

Prime ideal of H^∞

新潟大学理学部 泉池 敬司 (KEIJI IZUCHI)

新潟大学大学院 自然科学研究科 石井 隆 (TAKASHI ISHII)

1 序論

Disk 環のイデアル論は A.Beurling, W.Rudin [1] などにより研究され、多くのことがわかっている。一方、 H^∞ や Douglas algebra のそれは、最近になって、P.Gorkin, R.Mortini 等により、盛んに行われているが、未解決なものも多々ある。ここでは、 H^∞ の prime ideal について、少し論じたい。

2 準備と背景

特に断りのない場合は closed prime ideal を P であらわす。また、イデアル $I \subset H^\infty$ の hull を $Z_{H^\infty}(I)$ で表わす。すなわち、 $Z_{H^\infty}(I) = \bigcap_{f \in I} \{x \in M(H^\infty); f(x) = 0\}$ である。

定義 2.1 $P \subset H^\infty$ が prime ideal であるとは

$$fg \in P \text{ ならば } f \in P \text{ or } g \in P$$

が成立するときをいう。

特に、maximal ideal は prime ideal である。

次は明らかである。

命題 2.2 $Z_{H^\infty}(P) \subset D$ ならば、 P は maximal ideal である。

また、次が成り立つ。

定理 2.3 ([2, R.Mortini], [3, P.Gorkin, R.Mortini]) $Z_{H^\infty}(P) \subset \Gamma$ または、 $Z_{H^\infty}(P) \subset G$ ならば、 P は maximal ideal である。ここで、 $\Gamma = \{x \in M(H^\infty); P(x) = \{x\}\}$, $G = \{x \in M(H^\infty); P(x) \neq \{x\}\}$ 。

定理 2.4 (R.Mortini [2]) $Z_{H^\infty}(P) \cap M(L^\infty) \neq \emptyset$ ならば、 P は maximal ideal である。

non-maximal closed prime ideal の例として、次のものがある。

命題 2.5 $m \in M(H^\infty) \setminus D$ を non-trivial point. $P(m)$ をその Gleason part とすると、

$$I = \{f \in H^\infty; f = 0 \text{ on } P(m)\}$$

は non-maximal closed prime ideal である。

証明. $fg \in I$ とすると、 $fg = 0$ on $P(m)$. すなわち、 L_m を Hoffman map とすると、

$$fg \circ L_m(z) = (f \circ L_m)(g \circ L_m)(z) = 0 \text{ on } D.$$

$f \circ L_m, g \circ L_m \in H^\infty$ であるから、 $f \circ L_m = 0$, or $g \circ L_m = 0$ すなわち、 $f = 0$ on $P(m)$ or $g = 0$ on $P(m)$ よって、 $f \in I$ or $g \in I$.

命題 2.5. の ideal I の他に non-maximal closed prime ideal は存在しないというのが Alling's conjecture であり、これは未解決であるが、次が成立する。

定理 2.6 (P.Gorkin. R.Mortini [3]) P を closed prime ideal とすと、

$$P = I_{H^\infty}(Z_{H^\infty}(P))$$

さて、次に closed ではない prime ideal について考える。そのような代表例として、

$$P = (S, S^{\frac{1}{2}}, S^{\frac{1}{3}} \dots) \text{ ただし、 } S(z) = \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right)$$

すなわち、 $S^{\frac{1}{n}}$ によって生成される ideal がある。この ideal について、

$$\bar{P} = I_{H^\infty}(Z_{H^\infty}(P))$$

が成立する。

3 主結果

より一般に我々は次の定理を得た。

定理 3.1 I を Prime ideal とすると、 $\bar{I} = I_{H^\infty}(Z_{H^\infty}(I))$ である。

証明. Case.I. $Z_\infty(I) \cap M(L^\infty) = \emptyset$. 定理 2.5. の証明がそのまま適用できる。

Case.II. $Z_\infty(I) \cap M(L^\infty) \neq \emptyset$.

