varphi(g_0) \psi(g_0^{-1}g) \, dg_0 \right\} U(g) \eta \, dg \in \mathcal{G}_0(U)$$

条件(ii)は $V = U|_{G_0}$ よりただちにわかる。ゆえに補題2から $\overline{dU(X)} \supset dV(X)$ 。両辺の隙包を考えると補題1から $\overline{dU(X)} \supset -iH$ 。(証明終)

References

- [1] Gårding, L., Note on continuous representations of Lie groups, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 33(1947), 331-332.
- [2] Jørgensen, P. E. T., Representation of differential operators on a Lie group, J. Funct. Anal. 20(1975), 105-135.
- [3] Nelson, E. and Stinespring, W. F., Representation of elliptic operators in an enveloping algebra, Amer. J. Math. 81(1959), 547-560.
- [4] Warner, G., Harmonic analysis on semisimple Lie groups I, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.