

Szegő の定理について

北大 理 大滝 博

勝股 修

越 昭三

§1

最初に一般に Szegő の定理と呼ばれている定理について述べる。

定理

$k \geq 0$, $k \in L^1(d\theta)$, $A \equiv \{f \in C(T); \hat{f}(n) = 0; n = 1, 2, \dots\}$

$A_0 \equiv \{f \in A; \hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = 0\}$

$$\Rightarrow \inf_{f \in A_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |1 - f(\theta)|^2 k(\theta) d\theta = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log k(\theta) d\theta\right)$$

A は disk 環と呼ばれるもので Dirichlet 環になる。

従って logmodular 環でもある。この定理の拡張は色々なされているが、ここではこの定理(と類似した定理)が logmodular 環に対して特別な Orlicz - Nakano space で成立することを示す。

X を Compact Hausdorff space, λ を X 上の regular finite positive measure とする。 $\phi_x(t)$ は $X \times [0, \infty)$ 上の関数で次の条件を満たすものとする。

- i) 各 $x \in X$: $\phi_x(t)$ は $[0, \infty)$ 上の狭義単調増加な t の連続関数で, $\phi_x(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_x(t) = \infty$
- ii) 各 $t > 0$; $\phi_x(t)$ は x の Borel 可測関数で
- (A) $0 < \inf_{x \in X} \phi_x(t) \leq \sup_{x \in X} \phi_x(t) < +\infty$ を満たす。

次に $\Phi_x(u)$ ($x \in X, u \geq 0$) を $\Phi_x(u) = \int_0^u \phi_x(t) dt$ により定義する。

このとき $\Phi_x(u)$ は各 $x \in X$ を固定すると, u の凸連続関数で $u \geq 0$ を固定すると x の可測関数になる。そこで汎関数 $M_{\Phi_x}(\cdot)$ を

$$(B) \quad M_{\Phi_x}(f) \equiv \int_X \Phi_x(f(\omega)) d\lambda(\omega) \quad (f; \text{可測関数})$$

により定義する。

定義

$$L_{\Phi_x}(X) \equiv \{f; \text{可測}, M_{\Phi_x}(cf) < +\infty \text{ for } \exists c > 0\}$$

$$\gamma_x(u) \equiv \sup_{\phi_x(t) \leq u}, \quad \Psi_x(u) \equiv \int_0^u \gamma_x(t) dt \quad (x \in X, u \geq 0)$$

このとき $\gamma_x(u)$, $\Psi_x(u)$ はそれぞれ $\phi_x(u)$, $\Phi_x(u)$ と同じ性質を持ち, 従って $M_{\Psi_x}(\cdot)$, $L_{\Psi_x}(X)$ を同様に定義できる。

補題

f, g を複素可測函数とするとき, $M_{\Phi_X}(\cdot)$ は次の性質を満たす。

- 1) $M_{\Phi_X}(0) = 0$
- 2) $M_{\Phi_X}(af) = 0 \quad \text{for } \forall a > 0 \implies f = 0 \quad (a.e. \lambda)$
- 3) $a, b \geq 0, a+b=1 \implies M_{\Phi_X}(af+bg) \leq aM_{\Phi_X}(f) + bM_{\Phi_X}(g)$
- 4) $|f| \wedge |g| = 0 \implies M_{\Phi_X}(f+g) = M_{\Phi_X}(f) + M_{\Phi_X}(g)$
- 5) $0 \leq f_n \uparrow f \quad (n=1,2,\dots), \quad \sup_n M_{\Phi_X}(f_n) < +\infty$
 $\implies M_{\Phi_X}(f) = \sup_n M_{\Phi_X}(f_n)$

$M_{\Phi_X}(\cdot)$ も同じ性質を持ち, 又上のことから $L_{\Phi_X}(X), L_{\Phi_X}(X)$ は linear space になる。次に $L_{\Phi_X}(X)$ の dual $\overline{L_{\Phi_X}(X)}$ を定義する。

