

曲面上のグラフの多色彩色について

中本 敦浩*

1 平面グラフの多色彩色

幾何学の問題「美術館問題」[5] から始めよう： n 角形的美術館を監視するために、何台の監視カメラが必要だろうか。ただし、この美術館は図 1 左のようなたいへん奇妙な形をしているかもしれない。また、1 台の監視カメラは遮るものがない限り、どんなに遠くも見ることができ、その視野は 360° であるとする。

その答えは $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 台以下であり、さらに、ちょうど $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 台の監視カメラを必要とする美術館が存在する [6]。以下にその証明の概略を示す：その鍵は「頂点数 $n \geq 3$ 以上の極大外平面グラフ¹は proper 3-彩色²を持つ」ことである。さて、 n 角形的美術館 A に対角線を適当に引くことにより、極大外平面グラフ G が得られる。このとき、 G は proper 3-彩色 $c: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ を持つ。この 3-彩色 c において、 G の各三角形面の 3 隅には 1, 2, 3 の色がすべて現れているため、どの $i \in \{1, 2, 3\}$ についても、 $c^{-1}(i)$ に監視カメラを置けば A の内部全体が見渡せる。 $|c^{-1}(1)| + |c^{-1}(2)| + |c^{-1}(3)| = n$ であるから、ある i について、 $|c^{-1}(i)| \leq \frac{n}{3}$ である。ここに、監視カメラを置けばよい。(最良性を示す例は省略する。)

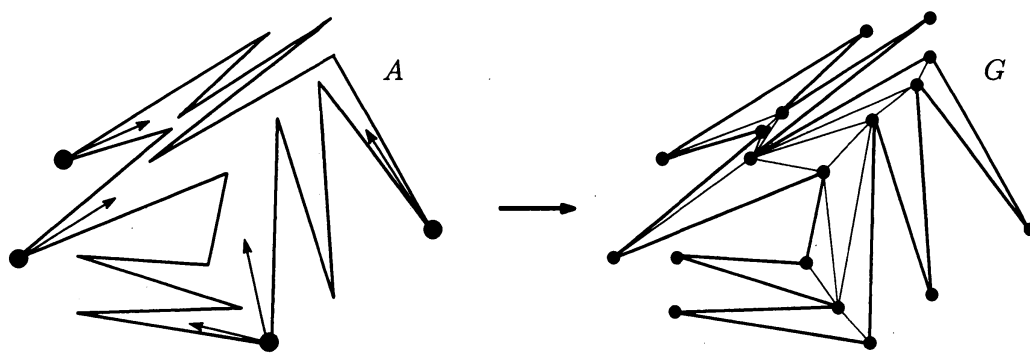


図 1: 奇妙な 18 角形美術館 A とそれに対する 18 頂点の極大外平面グラフ G

本問題の「組合せ論バージョン」を考えよう。平面グラフ G のすべての面を見るために、いくつかの監視カメラを置けばよいだろうか。ただし、頂点 v が面 f の境界閉歩道上にあるとき、 f の形によらず v から f が見えるものとする。グラフ理論的に定義しよう：平面グラフ G において、頂

*240-8502 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-2 横浜国立大学 環境情報研究院 Email: nakamoto@ynu.ac.jp

¹平面上に描かれた n 角形の内部に交差なく $n-3$ 本の対角線を引いて得られるグラフ

²グラフ G の k -彩色とは写像 $c: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ であり、 k -彩色 c が proper であるとは、任意の辺 $xy \in E(G)$ に対して、 $c(x) \neq c(y)$ を満たすことである。

点集合 $S \subset V(G)$ が面被覆であるとは、 G の任意の面 f に対して、ある $s \in S$ が f の境界閉歩道上にあることである。このとき、 $\lambda(G) = \max\{|S| : S \text{ は } G \text{ の面被覆}\}$ が求めたい。

