

直線束に対する強 Lefschetz 型定理とその応用

大阪大・教養 梶 一郎

M を n 次元コンパクトケーラー多様体, ω を M のケーラー形式とする. 微分形式に ω を外積させる作用を L とかく. L は de Rham または Dolbeault コホモロジー群の準同型を引きおこす. 古典的な強 Lefschetz 定理により,

$$L^{\delta} : H^{n-\delta}(M, \mathbb{C}) \rightarrow H^{n+\delta}(M, \mathbb{C})$$

は同型となる. 特に Hodge 分解により, 次の同型:

$$L^{\delta} : H^0(M, \Omega^{n-\delta}) \cong H^{\delta}(M, \Omega^n).$$

これをベクトル束係数コホモロジーに拡張することを考える. E を M 上のベクトル束とする. E -係数であつても L は同様に定義され, 次の通り立つ:

定理 1. M を n -次元コンパクトケーラー多様体, E を M 上の Griffiths の意味で, 半正なベクトル束とすると,

$$L^{\delta} : H^0(M, \Omega^{n-\delta}(E)) \rightarrow H^{\delta}(M, \Omega^n(E)), \delta > 0$$

は全射となる.

Griffithsの意味で半正であることの定義は, (定理1の証明とともに)後ではあるが, 次と同値である: 「 $P(E)$ を E の射影化 ($P(E)_x$ は E_x の line 全体), F を $P(E)$ 上のトートロソカル直線束とするとき, $c_1(F)_{\mathbb{R}}$ の実 d -閉 (1, 1)-形式による代表元 ϕ で, M 上各点で半正定値となるものがある。」

直線束が Griffiths の意味で半正であるとき, 単に 半正 といふことにする. 前節によっても注意されたいように [], Kollar の単射定理 [] は半正直線束に対しても成り立つ (Kollar は直線束の適当な巾が大域切断で生成されている場合を示した):

Kollar の単射定理 M を $\underbrace{\text{コンパクトリーマン多様体}}_{n=2\ell}$

F を M 上の半正直線束とする. このとき, $\Delta \in H^0(M, F^{\otimes k})$ とランソル積をとってえられる半同型

$$\Delta \otimes \cdot : H^2(M, \Omega^n(F^{\otimes m})) \rightarrow H^2(M, \Omega^n(F^{\otimes(m+k)})), \quad m \geq 0,$$

は, $\Delta \neq 0$ なら単射である.

さて, さまざまな応用のために, 半正直線束のみならず 数値的半正 (nef) 直線束 にまで拡張しておくことが望ましい. したがってコンパクトリーマン多様体 M 上の直線束 F が 数値的半正 であるとは次のように定義する: $c_1(F)_{\mathbb{R}}$ が,

M のケーラー-錐の $H^2(M, \mathbb{R})$ における閉包に属していること、すなわち、 ω を M のケーラー-形式としたとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、 $c_1(F)_{\mathbb{R}}$ の実 d -閉 $(1,1)$ -形式による代表元 φ_ε で、 $\varphi_\varepsilon + \varepsilon \omega$ が M の外で正定値となるものがあること。

もちろん直線束が半正であるが、数値的半正であるが、逆に一般に成り立っている：藤本による反例がある。実は、上の強Lefschetz型定理も弱型定理も数値的半正直線束で一般に成り立っている。この場合も、藤本の例が反例になる、ということの後で示す。

応用を2つあげる。 F が数値的半正直線束のとき、

$$\nu(F) := \max \{ k \mid c_1(F)_{\mathbb{R}}^k \neq 0 \text{ in } H^{2k}(M, \mathbb{R}) \}$$

とおく ($c_1(F)_{\mathbb{R}} = 0$ のときは、 $\nu(F) = 0$ とする)。

定理2 M をコンパクトケーラー多様体とし、 M の標準束 K_M が $\mathbb{Q}$ -直線束とし $K_M = F + E$ と半正直線束 F と effective divisor E に分解されているとすると、

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^{\nu(F)}} \dim H^0(M, K_M + \nu F) > 0$$

なる、 $\kappa(M) = \nu(F)$ 、すなわち

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^{\nu(F)}} \dim H^0(M, \nu K_M) > 0$$

となる。

定理 3 M をコンパクトケーラー多様体, $D = \sum_j a_j D_j$
 (正則 divisor) $\in M$ の effective 因子 (各 D_j は 被約かつ既約) とし,

$$D_0 = \sum_{a_j=b} D_j, \quad b = \max_j a_j$$

とす. $[D]$ が半正であれば, 制限写像

$$H^2(M, K_M + mD) \rightarrow H^2(D_0, K_M + mD), \quad m \geq 0,$$

は全射.

