

Stunted projective spaces の stable Hurewicz image について.

和歌山大学 森杉 馨 (Kaoru Morisugi)

和歌山大学 今岡光範 (Mitsunori Imaoka)

§1. Introduction

HP^n (resp. CP^n) ($1 \leq n \leq \infty$) を quaternionic (complex) n -dim projective space とし、 Q^n ($1 \leq n \leq \infty$) を $(4n-1)$ -dim quaternionic quasi-projective space とする。そして KP^n を HP^n または ΣQ^n を表わす。

(以下、 ΣX は X の reduced suspension, $\Sigma^i X = \Sigma \cdots \Sigma X$ (i 回) とする.)

本稿では、 KP^∞ に対する ある stable map $\Sigma^{4n} KP^\infty \longrightarrow KP^\infty$ を定義し、それを用いて、stable homotopy group $\pi_*^S(KP^\infty)$ の free part の生成元が構成できることと、stunted projective space KP^n/KP^l の top cell の attaching map の位数に関するいくつかの結果が得られることを報告する。

我々の結果るべ方法は多くが stable category の中で与えられるので、space X は同時にその suspension spectrum を表わし、map $f: X \longrightarrow Y$ は X, Y の suspension spectra の間の degree 0 の map を表わす。例えば、 $f: \Sigma^m X \longrightarrow Y$ と書けば、degree $-m$ の stable map を

意味ある。更に map f の stable homotopy class も同じ f で表わす。

KP^n 及び CP^n の整係数 homology group は次の様に表わす：

$$\tilde{H}_*(HP^n) = \mathbb{Z}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}, \quad \dim \beta_i = 4i.$$

$$\tilde{H}_*(Q^n) = \mathbb{Z}\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}, \quad \dim \gamma_i = 4i-1.$$

$$\tilde{H}_*(CP^n) = \mathbb{Z}\{b_1, b_2, \dots, b_n\}, \quad \dim b_i = 2i.$$

KP^n で HP^n と ΣQ^n を表わすとき、 β_i と γ_i を共に β_i で表わすことにする。つまり

$$\tilde{H}_*(KP^n) = \mathbb{Z}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}, \quad \dim \beta_i = 4i.$$

これらの生成元は、次の関係を満たす様にとる。 cofiber seq.

$$(1.1) \quad CP^\infty \xrightarrow{g} HP^\infty \longrightarrow Q^\infty \xrightarrow{\Delta} \Sigma CP^\infty \quad (\text{cf. [James]})$$

$$\text{に対し、} \quad g_*(b_{2i}) = \beta_i, \quad \Delta_* \gamma_i = b_{2i-1}.$$

§2. Stable self maps of KP^∞

この章では、次の結果を示す。

定理 2.1. $n \geq 0, \Delta \geq 1$ のとき、homology group の induced homom. が次の形を与えらる stable map

$$f(n, \Delta) : \Sigma^{4n} KP^\infty \longrightarrow KP^\infty$$

が存在する：

$$f(n, \Delta)_*(\beta_k) = \begin{cases} a(n, \Delta-1) \frac{(2n+2k)!}{(2k)!} \left(\sum_{i=0}^{\Delta-1} (-1)^i \binom{2\Delta}{i} (\Delta-i)^{2k} \right) \beta_{n+k}, & (KP^\infty = HP^\infty \text{ のとき}), \\ a(n, \Delta-1) \frac{(2n+2k-1)!}{(2k-1)!} \left(\sum_{i=0}^{\Delta-1} (-1)^i \binom{\Delta}{i} (\Delta-i)^{2k-1} \right) \beta_{n+k}, & (KP^\infty = \Sigma Q^\infty \text{ のとき}). \end{cases}$$

ここで $a(i) = 1$ (i ; 偶数), $= 2$ (i ; 奇数) とする。

そして更に、 $\{f(n, s)_*\}_{s \geq 1}$ は $[\Sigma^{4n} HP^\infty, HP^\infty]^S$ から

$\text{Hom}(H_*(HP^\infty), H_{4n+*}(HP^\infty))$ への自然な map の像の基底をなす。

($[X, Y]^S = \{f: X \rightarrow Y \text{ (stable map) の stable homotopy class} \}$) 』