$f \in I_{H^\infty}(Z_{H^\infty}(I)), \|f\| = 1$ とする。 $f \in \bar{I}$ を示す。 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ を任意にとる。
[4, prop.3] より、open subset $R \subset D$ で次を満たすものがとれる。

$$(3-1) \quad |f(z)| < \varepsilon \text{ if } z \in R,$$

$$(3-2) \quad |f(z)| > \delta(\varepsilon) \text{ if } z \in D \setminus R,$$

$$(3-3) \quad \int_{\Gamma} |F| |dz| \leq C \|F\|_1 \text{ for } F \in H^1.$$

ここで、 $\Gamma = \partial R \cap D$, $0 < \delta(\varepsilon) < \varepsilon$, C は定数である。

$$Z_{H^\infty}(I) \subset Z_{H^\infty}(f) \subset \{x \in M(H^\infty); |f(z)| < \varepsilon\}$$

であるから、[5, lemma 2.5] より、 $h \in I$, $\|h\| = 1$ が存在して、

$$(3-4) \quad Z_{H^\infty}(h) \subset \{x \in M(H^\infty); |f(z)| < \delta(\varepsilon)\}.$$

とできる。ここで、 I が prim ideal であることと、 $Z_{H^\infty}(I) \cap M(L^\infty) \neq \emptyset$ であることより、 h は outer function としてもよい。さらに、十分大きな n について n 乗根を考えれば、

$$(3-5) \quad |h| \geq 1 - \varepsilon \text{ on } \{x \in M(H^\infty); |f(x)| \geq \delta(\varepsilon)\}$$

といてよい。 $E \subset \partial D$ を

$$(3-6) \quad E = \{e^{i\theta} \in \partial D; |f(e^{i\theta})| \geq 2\varepsilon\}$$

と定めれば、 $\delta(\varepsilon) < \varepsilon < 2\varepsilon$ であるから、

$$(3-7) \quad |h| \geq 1 - \varepsilon > \frac{1}{2} \text{ on } E.a.e$$

となる。いま、 $D_r = \{z \in D; |z| < r\}$ ($0 < r < 1$) とし、 $G_r = D_r \setminus \bar{R}$ と定義する。コーシーの積分公式と [6] と同様の議論により、

$$(3-8) \quad \int_{\partial G_r \cap \partial D_r} \frac{f(z)F(z)}{h(z)} dz \longrightarrow \int_{\Gamma} \frac{f(z)F(z)}{h(z)} dz \quad (\text{as } r \rightarrow 1)$$

である。さて、

$$\begin{aligned} \left| \int_E \frac{f(z)F(z)}{h(z)} dz - \int_E f(z)F(z) \overline{h(z)} dz \right| &\leq \int_E |f(z)F(z)| \left| \frac{1}{h} - \bar{h} \right| |dz| \\ &\leq \int_E |fF| \frac{(1 - |h|^2)}{|h|} |dz| \\ &\leq \int_E |fF| \frac{(1 - |h|)(1 + |h|)}{|h|} |dz| \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \int_E |fF| |dz| \\ &\leq 4\varepsilon \|F\|_1 \end{aligned}$$

従って、

$$(3-9) \quad \left| \int_E \frac{f(z)F(z)}{h(z)} dz - \int_E f(z)F(z)\bar{h} dz \right| \leq 4\varepsilon \|F\|_1.$$

また、(3-6) より、

$$(3-10) \quad \left| \int_E f(z)F(z)h(\bar{z})dz - \int_{\partial D} f(z)F(z)h(\bar{z})dz \right| \leq \int_{\partial D \setminus E} |f(z)F(z)h(\bar{z})||dz| \leq 2\varepsilon \|F\|_1.$$

(3-9) と (3-10) より、

$$(3-11) \quad \left| \int_E \frac{f(z)F(z)}{h(z)} dz - \int_{\partial D} fFh(\bar{z})dz \right| \leq 6\varepsilon \|F\|_1 \quad (F \in H^1).$$

さて、 $E_r \subset \partial D$ を次で定義する。

$$(3-12) \quad rE_r = \partial G_r \cap \partial D_r$$

このとき、

$$(3-13) \quad d\theta(E \cap E_r) \longrightarrow d\theta(E) \quad (\text{as } r \rightarrow 1)$$