平面グラフ G の k -彩色 c が多色的である (polychromatic) とは、 G のすべての面の境界閉歩道上の頂点にすべての k 色が現れることである。例えば、図2が立方体グラフの多色 proper 4-彩色である (色 1, 2, 3, 4 がすべての面の境界上に現れていることがわかる)。ここで、多色彩色は必ずしも proper でないことに注意しよう。したがって、もし平面グラフ G が多色 k -彩色を持てば ($k \geq 2$)、 k 番目の色を $(k-1)$ 番目の色に塗り替えることにより、 G は多色 $(k-1)$ -彩色も持つことがわかる。ゆえに、 G が多色 k -彩色を持つための k の最大値が存在し、それを G の多色染色数 (polychromatic number, $p(G)$ と表す) という。平面グラフ G が多色 k -彩色 $c: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ を持つとき、各 $i = 1, \dots, k$ に対して、 $c^{-1}(i)$ は G の面被覆である。ゆえに、 $\lambda(G) \leq \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ であり、 $\lambda(G) \leq \lfloor \frac{n}{p(G)} \rfloor$ が得られる。上では平面グラフに対する多色彩色の定義を行ったが、平面 (球面) 以外の曲面上のグラフについても多色彩色、多色染色数、面被覆が同様に定義できる。

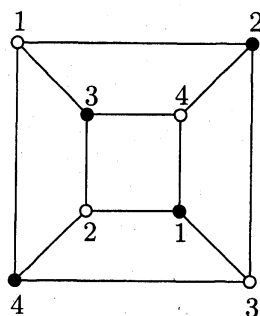


図 2: 立方体グラフの多色 proper 4-彩色

平面グラフ G の面の最小次数³を $g(G)$ とおくと、明らかに $p(G) \leq g(G)$ である。Mohar と Škrekovski は、頂点数 2 以上のどんな平面グラフも多色 2-彩色を持つことを証明した [11]。 (平面グラフ G の全域 forest F を考えよう。 F は 2 部グラフだから、その頂点 2-彩色が G の多色 2-彩色である。) また、どんな平面偶三角形分割⁴も多色 proper 3-彩色を持つ。したがって、平面三角形分割の多色染色数は 2 以上 3 以下であり、多色染色数 3 となるものは偶三角形分割である。一方、平面グラフ G について、 $p(G) \geq \lfloor \frac{3g(G)-5}{4} \rfloor$ が成立することも知られている [1]。また、最大次数 3 以下の平面グラフが、 K_4 でも K_4 の 1 辺を 1 頂点で細分したものでなければ、多色 3-彩色を持つ [8]。

次数 3 以下の面を持たない平面グラフの多色彩色について、何が言えるだろうか。Hoffmann と Kriegel は頂点数 3 以上のどんな平面 2 部グラフ G も、辺の追加により、偶三角形分割に変形できることを証明した [7]。平面偶三角形分割は多色 proper 3-彩色可能であるから、 G も多色 proper 3-彩色可能である。一方、平面四角形分割は必ずしも多色 4-彩色を持たない：図 3(1) の構造を持つどんな平面 2 部グラフも多色 4-彩色を持たないことがわかる。(このことは、図 3(2) の次数 3 の頂点が色 “1” を持つとき、その周りの 6-閉路が本質的に色 “2,3,4,2,3,4” を持つことから導かれる。) この場合、平面 2 部グラフ G が次数 4 の頂点を持つので、次の定理ではそれらを禁止している。

定理 1 (Horev et al. [9]) どんな 3-正則平面 2 部グラフも多色 proper 4-彩色を持つ。

オイラーの公式から、どんな 3-正則平面 2 部グラフも四角形面を持つので、定理 1 における “4” は最良である。また、定理 1 から、 n 頂点のどんな 3-正則平面 2 部グラフについても、 $\lambda(G) \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$