特に上の定理の stable map のうち、

$$(2.2) \quad f = f(2, 1): \Sigma^8 KP^\infty \rightarrow KP^\infty, \quad f' = f(1, 1): \Sigma^4 KP^\infty \rightarrow KP^\infty$$

とおく。そのとき、次の系が上の定理より直接求まる。いま

$x_n \in \pi_{4n}^S(KP^\infty)$ を次の様に定義する。

$$x_n = \begin{cases} f^m \cdot i : S^{8m+4} \xrightarrow{i} \Sigma^{8m} KP^\infty \xrightarrow{f^m} KP^\infty & (n=2m+1 \text{ のとき}), \\ f^{m-1} \cdot f' \cdot i : S^{8m} \xrightarrow{i} \Sigma^{8m-4} KP^\infty \xrightarrow{f'} \Sigma^{8(m-1)} KP^\infty \xrightarrow{f^{m-1}} KP^\infty & (n=2m \text{ のとき}). \end{cases}$$

系 2.2. x_n は $\pi_{4n}^S(KP^\infty)$ の free part の生成元であり、

$$(2.3) \quad h(x_n) = \begin{cases} \frac{(2n)!}{a(n)} \beta_n & (KP^\infty = HP^\infty \text{ のとき}), \\ a(n-1)(2n-1)! \beta_n & (KP^\infty = \Sigma Q^\infty \text{ のとき}). \end{cases}$$

ここで、 $h: \pi_{4n}^S(KP^\infty) \rightarrow H_{4n}(KP^\infty)$ は stable Hurewicz homom.,

$a(i)$ は定理 2.1 における記号である。』

$\text{Im } h$ の Index については、[Segal], [McGibbon] ($KP^\infty = HP^\infty$ のとき), [Walker] ($KP^\infty = \Sigma Q^\infty$ のとき) に示されている。系 2.2 は $\pi_{4n}^S(KP^\infty)$ の具体的な生成元が KP^∞ の stable self map を用いて

構成できることを主張している。尚、 CP^∞ に対する系 2.2 の型の結果は classical に知られている。(cf. [Toda 1])

$f(n, \Delta)$ の構成には、Segal-Becker による map

$$(2.4) \quad \tau: BS_p \rightarrow \Omega^\infty \Sigma^\infty HP^\infty, \quad \tau_c: BU \rightarrow \Omega^\infty \Sigma^\infty CP^\infty$$

を用いる。これらの map は、inclusion $j: HP^\infty \rightarrow BS_p$, $j_c: CP^\infty \rightarrow BU$ の canonical extension $\bar{j}: \Omega^\infty \Sigma^\infty HP^\infty \rightarrow BS_p$, $\bar{j}_c: \Omega^\infty \Sigma^\infty CP^\infty \rightarrow BU$ に対して、 $\bar{j}\tau = id$, $\bar{j}_c\tau_c = id$ を満たす。いま、 $\tilde{\tau}: BS_p \rightarrow HP^\infty$, $\tilde{\tau}_c: BU \rightarrow CP^\infty$ をそれぞれ τ , τ_c の adjoint map である stable map とする。次は明らか。

補題 2.3. $\tilde{\tau}_*(j_*\beta_n) = \beta_n$, $\tilde{\tau}_*(decomp.) = 0$,
 $\tilde{\tau}_{c*}(j_{c*}b_n) = b_n$, $\tilde{\tau}_{c*}(decomp.) = 0$. $\square$

さて、 $c': \tilde{KSp}(\Sigma^{4n} HP^\infty) \rightarrow \tilde{K}(\Sigma^{4n} HP^\infty)$ を complexification とする。

よく知られている様に、 c' は単射であり、その像は

$\{a(n+\Delta-1)x^{2n}z^\Delta \mid \Delta \geq 1\}$ ($a(i)$ は定理 2.1 の記号) で生成されている。ここで、 $x \in \tilde{K}(S^2)$ は generator, $z = c'(\xi - 1)$ (ξ は HP^∞ 上の canonical quaternionic line bundle) である。いま、