定義

$$\overline{L_{\Phi_X}(X)} \equiv \left\{ \varphi; L_{\Phi_X}(X) \text{ 上の線型汎函数, } \sup_{M_{\Phi_X}(f) \leq 1} |\varphi(f)| < +\infty \right\}$$

$$\overline{M_{\Phi_X}}(\varphi) \equiv \sup_{f \in L_{\Phi_X}(X)} \{ |\varphi(f)| - M_{\Phi_X}(f) \} \quad (\varphi \in \overline{L_{\Phi_X}(X)})$$

定理 $g \in L_{\Psi_X}(X)$; $g(t) \equiv \int_X f(x)g(x)d\lambda(x)$ ($f \in L_{\Phi_X}(X)$)

により定義すると, $g(t) \in \overline{L_{\Phi_X}(X)}$ 7,

$$\overline{M_{\Phi_X}}(g) = M_{\Psi_X}(g)$$

次に $L_{\Phi_X}(X)$ ($L_{\Psi_X}(X)$) に norms $\|\cdot\|_{\Phi_X}$, $\|\cdot\|_{(\Phi_X)}$ ($\|\cdot\|_{\Psi_X}$, $\|\cdot\|_{(\Psi_X)}$)
を導入する。 $f \in L_{\Phi_X}(X)$ に対して

$$\|f\|_{\Phi_X} \equiv \sup_{\substack{M_{\Phi_X}(f) \leq 1}} |\varphi(f)| \left(= \sup_{\substack{M_{\Phi_X}(f) \leq 1}} \left| \int_X g(x)f(x)d\lambda(x) \right| ; g \in L_{\Psi_X} \right)$$

$$\|f\|_{(\Phi_X)} \equiv \inf \left\{ \frac{1}{c} ; c > 0, M_{\Phi_X}(cf) \leq 1 \right\}$$

定理

$f \in L_{\Phi_X}(X)$, $g \in L_{\Psi_X}(X)$ に対して

$$\|f\|_{\Phi_X} = \inf \left\{ \frac{1 + M_{\Phi_X}(cf)}{c} ; c > 0 \right\}$$

$$\left| \int_X f(x)g(x)d\lambda(x) \right| \leq \begin{cases} \|f\|_{\Phi_X} \cdot \|g\|_{(\Psi_X)} \\ \|f\|_{(\Phi_X)} \cdot \|g\|_{\Psi_X} \end{cases}$$

§ 2

定義

E は X 上の実可測函数の集合とする。 E が次の i)~iii) を満すとき便宜上 E を M -set と呼ぶことにする。

$$i) \quad \forall f \in E; \exists M_f > 0 \text{ s.t. } -\infty \leq f(x) \leq M_f < \infty \quad \text{for } \forall x \in X$$

$$ii) \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall f \in E \implies c + f \in E$$

$$iii) \quad \forall f \in C_R(X), \forall \varepsilon > 0; \exists g \in E \text{ s.t.}$$

$$\|f - g\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

◎ μ は定理 1 まて X 上の regular probability measure とする。

Lemma 1 E ; M -set, $f \in L_{\Phi_X}(X)$, $\|f\|_{\Phi_X} \leq 1$,

$\int_X \log |f(x)| d\mu(x)$ が $\pm\infty$ をこめて定義されている

$$\implies \forall \varepsilon > 0, \exists g \in E \text{ s.t.}$$

$$\|\exp(g)\|_{\Phi_X} \leq 1, \quad \int_X g d\mu(x) \geq \int_X \log |f(x)| d\mu(x) - \varepsilon$$

[注] $\int_X \log |f(x)| d\mu(x) = \infty$ のときは; $\forall c > 0, \exists g \in E \text{ s.t.}$

$$\|\exp(g)\|_{\Phi_X} \leq 1, \quad \int_X g d\mu(x) > c \quad \text{なることを意味する。}$$