となっている。

G_r の定義と (3-2), (3-5) より、

$$(3-14) \quad |h| \geq 1 - \varepsilon \text{ on } G_r.$$

さらに、 rE_r の定義より、

$$(3-15) \quad |h| \geq 1 - \varepsilon > \frac{1}{2} \text{ on } rE_r.$$

従って、(3-15) より、 $r \rightarrow 1$ のとき、

$$\begin{aligned} \left| \int_{E_r \setminus E} \left(\frac{fF}{h} \right) (rz) dz \right| &\leq 2 \int_{\partial D \setminus E} |(fF)(rz)||dz| \\ &\rightarrow 2 \int_{\partial D \setminus E} |(fF)(z)||dz| \end{aligned}$$

ゆえに、 E の定義より、

$$\limsup_{r \rightarrow 1} \left| \int_{E_r \setminus E} \left(\frac{fF}{h} \right) (rz) dz \right| \leq 4\varepsilon \|F\|_1.$$

さらに、等式

$$\int_{\partial G_r \cap \partial D_r} \frac{f(z)F(z)}{h(z)} dz - r \int_{E_r \cap E} \left(\frac{fF}{h} \right) (rz) dz = r \int_{E_r \setminus E} \left(\frac{fF}{h} \right) (rz) dz$$

であるから、

$$(3-16) \quad \limsup_{r \rightarrow 1} \left| \int_{\partial G_r \cap \partial D_r} \frac{f(z)F(z)}{h(z)} dz - r \int_{E_r \cap E} \left(\frac{fF}{h} \right) (rz) dz \right| \leq 4\varepsilon \|F\|_1$$

また、(3-13) と ルベーグの有界収束定理により、

$$(3-17) \quad r \int_{E_r \cap E} \left(\frac{fF}{h} \right) (rz) dz \longrightarrow \int_E \left(\frac{fF}{h} \right) (z) dz \quad (\text{as } r \rightarrow 1)$$

(3-8)(3-11)(3-16)(3-17) より、

$$(3-18) \quad \left| \int_{\Gamma} \frac{fF}{h} dz + \int_{\partial D} fF \bar{h} dz \right| \leq 10\varepsilon \|F\|_1 \quad (F \in H_0^1)$$

(3-1),(3-2),(3-3),(3-4) より、

$$(3-19) \quad \left| \int_{\Gamma} \frac{fF}{h} dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \int_{\Gamma} |F| |dz| \leq 2C\varepsilon \|F\|_1 \quad (F \in H_0^1)$$

従って、(3-18),(3-19) より、

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial D} fF \bar{h} dz \right| &\leq \left| \int_{\Gamma} \frac{fF}{h} dz \right| + 10\varepsilon \|F\|_1 \\ &\leq (10 + 2C)\varepsilon \|F\|_1 \quad (F \in H_0^1) \end{aligned}$$

ここで、 $L^\infty/H^\infty \cong (H_0^1)^*$ であることから、上の評価を商ノルムでかくと、

$$\|f|h|^2 + hH^\infty\| = \|f\bar{h} + H^\infty\| \leq (10 + 2C)\varepsilon$$

を得る。従って、

$$\begin{aligned} \|f + hH^\infty\| &\leq \|f - f|h|^2\| + \|f|h|^2 + hH^\infty\| \\ &\leq \|f(1 - |h|^2)\| + (10 + 2C)\varepsilon \\ &\leq \|2f(1 - |h|)\| + (10 + 2C)\varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon + (10 + 2C)\varepsilon \\ &\leq (12 + 2C)\varepsilon \end{aligned}$$

ε は任意であるから、 $f \in \bar{P}$. $\square$

References

- [1] W. Rudin, The closed ideals in an algebra of analytic functions, Canadian. J. Math. 9(1957),426-434.
- [2] R. Mortini, Closed and prime ideals in the algebras of bounded analytic functions, Bull. Austral. Math. Soc. 35(1987),213-229.
- [3] P. Gorkin and R. Mortini, Alling's conjecture on closed prime ideals. J. Funct. Anal. 148(1997),185-190.
- [4] J. Bourgain, On finitely generated closed ideals in H^∞ , Ann. Inst. Fourier. 35(1985),163-174.
- [5] D. Suárez, Čech cohomology and covering dimension for the H^∞ Maximal ideal space, J. Funct. Anal. 123(1994),233-263.
- [6] C. Guillory and D. Sarason, Division in $H^\infty + C$, , Michigan Math. J. 28(1981),178-181.