$f'(n, \Delta): \Sigma^{4n} HP^\infty \rightarrow BS_p$ は、 $a(n+\Delta-1)x^{2n}z^\Delta$ を表す map とし、

合成 $\tau f'(n, \Delta): \Sigma^{4n} HP^\infty \rightarrow BS_p \rightarrow \Omega^\infty \Sigma^\infty HP^\infty$ の

adjoint map を $f(n, \Delta)$ と定義する。つまり

$$(2.5) \quad f(n, \Delta) : \Sigma^{4n} \mathbb{H}P^\infty \longrightarrow \mathbb{H}P^\infty \quad (\text{stable map}).$$

一方、 $a(n+\Delta-1) \pm^{2n} \tilde{\tau}^\Delta \in \tilde{K}(\Sigma^{4n} \mathbb{C}P^\infty)$ ($\tilde{\tau} = \tau - 1$, τ は $\mathbb{C}P^\infty$ 上の canonical complex line bundle) を考え、それを表す map を $f'_c(n, \Delta) : \Sigma^{4n} \mathbb{C}P^\infty \longrightarrow BU$ とする。合成 $\tau_c f'_c(n, \Delta) : \Sigma^{4n} \mathbb{C}P^\infty \longrightarrow BU \longrightarrow \Omega^\infty \Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty$ の adjoint map を

$$(2.6) \quad f_c(n, \Delta) : \Sigma^{4n} \mathbb{C}P^\infty \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty \quad (\text{stable map})$$

とする。このとき、natural map $\vartheta : \mathbb{C}P^\infty \longrightarrow \mathbb{H}P^\infty$, $\vartheta : BU \longrightarrow BSp$ に関して、 $f'(n, \Delta)$ 及び $f_c(n, \Delta)$ の定義より $\vartheta f'_c(n, \Delta) = f'(n, \Delta)(\Sigma^{4n} \vartheta) : \Sigma^{4n} \mathbb{C}P^\infty \longrightarrow BSp$ が成り立つ。更に、[Kono] により $(\Omega^\infty \Sigma^\infty \vartheta) \tau_c = \tau \vartheta : BU \longrightarrow \Omega^\infty \Sigma^\infty \mathbb{H}P^\infty$ が成り立ち、それ故 $\vartheta f_c(n, \Delta) = f(n, \Delta)(\Sigma^{4n} \vartheta)$ が成り立つ。(1.1) の cofiber としての等式により、

$$(2.7) \quad g(n, \Delta) : \Sigma^{4n} \mathbb{Q}^\infty \longrightarrow \mathbb{Q}^\infty \quad (\text{stable map})$$

が、次の stable diagram を可換にする様に定義できる:

$$(2.8) \quad \begin{array}{ccccc} \Sigma^{4n} \mathbb{H}P^\infty & \longrightarrow & \Sigma^{4n} \mathbb{Q}^\infty & \longrightarrow & \Sigma^{4n+1} \mathbb{C}P^\infty \\ \downarrow f(n, \Delta) & & \downarrow g(n, \Delta) & & \downarrow \Sigma f_c(n, \Delta) \\ \mathbb{H}P^\infty & \longrightarrow & \mathbb{Q}^\infty & \longrightarrow & \Sigma \mathbb{C}P^\infty. \end{array}$$

いま、 $f(n, \Delta) : \Sigma^{4n} \mathbb{K}P^\infty \longrightarrow \mathbb{K}P^\infty$ を、 $\mathbb{K}P^\infty = \mathbb{H}P^\infty$ のとき (2.5) の $f(n, \Delta)$, $\mathbb{K}P^\infty = \Sigma \mathbb{Q}^\infty$ のとき、(2.7) の $g(n, \Delta)$ として定義する。

定理 2.1 は、これらの定義と補題 2.3 及び特性類に関する基本的な計算によって証明出来る。

§3. Stable Hurewicz image of KP^n/KP^i ($i=1, 2$)

Axiyah-Hürzebruch spectral sequence

$$(3.1) \quad E_{p,q}^2 = \tilde{H}_p(KP^\infty; \pi_q^S(S^0)) \implies \pi_{p+q}^S(KP^\infty)$$