³面 f の次数とは、 f の境界閉歩道の長さを表す。

⁴各頂点の次数が偶数の三角形分割

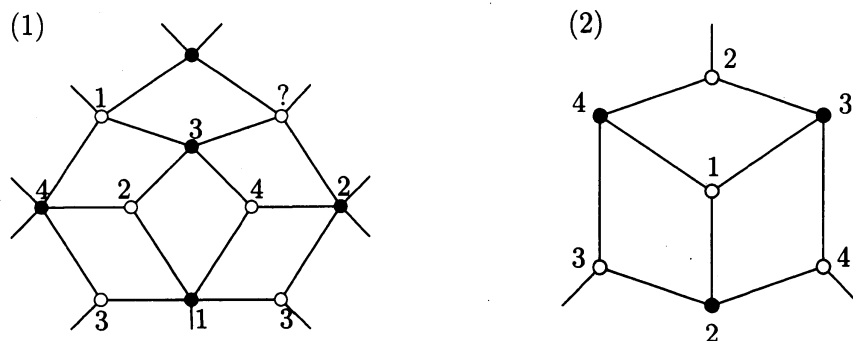


図 3: (1) 多色 4-彩色を持たない構造 (2) 次数 3 の頂点の周りの一意的多色 4-彩色

となる面被覆を持つ. 一方, プリズム $C_{4k} \times K_2$ を考えれば, この評価も最良になっている.

以下に, 定理 1 の証明の概略を述べる:

定理 1 の証明の概略. 3-正則平面 2 部グラフに対して, 図 4 に示した 2-bridging, hexagon addition と呼ばれる 2 つの変形を定義する. すると, 3-連結 3-正則平面 2 部グラフ全体は, 図 2 に示された立方体グラフから, これらの 2 つの変形を用いて生成されることが示される [3]. (本来なら, 3-連結でない 3-正則平面 2 部グラフのことにも触れる必要があるが, ここでは詳述しない.) このとき, G が多色 proper 3-彩色を持つならば, 簡単な場合分けにより, G から 2-bridging で得られたどのようなグラフも, また, G から hexagon addition で得られたどのようなグラフも, 多色 proper 3-彩色を持つことが示される. 一方, 図 2 により, G が立方体グラフなら定理が成り立つので, 頂点数に関する数学的帰納法が動く. ■

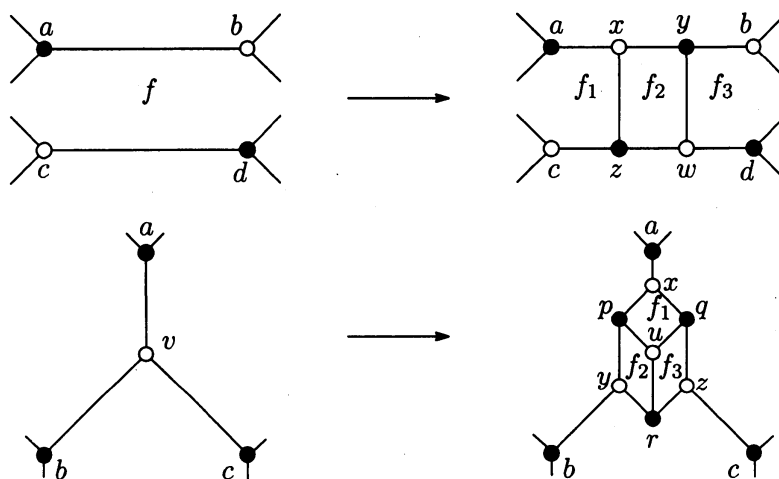


図 4: 2-bridging と hexagon addition

2 その他の曲面上のグラフの多色彩色

前節では、平面グラフの多色彩色について述べた。本節では、平面（球面）以外の曲面上のグラフの多色彩色を考える。定理1の証明から、曲面 F^2 上の3-正則偶角形分割⁵について、2-bridging と hexagon addition に関する極小グラフを決定し、かつ、その極小グラフのすべてが多色 proper 4-彩色を持つならば、 F^2 の3-正則偶角形分割の多色 proper 4-彩色性が考えられる。