§. 定理の証明について.

M を n 次元コンパクトケーラー多様体, E をその上のベクトル束とする. E のエルミート計量 R と, M のケーラー計量 (ケーラー形式と同視) ω を固定する. E の複素構造とエルミート計量 R から E のエルミート接続 ∇ が定まる. ∇ に関する共変外微分を d^R とし, その $(1,0)$ -成分を ∂_R (または単に ∂) とかく. ($(0,1)$ -成分は $\bar{\partial}$). R の曲率 $R := (d^R)^2$ は $\text{End}(E)$ -値の $(1,1)$ -形式となる.

R と M のケーラー計量 ω から定まる E -値 p -形式 (etc) に対する M 上の L^2 -内積を $(\cdot, \cdot)$ とかく. ケーラー形式を外積させた作用素 L の, この内積に関する共変的随伴作用素を $\bar{L}$, $\partial_R, \bar{\partial}$ のを, それぞれ $\partial_R^*, \bar{\partial}^*$ とかく. これらの間には, 次の関係が成り立ち, かつ:

$$(4) \quad \begin{cases} \partial_R^* L - L \partial_R^* = -\sqrt{-1} \bar{\partial}, & \bar{\partial}^* L - L \bar{\partial}^* = \sqrt{-1} \partial_R, \\ \partial L - L \partial = -\sqrt{-1} \bar{\partial}^*, & \bar{\partial} L - L \bar{\partial} = \sqrt{-1} \partial_R^*. \end{cases}$$

ここで, 2つのラプラシアン

$$(5) \quad \begin{aligned} \square_{\bar{\partial}} &= \bar{\partial} \bar{\partial}^* + \bar{\partial}^* \bar{\partial}, \\ \square_{\partial_R} &= \partial_R \partial_R^* + \partial_R^* \partial_R \end{aligned}$$

を考えよと, 上の関係式により,

$$\square_{\bar{\partial}} = \square_{\partial} + \sqrt{-1}(R\bar{\partial} - \bar{\partial}R)$$

が成り立つ.

(E, R) が Griffiths の意味で 半正であるとき,

各 $\zeta \in E_x$, $\alpha \in M$, に対し, $R(R\zeta, \zeta)$ が, 半正定値であることである. R をうまく選べば (E, R) が半正になること, 単に E が半正であるという.

さて $L^{\delta} : \{ (m, g, 0) \text{-形式} \} \rightarrow \{ (m, g) \text{-形式} \}$ は, 各点ごとに同型なる, ている. ($m = \dim M$). 実際 (m, g) -形式 ζ に対し, $\zeta = (1/g!)^2 L^{\delta}(L^{\delta}\zeta)$ である. しかし, このベクトル束に対する強 Lefschetz 型定理は次の通り.

命題 6. (E, R) が半正であるとき, E -値 (m, g) -形式

ζ に対し,

$$\square_{\bar{\partial}} \zeta = 0 \iff \begin{cases} \bar{\partial} L^{\delta} \zeta = 0 \text{ i.e., } L^{\delta} \zeta \in H^0(M, \Omega^{m-g}(E)) \\ R L^{\delta} \zeta = 0. \end{cases}$$

命題 6 の証明 ζ は (m, g) -形式なので, $\partial_R \zeta = 0$ かつ $R\zeta = 0$ である. (5) より,

$$\|\bar{\partial}\zeta\|^2 + \|\partial^*\zeta\|^2 = (\square_{\bar{\partial}}\zeta, \zeta) = \|\partial_R^*\zeta\|^2 + (FR\zeta, \zeta).$$

また (4) と $\zeta = (1/g!)^2 L^{\delta} \wedge \bar{\partial}^{\delta} \zeta$ より,

$$(g!)^2 \partial_R^* \zeta = -\sqrt{-1} \bar{\partial} L^{\delta-1} \bar{\partial} \wedge \bar{\partial}^{\delta} \zeta - \sqrt{-1} L^{\delta} \wedge \bar{\partial} \wedge \bar{\partial}^{\delta} \zeta.$$

($\Leftarrow$) $\bar{\partial} \wedge^{\delta} \zeta = 0$ かつ $R\zeta = 0$ する上の 2 つから, したがって $\bar{\partial}\zeta = 0$ かつ $\partial^*\zeta = 0$ するから $\square_{\bar{\partial}}\zeta = 0$ とする.