を考える。§2 の系 2.2 は、次のことを示している：

$$\tau \beta_n \in E_{4n,0}^\infty \iff \begin{cases} \frac{(2n)!}{a(n)} \mid \tau & (KP^\infty = HP^\infty \text{ のとき}), \\ a(n+1)(2n-1)! \mid \tau & (KP^\infty = \Sigma Q^\infty \text{ のとき}). \end{cases}$$

$\tau = 2$ 、 $a(i) = 1$ (i ; 偶数)、 $= 2$ (i ; 奇数) であり、この記号は以後断わりなく用いる。 $k \mid l$ は整数 k が整数 l の約数であることを示す。

この章ではまず、§2 の stable map $f: \Sigma^8 KP^\infty \rightarrow KP^\infty$ を用いて、(3.1) の spectral sequence の transgressive element に関して、次の結果を示す。いま、

$$t_n = \begin{cases} \frac{(2n)!}{60} & (n; \text{奇数}) \\ \frac{(2n)!}{24} & (n; \text{偶数}) \end{cases} \quad (KP^\infty = HP^\infty \text{ のとき}), = \begin{cases} \frac{(2n-1)!}{15} & (n; \text{奇数}) \\ \frac{(2n-1)!}{6} & (n; \text{偶数}) \end{cases} \quad (KP^\infty = \Sigma Q^\infty \text{ のとき})$$

とある。

定理 3.1. $n \geq 2$ のとき、 $\tau_n \beta_n \in E_{4n,0}^{4n-4}$ で、 $d^{4n-4}(\tau_n \beta_n)$

$= \beta_1 \otimes \alpha(n)$ である。 ($\alpha(n)$ は (3.4) で定義する。) $\square$

次の記号を用いる。

- (1) $KP_\ell^n = KP^n / KP^{\ell-1}$ ($n \geq \ell \geq 1$); stunted projective space,
 $p_{k,\ell} : KP_k^n \rightarrow KP_\ell^n$; collapsing map, $i_{k,\ell} : KP_m^k \rightarrow KP_m^\ell$; inclusion
 map, ε として、 $\partial_k : KP_{k+1}^n \rightarrow \Sigma KP^k$ は cofiber sequence
 $KP^k \xrightarrow{i_{k,n}} KP^n \xrightarrow{p_{k,n+1}} KP_{k+1}^n \xrightarrow{\partial_k} \Sigma KP^k$ を与えらる map.
- (2) $M_t = S^0 \cup_t e^1$ ($t \in \mathbb{Z}$); mod t Moore spectrum, $i_0 : S^0 \rightarrow M_t$;
 inclusion map, $p_1 : M_t \rightarrow S^1$; projection.
- (3) $J_\ell : \pi_\ell(S^0) \rightarrow \pi_\ell^S(S^0)$; stable J -homom., $j_{4k-1} \in \pi_{4k-1}^S(S^0)$;
 $\text{Im } J_{4k-1}$ の生成元。

さて、§2 で定義した stable map $f : \Sigma^8 KP^\infty \rightarrow KP^\infty$ を、 $\Sigma^8 KP^n$
 に制限すれば、cellular approximation により、stable maps $f :$
 $\Sigma^8 KP^n \rightarrow KP^{n+2}$ 及び $f : \Sigma^8 KP_\ell^n \rightarrow KP_{\ell+2}^{n+2}$ が考えられる。

これらの homology induced map は、定理 2.1 により

$$(3.2) \quad f_*(\beta_n) = \begin{cases} \frac{(2n+4)!}{(2n)!} \beta_{n+2} & (KP_\ell^m = HP_\ell^m \text{ のとき}), \\ \frac{(2n+3)!}{(2n-1)!} \beta_{n+2} & (KP_\ell^m = \Sigma Q_\ell^m \text{ のとき}). \end{cases}$$

