

Haken 教授 の 講 義

西 川 恭 治 (京大理)

「固体物理とレーザーとは二つの側面で関係している。一つは、固体を使ってレーザー光を発生させる問題であり、今一つは、レーザー光が固体に照射してひき起す様々な非線形効果の問題である。私の話はこの中の前者の問題に限る事にする。」ややドイツなまりの英語で、ゆつくりした口調の Haken 教授の講演は、こういう出だしで始まった。この3年間に Haken 教授及びそのグループの人の名になる論文の数は20編に余るであろう。その数多い仕事の総まとめが、今回の短い講義でなされた。題は「Dynamics of Nonlinear Interaction between Radiation and Matter」で、講義は次の4つの章から成っていた。

§1 The Laser Equations

§2 Single Mode Operation

§3 Two Mode Operation

§4 Multimode Operation

§1 は、彼の理論の基礎となる部分で、講義でも最も力を入れてていねいに説明された。

まずレーザーフィールドを第2量子化した演算子 b_λ, b_λ^+ で表わし、それと two level atoms との相互作用のハミルトニアンを基礎にとつて、ハイゼンベルグの運動方程式をたてる。それは、 b_λ^+ と、原子の dipole moment に対応する演算子 $(a_{2\mu}^+ a_{1\mu})$ (ただし $a_{\alpha\mu}^+, a_{\alpha\mu}$ は第 μ 第目の原子を α という状態に創りまたは消す演算子) 及び population inversion を表わす演算子 $(a_{2\mu}^+ a_{2\mu} - a_{1\mu}^+ a_{1\mu})$ の間の coupled equations の形に書かれる。この式は、巨視的な電場と分極に対する現象論的方程式とほぼ同じ形をしているが、ただ dipole moment の方程式が inversion に依存しているという点で異つてゐる。

西川恭治

以上は loss のない系の場合だが、レーザー発振の条件や line shape を調べるためには、レーザー光の cavity loss や原子の状態の damping 及び pumping の効果などを考える事が必要である。Haken は、これらを導くためには、「熱浴」との相互作用までハミルトニアンの中に含めて、それを適当な変換で消去するとう方法（スピン緩和における Bloch-Wangsness の方法）が使える事を指摘する。ただし、この方法でえられた方程式は実は平均量に対するもので、これを今問題にしているような第二量子化した演算子に対する式にするには、更に fluctuating forces まで含めなければ consistent にならない。この fluctuating forces の実体は、cavity fluctuation とか衝突による原子の励起などであるが、ここで必要なのはその細かい形式ではなく、それらの時間的相関々数である。後者は、マルコフ過程の仮定及び量子力学的 consistency より、damping constant を使つて一意的に定める事ができる（Einstein の関係）。

以上でレーザー方程式は完結するのだが、一例として、レーザー光は単一のモードから成り、また原子の励起エネルギー及び減衰がどの原子でも同じ（homogeneous broadening）場合についてこれを書くと、

$$\begin{aligned}\dot{b}^+ &= (i\omega - r) b^+ + iGS^+ + F(t) \\ \dot{S}^+ &= (i\epsilon - \kappa) S^+ - iGb^+ S + F^+(t) \\ \dot{S} &= \frac{S^0 - S}{T} + 2iG(S^- b^+ - bS^+) + F(t)\end{aligned}\tag{1}$$

となる。ここに ω はレーザー光の振動数、 κ は cavity loss、 G はレーザー光と原子との相互作用の大きさ、 S^+ は原子の dipole moment の総和（ S^- は S^+ の複素共役）、 ϵ は原子の励起エネルギー、 r はその damping、 S は total inversion ($S = \sum_{\mu} (a_{2\mu}^+ a_{2\mu} - a_{1\mu}^+ a_{1\mu})$)、 S^0 及び T は、pumping rate を W_{12} 、原子の励起状態から基底状態への radiationless damping rate を W_{21} とすると

$$\frac{1}{T} = W_{12} + W_{21}, \quad S^0 = N \frac{W_{12} - W_{21}}{W_{12} + W_{21}}$$