次の定理は射影平面の3-正則偶角形分割についてのものであり、上記の方針に従って証明されたものである。平面の場合と同様に、3-正則性を除くと、射影平面上にも多色4-彩色を持たない偶角形分割が存在する（図5(1)）。また、図5(2)は射影平面上のメビウス梯子であり、辺 $x_i y_i$ をその段という。図5の2つのグラフの向い合う点対を同一視することで、射影平面を得る。

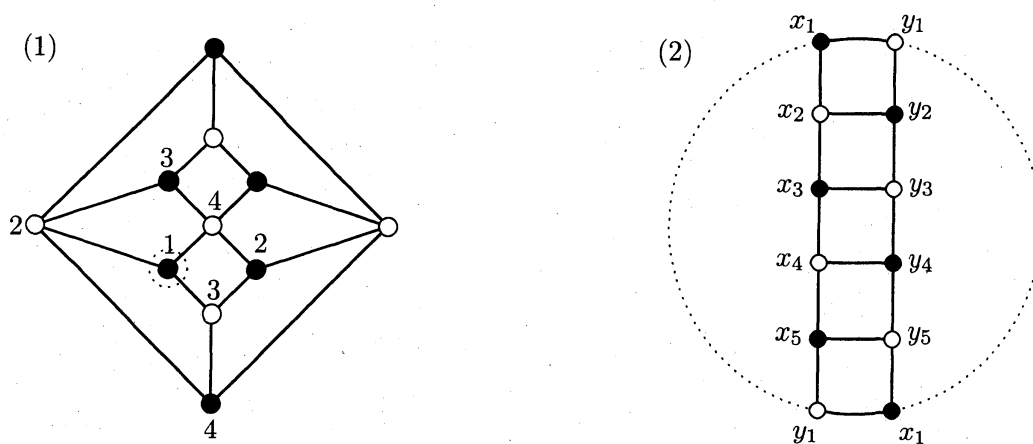


図 5: 多色 4-彩色不可能な射影平面グラフと奇数段のメビウス梯子

定理 2 (Kobayashi et al. [10]) G を射影平面の3-正則偶角形分割とする。このとき、 G が多色 4-彩色可能であるための必要十分条件は、 G は奇数段のメビウス梯子と同型でないことである。

定理 2 を証明するにあたり、射影平面上の3-正則偶角形分割に対して、2-bridging と hexagon addition に関する（3-連結）極小グラフを決定する：

命題 3 射影平面の任意の3-連結3-正則偶角形分割は、2-bridging と hexagon addition を繰り返すことにより、図6に示した T_1^* , $(T_2^k)^*$, T_3^* のいずれかから生成される。

特に、2-bridging と hexagon addition はグラフの2部グラフ性を保存するので、非2部グラフ的3-正則偶角形分割は T_1^* から生成され、2部グラフ的なものは、ある $k \geq 1$ に対する $(T_2^k)^*$ か、または、 T_3^* から生成される。また、 $(T_2^1)^*$ は奇数段のメビウス梯子であるから、多色 4-彩色を持たないが、その以外のものは多色 proper 4-彩色を持つことがわかる。図6参照。（定理3の証明では、奇数段のメビウス梯子に同型でない任意の3-正則偶角形分割は、 $(T_2^1)^*$ 以外のグラフから2つの変形で生成できることを示す必要がある。）

同様の手法で他の曲面 F^2 上の3-正則偶角形分割の多色 4-彩色性も考えられるが、2つの変形に関する極小グラフを決定するのはそれほど簡単ではない。球面で1つの既約グラフが、また、射

⁵ 曲面 F^2 の偶角形分割とは、 F^2 上のグラフで各面の次数が偶数のものである。平面（球面）の2部グラフは偶角形分割であるが、それ以外の曲面の偶角形分割は必ずしも2部グラフではない。