Lemma 2 $\neq$ (μ が λ に関して絶対連続でない)

$$\implies \forall K > 0, \exists f \in L_{\Phi_X}(X) \text{ s.t.}$$

$$\|f\|_{\Phi_X} \leq 1, \quad \int_X \log |f(x)| d\mu(x) > K$$

定義 $I_x(u) \equiv (u \phi_x(u))^{-1}$ ($x \in X, u > 0$) により定義する。

このとき $\phi_x(u)$ の性質により, Borel 可測関数 $f(u)$ に対して $I_x(|f(u)|)$ は Borel 可測関数である。

Lemma 3 ϕ (μ が λ に関して絶対連続

$$\Rightarrow \text{i) } \exists \alpha_\mu > 0 \text{ s.t. } \int_X \Psi_x(\phi_x(I_x(\alpha_\mu \frac{d\mu}{d\lambda}(u)))) d\lambda(u) = 1$$

$$\text{ii) } \phi, c > 0$$

$$\Rightarrow \int_X \log I_x(c \frac{d\mu}{d\lambda}(u)) d\mu(u) \text{ は有限か又は } +\infty.$$

定理 1 E ; M -set.

(1) ϕ (μ が λ に関して絶対連続

$$\Rightarrow \exists \alpha_\mu > 0 \text{ (Lemma 3 の } \alpha_\mu) \text{ s.t.}$$

$$\inf \{ \|\exp(f)\|_{\Psi_x} ; f \in E, \int_X f(u) d\mu(u) \geq 0 \}$$

$$= \alpha_\mu \exp(-\int_X \log I_x(\alpha_\mu \frac{d\mu}{d\lambda}(u)) d\mu(u))$$

(2) ϕ (μ が λ に関して絶対連続でない)

$$\Rightarrow \inf \{ \|\exp(f)\|_{\Psi_x} ; f \in E, \int_X f(u) d\mu(u) \geq 0 \} = 0$$

[証明] Lemma 1 より

$$(*) \begin{cases} \inf \{ \|\exp(f)\|_{\Psi_x} ; f \in E, \int_X f d\mu \geq 0 \} \\ = \exp(-\sup \{ \int_X f(u) d\mu(u) ; f \in E, \|\exp(f)\|_{\Psi_x} \leq 1 \}) \\ = \exp(-\sup \{ \int_X \log |f(u)| d\mu(u) ; \|f\|_{\Psi_x} \leq 1 \}) \end{cases}$$

この算式と Lemma 2 より (2) は明か。次に (1) を示す。

$h(u) \equiv \alpha_\mu^{-1} I_X(\alpha_\mu \frac{d\mu}{d\lambda}(u))$ とおく。但し $\alpha_\mu > 0$ は Lemma 3 のもの。
 このとき, $\|h\|_{\mathbb{E}_X} \leq 1$, $\sup\{\int_X \log |f(u)| d\mu(u); \|f\|_{\mathbb{E}_X} \leq 1\} = \int_X \log h(u) d\mu(u)$
 なることが容易に確かめられる。従って (*) より

$$\begin{aligned} & \inf\{\|\exp(f)\|_{\mathbb{E}_X}; f \in E, \int_X f(u) d\mu(u) = 0\} \\ &= \alpha_\mu \exp(-\int_X \log I_X(\alpha_\mu \frac{d\mu}{d\lambda}(u)) d\mu(u)) \quad \text{g.e.d.} // \end{aligned}$$

§3 Logmodular Algebra

$A \subset C(X)$ を logmodular 環とする。 m は A 上の non-zero multiplicative measure とする。このとき Jensen's inequality が成り立つ。
 $\therefore \log |\int_X f dm| \leq \int_X \log |f| dm \quad \text{for } \forall f \in A$
 従って特に, $f \in A^{-1} = \{f \in A; f \text{ invertible in } A\}$ に対しては、
 等号が成り立つ。

定理2 A ; X 上の logmodular 環。 m ; A 上の non-zero multiplicative measure とする。 $A_0 \equiv \{f \in A; \int_X f dm = 0\}$ とおく。

(1) もし m が λ に関して絶対連続

$$\Rightarrow \inf\{\|1+f\|_{\mathbb{E}_X}; f \in A_0\} = \alpha_m \exp(-\int_X \log I_X(\alpha_m \frac{dm}{d\lambda}(u)) dm(u))$$

ここで $\alpha_m > 0$ は Lemma 3 (i) に現れたもの

(2) もし m が λ に関して絶対連続でない

$$\Rightarrow \inf\{\|1+f\|_{\mathbb{E}_X}; f \in A_0\} = 0$$

[証明] $E_1 \equiv \{\log |f|; f \in A^+\}$, $E_2 \equiv \{\log |f|; f \in A\}$ とおく.