(N は原子の総数)で与えられ、また $F(t)$ 、 $F^+(t)$ 、 $F(t)$ はいずれも fluctuating forcesを表わす。この方程式は、第2式の b^+S の項及び S の b 依存性を通して非線型であり、また fluctuating forcesを通して stochastic である。この式はまた、fluctuating forces の相関と damping の間の Einstein関係を考慮に入れると、古典的 Langevin方程式の量子論的アナログと見なす事もできる。

講義は次に、§2 で上の方程式(1)を解いて、レーザー光の発振条件や line shape の議論に入る。

まず、(1)で $S^\pm$ を消去し、 b^+ と S だけの式にする。簡単のため $\epsilon = \omega$ (complete resonance) の場合を考え、 $b^+e^{-i\epsilon t} \rightarrow b^+$ という変換を行うと、方程式は次の形に変形される。

$$\begin{aligned} \ddot{b}^+ + (\kappa + \gamma) \dot{b}^+ + (\kappa\gamma - G^2 S) b^+ &= R(t) \\ \dot{S} - \frac{S^0 - S}{T} + [(b^+b)^* + 2\kappa b^+b] &= R(t) \end{aligned} \quad (2)$$

ただし右辺は fluctuating forcesを含む部分である。ここで更に、(2)の右辺を無視し、また断熱近似 $\dot{S} = 0$ 、 $(b^+b)^* = 0$ を行つて S を消去すると、 b^+ の方程式は

$$V(|b|) = (\kappa\gamma - G^2 S^0) \frac{|b|^2}{2} + \frac{G^2}{2} \epsilon T |b|^4 \quad (3)$$

というポテンシャルの中での粒子の2次元的運動 ($b^+ = x + iy$ とおいて考える) の方程式と同等になる。この描像に立つと、まずレーザー発振の条件が直ちに出来来る。すなわち、 $|b|=0$ のまわりの振動が不定定になるという条件から、 $\kappa\gamma < G^2 S^0$ がレーザー発振の条件となる。

次に発振状態を2つの領域に分けて考察する。

まず threshold region では、pump rate の増大と共に急速に line narrowing が起る事から、 $\ddot{b}^+$ は $(\kappa + \gamma) \dot{b}^+$ に比べて無視できる事が分る。

西川恭治

すると断熱近似の下での b^+ の方程式は、fluctuating force を含んだ Van der Pol 方程式の形に還元される。この方程式はまた、 b^+ の分布に対する Fokker-Planck 方程式の形にも書かれ、それをもとにして数値計算を行う事もできる。Risken¹⁾ はこの方法で intensity fluctuation を計算し、その結果は Armstrong-Smith²⁾ の実験によつて検証された。

次に threshold より充分上では、今度は古典的描像が使えて、 b^+ を c-number の如く考えて

$$b^+ = e^{i\varphi(t)}(r_0 + \rho(t)) \quad (4)$$

とおく事ができる。ここに r_0 は振巾の平均値で、 $\varphi(t)$ 及び $\rho(t)$ が夫々位相及び振巾の fluctuation を表わす。 r_0 が大きい時には(3)のポテンシアルは深くなるので、 $\dot{\varphi}$, ρ , $\dot{\rho}$, $\ddot{\rho}$ などいずれも小さな値になり、それらについて線形化するという近似が使える。この方法で、まず位相の fluctuation が

$$\langle (\varphi - \varphi_0)^2 \rangle / t \sim 1/r_0^2 \quad (5)$$

と評価される。左辺は $\langle b(t)b(0) \rangle$ という相関々数の線巾を与え、また右辺は output photon flux P の逆数を与えるので、(5)は、レーザー光の線巾が $1/P$ で減少するという効果を表わす。次に振巾の fluctuation については、

$$\langle \rho(t)\rho(t+\tau) \rangle \sim \frac{1}{P} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_0}\right) \quad (6)$$

$$\tau_0 \sim 1/P \quad (7)$$

がえられる。これは、intensity fluctuation の大きさ及びその緩和時間が共に $1/P$ で減少する事を示す。Haken は、これが Hanbury-Brown-Twiss の測定にかかったものと説明する。ここで Haken は intensity fluctuation が spike をもつ可能性についてふれる。すなわち、今少しきちんと調べると、(6)の左辺は undamped oscillation を行う可能性がある事が示せるが、それは $\kappa > 3r$ という、とても実現できそうな条件の下でしか起らない、従つて、実験にかかっている undamped oscillation は、

single mode model では説明できない。しかし、この他に damped oscillation による spike は通常の条件の下でも起りえて、それについては数値計算の結果がスライドで示された。