を満たす。特に $\Sigma^8 KP^1 = S^{12}$ に制限した stable map $f \in$

$f_1 : S^{12} \rightarrow KP^3$ で表わす。そのとき、 KP^3 の cell-structure に

より、cofiber sequences の間の次の可換図が成り立つ：

$$(3.3) \quad \begin{array}{ccccccc} \Sigma^{11} M_* & \xrightarrow{p_1} & S^{12} & \xrightarrow{\tau_{30}} & S^{12} & \xrightarrow{i_0} & \Sigma^{12} M_* \\ \downarrow h(1) & & \downarrow f_1 & & \downarrow g' & & \downarrow h(1) \\ S^4 & \xrightarrow{i_{1,3}} & KP^3 & \xrightarrow{p_{1,2}} & KP^3_2 & \xrightarrow{\omega_1} & S^5. \end{array}$$

但し、この図において、 $KP^3 = HP^3$ (resp. ΣQ^3) の場合に、

$\tau = 30$ (resp. 15), g' は生成元 $\tau_{12} \in H_{12}(S^{12})$ に対し $g'_*(\tau_{12}) = 12\beta_3$

(resp. $8\beta_3$) をみたす map, $h(1)$ は $8\bar{\sigma}_7$ (resp. $16\bar{\sigma}_7$) のある

extension である。更に、 $A(1): \Sigma^8 M_* \rightarrow M_* \in h(1)$ の任意の coextension とする。

他方、 $KP^\infty = HP^\infty$ (resp. ΣQ^∞) の場合に、 $\Delta = 24$ (resp. 12),

$h(2): \Sigma^3 M_* \rightarrow S^0$ は $\bar{\sigma}_3$ (resp. $2\bar{\sigma}_3$) の任意の extension, $A(2):$

$\Sigma^8 M_* \rightarrow M_*$ を $p_1 A(2) i_0 = 10\bar{\sigma}_7$ (resp. $20\bar{\sigma}_7$) をみたす map とする。

定理 3.2. $\varepsilon = 1$ (resp. 2), $k(\varepsilon) = 7$ (resp. 3), $M(\varepsilon) = M_*$

(resp. M_Δ) とする。そのとき、次の図は可換である。

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma^{12+k(\varepsilon)} M(\varepsilon) & \xrightarrow{h(\varepsilon)} & S^{12} & \xrightarrow{f_1} & KP^3 \\ \downarrow A(\varepsilon) & & & & \uparrow i_{1,3} \\ \Sigma^{4+k(\varepsilon)} M(\varepsilon) & \xrightarrow{h(\varepsilon)} & & & S^4 \end{array}$$

(証明の概略)

$\varepsilon = 1$ のときは、(3.3) と $A(1)$ の定義により、

$$f_1 h(1) = f_1 p_1 A(1) = i_{1,3} h(1) A(1)$$

となり、定理が成り立つ。

$\varepsilon=2$ の場合。 KP^3 の cell-structure と球面の homotopy group の結果 (cf. [Joda 2]) を用いて、 map $\varphi: \Sigma^1 M(2) \rightarrow S^4$ a.t. $i_{1,3}\varphi = f_1 h(2)$ が存在することがわかる。 $\pi_{12}^S(S^0) = 0$ であることから、 $\varphi = h(2)A(2)$ であるための必要十分条件は $\varphi i_0 = h(2)A(2)i_0 \in \pi_{11}^S(S^0)$ であるが、 $\pi_{11}^S(S^0) = \text{Im } J_{11}$ であることから、 [Adams] により、 それは $e'_R(\varphi i_0) = e'_R(h(2)A(2)i_0)$ であることに必要十分である。 $h(2), A(2)$ の定義により、 $h(2)A(2)i_0 \in \langle \tilde{f}_3, 24, 10\tilde{g}_7 \rangle = 21\tilde{g}_{11}$ ($KP^3 = HP^3$ のとき), $\in \langle 2\tilde{f}_3, 12, 20\tilde{g}_7 \rangle = 42\tilde{g}_{11}$ ($KP^3 = \Sigma Q^3$ のとき) ($\langle \cdot, \cdot, \cdot \rangle$ は Joda-bracket) であり、 $e'_R(\varphi i_0)$ の方は functional Pontrjagin character を計算することによって、上記の等号が成り立つ。 (証明終)