明らかに, E_1, E_2 は M -set である. 又,

$$A_1 \equiv \{1+f; f \in A_0\}, \quad A_1^+ \equiv \{cg; |c| \geq 1, g \in A_1\}$$

$$|A_1| \equiv \{|k|; k \in A_1\}, \quad |A_1^+| \equiv \{|k'|; k' \in A_1^+\} \quad \text{とおく. この時,}$$

$$(i) \quad \inf \{\|k\|_{\Phi_X}; k \in A_1\} = \inf \{\|k\|_{\Phi_X}; k \in |A_1|\} \\ = \inf \{\|k\|_{\Phi_X}; k \in |A_1^+|\} = \inf \{\|k\|_{\Phi_X}; k \in A_1^+\}. \quad \text{これは明らか.}$$

$$(ii) \quad \inf \{\|\exp(f)\|_{\Phi_X}; f \in E_i, \int_X f dm \geq 0\} = (i) \text{ の右辺 } (i=1,2)$$

[理由] $E_i (i=1,2)$ は M -set なることより, 定理 1 より.

$$(iii) \quad \inf \{\|\exp(f)\|_{\Phi_X}; f \in E_2, \int_X f dm \geq 0\} \leq \inf \{\|k\|_{\Phi_X}; k \in |A_1|\}$$

[理由] $\forall f \in A_0, \int_X \log |1+f| dm \geq \log |\int_X (1+f) dm| = 0$.

$$\text{故に, } |A_1| \subset \{\exp(g); g \in E_2, \int_X g dm \geq 0\}$$

$$(iv) \quad \inf \{\|k\|_{\Phi_X}; k \in |A_1^+|\} \leq \inf \{\|\exp(f)\|_{\Phi_X}; f \in E_1, \int_X f dm \geq 0\}$$

[理由] $\forall f \in A^+, \int_X \log |f| dm \geq 0 \Rightarrow \log |\int_X f dm| \geq 0$

$$\text{故に, } c \equiv \int_X f dm > 0, \quad |c| \geq 1$$

$$\text{従って, } f = c(1 + \frac{1}{c}(f-c)) \in A_1^+$$

$$\text{故に, } \{\exp(f); f \in E_1, \int_X f dm \geq 0\} \subset |A_1^+|$$

(i) ~ (iv) と 前 の Lemmas より 定理 2 を得る

g.e.d //

注意

$1 < p < \infty$ のとき, $\phi_x(t) \equiv t^{p-1}$ ($x \in X, t \geq 0$) とおく.
 このとき, $\Phi_x(u) = \frac{1}{p} u^p$, $\Psi_x(u) = \frac{1}{q} u^q$ ($x \in X, u \geq 0$)
 但し, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 従って, $L_{\Phi_x}(X) = L^p(d\lambda)$, $L_{\Psi_x}(X) = L^q(d\lambda)$
 尚, このとき, $d_m = g$ となる. 更に, μ , m と λ が
 互いに絶対連続なとき, $d\lambda = h d\mu$ とおくと, 定理 2 は

$$\inf \left\{ \int_X \|f\|^p h d\mu ; f \in A_0 \right\} = \exp \left(\int_X \log h d\mu \right)$$
 となる。

References

- 1) T. Gamelin ; Uniform algebra ; Prentice Hall
Englewood Cliffs, N. J. 1969
- 2) K. Hoffman ; Banach space of analytic functions ;
Prentice Hall, Englewood Cliffs,
N. J. 1962
- 3) H. Nakano ; Modular semi-ordered linear space,
Maruzen, Tokyo, 1950

- 4) H. Nakano ; Topology and linear topological spaces,
Maruzen , Tokyo , 1951
- 5) K. Urbanik; Szegő's theorem for Orlicz spaces,
Bull. Acad. Polonaise des Sci 14,
p 503 ~ 509 (1966)