講義は続いて two modes の場合に入る。ここではまず、(1)の方程式がどう変形されるかを示し、次に population pulsation の問題にふれた。今、二つのモードを suffix 1, 2, で区別すると、two modes では、 $b_1^+ b_1 = S_{11}$ のように時間によらぬ応答の他に、 $b_1^+ b_2 = S_{12}$ のように $(\omega_1 - \omega_2)$ という振動数で振動する応答も現われる (population pulsation)。これがどういう効果をもたらすかについて、 $(\omega_1 - \omega_2)T \gg 1$ 及び $(\omega_1 - \omega_2)T \ll 1$ の二つの場合についてくわしい説明があつた。それによると、まず $(\omega_1 - \omega_2)T \gg 1$ では一般に $|S_{12}| \ll |S_{11}|$ となり殆んど時間によらない応答のみが現われ、それも定常波の場合にのみ可能で、進行波では二つのモードは共存しえない事が分る。一方 $(\omega_1 - \omega_2)T \ll 1$ では $|S_{12}| \sim |S_{11}|$ となり、gain が一般に b_1 と b_2 の位相差に依存するようになる。すると、定常状態としては gain が最大または最小となるような位相差の状態がえられ、いわゆる phase-locking の現象を来す。以上は fluctuating forces を無視しての話だが、これを考えると振巾の fluctuation の間の coupling が現われる。その効果は、一方の振巾が増する他方が減るといふ、いわゆる反相関の形で現われる。

最後の章では、multimode の場合について、まず inhomogeneous broadening の場合の方程式の解き方にふれ、次に three modes の場合の frequency-locking についての定性的説明がなされた。

まず方程式の解き方についてのべると、要点は r 及び γT を他のすべての振動数より充分大きいとして、一種の断熱近似を使つて iteration でとくといふのである。すなわち、まず inversion を c-number の如く扱つて、与えられた b_λ^+ に対して $(a_{2\mu}^+ a_{1\mu})$ を求める。次にそれを inversion の式に入れて、与えられた b_λ^+ に対する inversion をきめる。そしてそれを使つて $(a_{2\mu}^+ a_{1\mu})$ の計算を改良する。最後にそれらを b_λ^+ の式に入れる、といふのである。その結果は、

西川恭治

$$\dot{b}_\lambda^+ = (i\omega_\lambda - \kappa_\lambda) b_\lambda^+ + C b_\lambda^+ \\ + \sum_{\lambda'} \sum_{\lambda''} \sum_{\lambda'''} C_{\lambda \lambda' \lambda'' \lambda'''} b_{\lambda'}^+ b_{\lambda''}^+ b_{\lambda'''}^+$$

という、きわめて複雑な形になる。

次にこれをもとにして、three modesの時の frequency-locking について説明する。Fork, Javanらの実験によると、cavityの振動数を調節すると、出て来る signal の振動数 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ がある所で突然

$$\omega_2 - \omega_1 = \omega_3 - \omega_2$$

という関係をみたすようになる。この定性的説明がLambの理論³⁾に従ってなされたが、それについては原著を見ていただく事にする。最後に fluctuating force の効果について説明があり、結論として、fluctuating force の効果は lock した状態への遷移を急激なものからなだらかなものにする。という事がのべられた。

以上、大変大ざっぱであるが、Haken 教授の講義を要約したつもりである。筆者の理論の不足と、ノートに日数がたっている事のため、誤まりやポイントのぼけたところがあるかもしれないが、いずれ講師自身の手になるくわしい報告が出ると思うので、それまでのつなぎとして許していただきたい。最後に、この講義ノート作成に当つて、京大川崎辰夫氏が援助して下さった事を述べ、それに感謝します。

文 献

- 1) H.Risken, Z.Phys. 186, 85 (1965), 191, 302 (1966)
- 2) J.A.Armstrong and A.W.Smith, Phys. Rev. Letters 14, 68 (1965); Phys. Rev. 140A, 155 (1965).
- 3) W.E.Lamb, Phys. Rev. 134A, 1429 (1964).