定理 3.1 の $\alpha(n) \in \pi_{2n-5}^S(S^0)$ ($n \geq 2$) は次の様に定義する:

$$\alpha(n) = \begin{cases} h(1)A(1)^{m-1}i_0 & (n=2m+1 \text{ のとき}), \\ h(2)A(2)^{m-1}i_0 & (n=2m \text{ のとき}). \end{cases}$$

(定理 3.1 の証明) n が奇数の場合と偶数の場合に分け、それぞれの場合に帰納法を示す。 $n=2$ の場合は、 HP^2 が $\tilde{f}_3$ の mapping cone, Q^2 が $2\tilde{f}_3$ の mapping cone であることより、 $n=3$ の場合は、 (3.3) より 定理は成り立つ。

次の可換図を考える:

$$\begin{array}{ccccc}
 S^{4n+8} = \Sigma^8 KP_n^n & \xrightarrow{f} & KP_{n+2}^{n+2} = S^{4n+8} & & \\
 \uparrow p_{2,n} & & \nearrow p_{2,n+2} & & \uparrow p_{4,n+2} \\
 \Sigma^8 KP_2^n & \xrightarrow{f} & KP_2^{n+2} & \xrightarrow{p_{2,4}} & KP_4^{n+2} \\
 \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_3 \\
 S^{13} = \Sigma^9 KP^1 & \xrightarrow{f_1} & \Sigma KP^3 & \xrightarrow{p_{1,2}} & \Sigma KP_2^3 \\
 & & \downarrow \partial_1 & & \\
 & & S^5 = \Sigma KP^1 & \xrightarrow{i_{1,3}} & \Sigma KP^3
 \end{array}$$

(3.5)

定理が n の場合に成り立つための必要十分条件は、ある map $X(n) : S^{4n} \rightarrow KP_2^n$ で、 $\deg p_{2,n} X(n) = n$ かつ $\partial_1 X(n) = \alpha(n)$ をみたすものが存在することである。

いま、定理 3.2 と $\alpha(n)$ の定義により

$$(3.6) \quad f_1 \alpha(n) = i_{1,3} \alpha(n+2)$$

が成り立つ。このことは、(3.5) を用いて、 $\partial' f X(n) = 0$ を導く。故に、ある map $X' : S^{8n+4} \rightarrow KP_2^{n+2}$ s.t. $p_{2,4} X' = f \cdot X(n)$ が存在し、(3.5) と (3.2) により、 $\deg p_{2,n+2} X' = n+2$ が成り立つ。更に、ある map $Y' : S^{4n+8} \rightarrow KP_2^3$ が存在し、 $\partial_1 (X' + i_{3,n+2} Y') = \alpha(n+2)$ をみたす。そこで、 $X(n+2) = X' + i_{3,n+2} Y'$ とすれば、 $\deg p_{2,n+2} X(n+2) = \deg p_{2,n+2} X' = n+2$ かつ、 $\partial_1 X(n+2) = \alpha(n+2)$ が成り立ち、定理が $n+2$ の場合に成り立つ。 (証明終)

さて、 $h_{n,n} : \pi_{4n}^S(KP_n^\infty) \longrightarrow H_{4n}(KP_n^\infty)$ を stable Hurewicz homomorphism とし、その cokernel の位数を (つまり、 $\text{Im } h_{n,n}$ の index) を $|h_{n,n}|$ で表わす。そして、 $|h_{n,n}|$ の素因数分解における 2 の指数 $v_2(|h_{n,n}|)$ を $|h_{n,n}|_2$ と表わす。

系 2.1 より、 $|h_{n,1}| = \frac{(2n)!}{a(n)} \quad (KP^\infty = HP^\infty \text{ のとき}), = a(n-1)(2n-1)!$

$(KP^\infty = \Sigma Q^\infty \text{ のとき})$ である。

定理 3.1 により 次の定理を得る。

定理 3.3. $n \geq 2$ のとき、

$$|h_{n,2}|_2 = \begin{cases} v_2\left(\frac{a(n)(2n)!}{8}\right) & (KP_2^\infty = HP_2^\infty \text{ のとき}), \\ v_2\left(\frac{(2n-1)!}{a(n+1)}\right) & (KP_2^\infty = \Sigma Q_2^\infty \text{ のとき}). \end{cases}$$