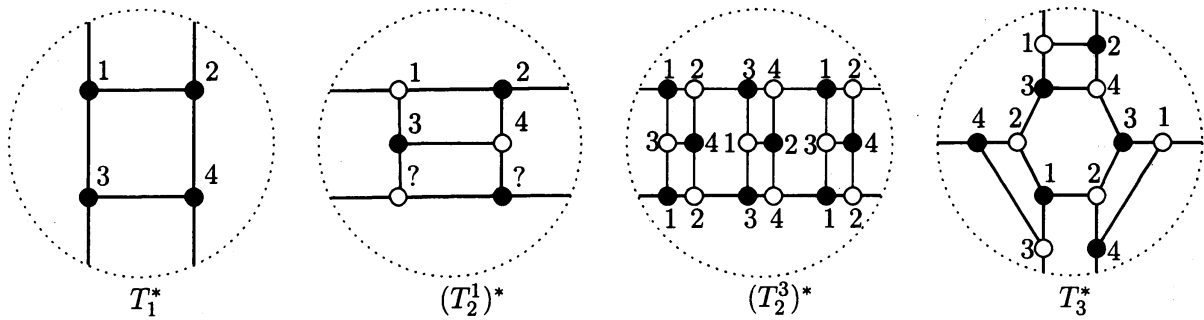


図 6: 射影平面上の 3-正則偶角形分割の多色 4-彩色

影平面で 3 種類の既約グラフが存在したわけだが、トーラスやクラインの壺ではよりたくさんの既約グラフが存在するだろう。また、2-bridging と hexagon addition は 3-正則偶角形分割の四角形面に働きかける変形であるが、オイラーの公式の簡単な計算により、球面と射影平面以外の閉曲面では必ずしも四角形面は存在しない。

最後に、曲面の四角形分割の多色彩色について考える。平面（球面）の場合、任意の四角形分割は多色 proper 3-彩色を持つ。この証明には、平面の四角形分割 G に対して、

- (1) G が辺の追加により偶三角形分割に変形されること、さらに、
- (2) 偶三角形分割が 3-彩色可能であること

という 2 つの事実が用いられた。しかしながら、球面以外の四角形分割に対して、これらは一般には成立しない。以下では、辺の追加により、3-彩色可能三角形分割に変形できる四角形分割を考える。また、そのような四角形分割は多色 proper 3-彩色を持つものとして特徴付けられる。

G を曲面 F^2 の四角形分割とし、 $F = f_0 f_1 \cdots f_k$ を G の面の列であるとする ($f_0 = f_k$)、ただし、 $f_0, f_1, \dots, f_{k-1}$ は必ずしも異なる面ではない。 F が直進面歩道であるとは、以下の 2 つの条件を満たすことである：

- (i) f_i と f_{i+1} は辺 e_i を共有する、 $i = 0, 1, \dots, k-1$, かつ、
- (ii) e_{i-1} と e_i は f_i の境界 4-閉路において隣接しない、 $i = 0, 1, \dots, k-1$.

F が可縮であるとは、 F に対応する G^* (G の双対グラフ) の閉歩道が、曲面 F 上の閉曲線として可縮⁶であることである。

次が得られた定理である：

定理 4 (Mukae et al. [12]) F^2 を任意の閉曲面とし、 G を F^2 の四角形分割とする。このとき、 G のすべての直進面歩道が可縮ならば、 G は多色 proper 3-彩色を持つ。特に、 F^2 が射影平面であれば、その逆も成立する。

一方、例えば、トーラスについても、非可縮な直進面歩道を持つ四角形分割で多色 proper 3-彩色を持つものが存在し、単に直進面歩道の可縮性のみの考察では四角形分割の多色 proper 3-彩色性は特徴付けられない。