($\Rightarrow$) (E, R) が 非正なので,

$$\sqrt{-1}(R\zeta, \zeta) \geq 0. \quad ("=0" \Leftrightarrow R\zeta = 0)$$

とする. したがって $R\zeta = 0$. また $\bar{\partial}\zeta = 0$ より,

$L^{\delta} \bar{\partial} \wedge^{\delta} \zeta = 0$ するから $\wedge \bar{\partial} \wedge^{\delta} \zeta = 0$. 再び上の 2 つを用いて, $\partial_R^* \zeta = 0$, $\bar{\partial} \wedge^{\delta} \zeta = 0$ を得る. ■

Kollar の単射定理も命題 6 から得られ, 実際, ζ が F^m -値形式かつ (m, g) -形式であれば, 命題 6 より, $\Lambda \otimes \zeta$ も調和形式になる. 実際, 命題 6 より, $\bar{\partial} \wedge^{\delta} \zeta = 0$ かつ $R\zeta = 0$. $\bar{\partial} \Lambda = 0$ のので, $\bar{\partial} \wedge^{\delta} \Lambda \otimes \zeta = \Lambda \otimes \bar{\partial} \wedge^{\delta} \zeta = 0$. $F^{0(m+k)}$ の曲率 R' は $(m+k)/m \cdot R$ (F の計量を R とし, F^{0m} ; $F^{0(m+k)}$ の計量は R^{0m} , $R^{0(m+k)}$ と表わす) であるから, $R' \wedge (\Lambda \otimes \zeta) = \Lambda \otimes \frac{m+k}{m} R \zeta = 0$.

定理2の証明には、次が用いられる:

命題 7 M を m 次元コンパクトケーラー多様体, ω を M のケーラー形式とする. TM を M の正則接束とし, $E = (TM)^{\otimes m}$ とおく. M の標準束 K_M が $\mathbb{Q}$ -直線束とし, $K_M = (\text{数値的半正直線束}) + (\text{effective divisor})$ と分解しているとき, 任意の連続部分層 $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(E)$, $r, s > 0$, に対し,

$$\sum_M c_1(\mathcal{F}) \wedge \omega^{m-1} \leq 0$$

となる.

定理3の証明について, 定理1, Kollarの単射定理により, "半正直線束" を次のような条件で認めることができる.

"直線束 F が, $\mathbb{R}$ -直線束として $F = F_0 + D$ と
(*) 分解する, ただし F_0 は半正直線束, D は積分可能な effective divisor"

ここで effective divisor $D = \sum a_j D_j$ (D_j は既約かつ既約) が積分可能であるとは, D_j の局所定義式を f_j としたとき, $1 / \prod_j |f_j|^{2a_j}$ が積分可能であること.

さて $F = F_0 + D$ が上の条件を満たしていて, (F_0, R_0) が半正であるとする. R_0 を無理やり F の計量とみなすと, これは, D に沿って, 丁度増大度が, $1 / \prod_j |f_j|^{2a_j}$ とする極

をもちこたえた。しかし、これは積分可能であるため、
 L^2 -理論は、あたかも D が正しいかのように成り立つ。したがって、定理 1, Kodaira の分解定理もそのまま成り立つ。

特に $\mathbb{Q}$ -effective divisor $D = \sum a_j D_j$ が半正のとき、
 そのくり上げ $\lceil D \rceil$ は (4) を満たしている。定理 3 の
 ように $b = \max_j a_j$, $D_0 = \sum_{a_j=b} D_j$ とおくと、
 $D - D_0 = \lceil (1 - \frac{1}{b}) D \rceil$ であるから、定理 3 が成り立つ。

§. 反例.

C を楕円曲線とする。 $H^1(C, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ のので、 C 上の
 任意 2 ベクトル束 E で、 $0 \rightarrow \mathcal{O}_C \xrightarrow{\Sigma} E \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$ (完全),
 $E \neq \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C$ となるものがあつた。 $S = \mathbb{P}(E)$ とおき、
 (1) の定める無限遠切断を Γ とかく。すると、 $K_S = -2\Gamma$
 で $[\Gamma]$ は数値的半正である。次が容易に示す。定理 1, 分解
 定理の数値的半正直線束は、一般に反例をとっている；

命題 8 a) $L: H^0(S, \Omega^1(mP)) \rightarrow H^1(S, \Omega^2(mP))$ は
 自明 (すなわち $=0$) ($m \geq 3$)

b) $\Delta \in H^0(S, P)$ を定義切断とすると、

$\Delta \otimes \cdot: H^1(S, mP) \rightarrow H^1(S, (m+1)P)$ は

自明 (すなわち $=0$) ($m \geq 1$)