証明は、左辺 $\geq$ 右辺に関しては、KO-theory を用いた standard な代数的計算によって保証される。(詳細は省略するが、例えば $KP_2^\infty = \Sigma Q_2^\infty$ の場合には [Walker] 参照。) 故に、本質的なのは左辺 $\leq$ 右辺を示すことにあるが、それが 定理 3.1 によって保証されている。

以上の方法を更に押し進めて KP_3^∞ の場合に次の定理を得る。(証明は省略する。)

定理 3.4. $n \geq 1$ のとき、次をみたす $X_n \in {}_2\pi_{8n+4}^S(KP_3^{2n+1})$

が存在する:

$${}_2\bar{h}_{2n+1,3}(X_n) = \begin{cases} \frac{(4n+2)!}{16} \beta_{2n+1} & (KP_3^{2n+1} = HP_3^{2n+1} \text{ のとき}), \\ \frac{(4n+1)!}{8} \beta_{2n+1} & (KP_3^{2n+1} = \Sigma Q_3^{2n+1} \text{ のとき}). \end{cases}$$

== 即ち、 ${}_2\pi_*^S(X)$ は $\pi_*^S(X)$ の 2-part を表わし、 $h: {}_2\pi_*^S(X)$

$\rightarrow H_*(X; \mathbb{Z}_{(2)})$ は Hurewicz homom. である。□

§4. Complex James number

stunted complex projective space $CP_\ell^m = CP^m / CP^{\ell-1}$ に対して、

$$g_*: \pi_{2n-2}^S(CP_{n-k}^{n-1}) \rightarrow \pi_{2n-2}^S(CP_{n-1}^{n-1}) = \pi_{2n-2}^S(S^{2n-2}) \text{ の cokernel の}$$

位数を $U(n, k)$ で表わし、stable complex James number と呼ぶ。classical な結果として $U(n, n-1) = n!$ であることが知られている。 $k (\geq 0)$ が小さな値に対して、[Oshima] にする $U(n, k)$ の計算がある。

$U_2(n, k)$ で $U(n, k)$ の素因数分解における 2 の指数 $v_2(U(n, k))$ を表わすとき、§2 及び §3 の結果を用いて次を得る。

定理 4.1. (i) $U_2(2m, 2m-2) = v_2\left(\frac{(2m-1)!}{2}\right)$, $U_2(4m+1, 4m-1) = v_2((4m)!)$, $U_2(4m+3, 4m+1) = v_2\left(\frac{(4m+2)!}{2}\right)$.

$$(ii) \quad U_2(2m, 2m-3) = v_2\left(\frac{(2m-1)!}{2}\right), \quad U_2(2m+1, 2m-2) = v_2\left(\frac{(2m)!}{4}\right).$$

$$(iii) \quad U_2(4m+2, 4m-2) = v_2\left(\frac{(4m+1)!}{8}\right), \quad U_2(4m+3, 4m-1) = v_2\left(\frac{(4m+2)!}{4}\right).$$

$$(iv) \quad U_2(4m+2, 4m-3) = v_2\left(\frac{(4m+1)!}{8}\right), \quad U_2(4m+3, 4m-2) = v_2\left(\frac{(4m+2)!}{8}\right).$$

この証明には次の様な方法を用いる。 natural projection $\tau: CP^\infty \rightarrow HP^\infty$ に対する [Becker-Gottlieb] の transfer $\tau: HP_+^\infty \rightarrow CP_+^\infty$ を考えれば、 HP^∞ に対する $|h_{n,k}|$ によって $U(2n+1, 2n-2k)$ は上から評価される。又、(1.1) の $\Delta: Q^\infty \rightarrow \Sigma CP^\infty$ を考えれば、 Q^∞ に対する $|h_{n,k}|$ によって、 $U(2n, 2n-2k)$ は上から評価される。下からの評価は K -theory を用いる standard な方法による。(cf. [Walker].) それらの上下の評価が §2, §3 の方法を用いて一致する様にできるというのが定理の証明法である。