⁶ F 上の閉曲線 l が可縮であるとは、 l を連続的に変形して、1 点に潰すことができることである。

3 まとめ

曲面上のグラフの彩色は、いわゆる、平面グラフの4彩色性を述べた「四色定理」[2] から始まり、1970年代、RingelとYoungの「Map Color Theorem」[13]でその基本的理論整備は決着した。その後も、これらを本筋として、いろいろなグラフの彩色の問題が幅広く研究されてきた。残念ながら、その中には問題のための問題のような、取るに足らないようなグラフ彩色の問題設定や定理も少なくない。本稿で言及した曲面上のグラフの多色彩色も、いわゆる「美術館問題」という幾何学問題に関連して定義された曲面上のグラフ彩色の亜種と言えよう。しかしながら、その定義が自然であること、さらに、曲面上のグラフの偶奇性に着目した様々な興味深い議論を行えることから、著者はこれらをたいへん興味深い研究テーマであると感じている。

とりわけ、一般の曲面の四角形分割と偶三角形分割の関係は特に面白いと感じており、現在は以下の問題について研究を行っている。

- 平面四角形分割 G に対して、その多色染色数 $p(G)$ は $3 \leq p(G) \leq 4$ である。一方、 $p(G) = 4$ となる平面四角形分割 G も特徴付けられている [4]。その他の曲面ではどうか。
- 平面の四角形分割 G は、辺の追加により、偶三角形分割に拡張することができる。他の曲面上の四角形分割ではどうか。
- 曲面の四角形分割が多色 proper 3-彩色を持つための必要十分条件はどうか。前節ではその部分的解決ができたが、その解決にはより代数的かつ位相幾何学的な議論が必要であろう。

このうちのどの問題も曲面上のグラフの多色彩色から動機を得ているが、それぞれ独立な問題設定での研究が成立する豊かなトピックだと思われる。今後の研究に期待したい。

参考文献

- [1] N. Alon, R. Berke, K. Buchin, M. Buchin, P. Csorba, S. Shannigrahi, B. Speckmann and P. Zumstein, Polychromatic colorings of plane graphs, In SCG'08: Proceedings of the twenty-fourth annual symposium on Computational geometry, 338–345. ACM, 2008.
- [2] K. Appel and W. Haken, Solution of the Four Color Map Problem, *Scientific American* **237** (1977), 108–121.
- [3] V. Batajeli, Inductive definition of two restricted classes of triangulations, *Discrete Math.* **52** (1984), 113–121.
- [4] K.A. Berman and H. Shank, Full 4-coloring of 4-regular maps, *J. Graph Theory* **3** (1979), 291–294.
- [5] V. Chvátal, A combinatorial theorem in plane geometry, *J. Combin. Theory, Ser. B* **18** (1975), 39–41.
- [6] S. Fisk, A short proof of Chvátal's watchman theorem, *J. Combin. Theory, Ser. B* **24** (1978), 374.

- [7] F. Hoffmann and K. Kriegel, A graph-coloring result and its consequences for polygon-guarding problem, *SIAM J. Discrete Math.* **9** (1997), 210–224.
- [8] E. Horev and R. Krakovski, Polychromatic colorings of bounded degree plane graphs, *J. Graph Theory* **60** (2009), 269–283.
- [9] E. Horev, M.J. Katz, R. Krakovski and A. Nakamoto, Polychromatic 4-coloring of cubic bipartite plane graphs, *Discrete Math.* **312** (2012), 715–719.
- [10] M. Kobayashi, A. Nakamoto and T. Yamaguchi, Polychromatic 4-coloring of cubic even embeddings on the projective plane, to appear in *Discrete Math.*
- [11] B. Mohar and R. Škrekovski, The Grötzsch theorem for the hypergraph of maximal cliques, *Electron. J. Combin.* **6** (1999), R26.
- [12] R. Mukae, A. Nakamoto and Y. Suzuki, 3-Polychromatic quadrangulations on surfaces, submitted.
- [13] G. Ringel, and J.W.T. Youngs, Solution of the Heawood Map-Coloring Problem, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **60** (1968), 438–445.