定理の (ii) を例にとって説明する。定理 3.1 によって、ある $X(n) \in \pi_{4n}^S(HP_2^n)$ s.t. $h_{n,2}(X(n)) = t_n \beta_n$ かつ、 $\alpha_1 X(n) = \alpha(n)$ が存在する。Transfer $\tau: HP_+^\infty \rightarrow CP_+^\infty$ について、 $\tau_*(X(n))$ を考えれば $h_{2n,3}(\tau_* X(n)) = 2 t_n b_{2n}$ を満たす。すなわち、 $h_{2n,3}: \pi_{4n}^S(CP_3^{2n}) \rightarrow H_{4n}(CP_3^{2n})$ は stable Hurwicz homom. である。このことから、 $U_2(2n+1, 2n-2) \leq U_2\left(\frac{a(n)(2n)!}{4}\right)$ となる。 $n(\geq 2)$ が偶数のとき、この上からの評価は代数的な下からの評価と一致し、求める解になる。 n が奇数のときはこのままでは代数的な下からの評価と 2 の指数が 1 だけの差がある。この場合を解決するために、次の方法を用いる。

[Toda] より、stable map $F: \Sigma^2 CP^\infty \rightarrow CP^\infty$ s.t. $F_*(b_n) = (n+1) b_{n+1}$ が存在する。cellular approximation により stable map

$F: \Sigma^2 CP_2^k \longrightarrow CP_{k+2}^{k+2}$ が与えられる。合成 $F \circ F \circ t \circ X(2m)$
 $: S^{8m+4} \longrightarrow CP_5^{4m+2}$ を与える。 $\pi_1(X(2m)) = \alpha(2m)$ であるこ
 とを用いて、ある stable map $Y_{2m+1}: S^{8m+4} \longrightarrow CP_3^{4m+2}$ s.t.
 $P_{3,5} Y_{2m+1} = F \circ F \circ t \circ X(2m)$ が存在することが証明出来る。
 F 及 t の homology induced map の形から、 $h_{4m+2,3}(Y_{2m+1})$
 $= \frac{(4m+2)!}{12} b_{2m+1}$ であることがわかる。このことより、
 $U_2(4m+2, 4m-1) \leq v_2\left(\frac{(4m+2)!}{4}\right)$ が得られ、代数的な下から
 の評価と一致し解を得る。 $U_2(2n, 2n-3)$ の方は、 $\mathbb{Q}^\infty$ から
 Δ を用いて得られるが、説明を省略する。

尚、 p が odd prime のとき、定理 4.1 に対応する $U_p(n, k)$ に
 関しては、[Knapp] によって調べられている。

References

- [Adams], On the groups $J(X)$ -IV, Topology, 5 (1966), 21-71.
 [Becker-Gottlieb], The transfer map and fiber bundles, Topology,
 14 (1975), 1-12.
 [James], The topology of Stiefel manifolds, London Math. Soc.
 Lecture note series, 24 (1976).
 [Knapp], Some applications of K -theory to framed bordism:
 E-invariant and transfer, Habilitationsschrift, Bonn, 1979.

- [Kōno], A note on the Segal-Becker type splittings, to appear in J. Math. Kyoto University.
- [McGibbon], Self maps of projective spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 271 (1982), 326-346.
- [Ōshima], On James numbers of stunted complex or quaternionic projective spaces, Osaka J. Math., 16 (1979), 479-504.
- [Segal], On the stable homotopy of quaternionic and complex projective spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 25 (1970), 838-841.
- [Toda 1], A topological proof of theorems of Bott and Borel-Hirzebruch for homotopy groups of unitary groups, Memoire Coll. Sci. Kyoto Univ., 32 (1959), 103-119.
- [Toda 2], Composition methods in homotopy groups of spheres, Annals of Math. Studies, no. 49.
- [Walker], Estimates for the complex and quaternionic James numbers, Quart. J. Math. Oxford (2), 32 (1981), 467-489.