

一般化された高木関数と そのウェーブレット展開について

On the generalized Takagi function and its wavelet expansion

松江工業高等専門学校人文・数理科学科 福田 尚広 (Naohiro Fukuda)

National Institute of Technology, Matsue College

筑波大学大学院数理物質科学研究科 木下 保 (Tamotu Kinoshita)

Institute of Mathematics, University of Tsukuba

筑波大学大学院数理物質科学研究科 鈴木 俊夫 (Toshio Suzuki)

Institute of Mathematics, University of Tsukuba

1 はじめに

高木関数とは, 1903年に高木貞治氏により発表された, 至る所微分不可能な連続関数である. 高木関数は, のこぎり型関数 $S(x) = \min_{k \in \mathbf{N}} |x - k|$ を用いて

$$T(x) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} S(2^j x) \quad (1)$$

で定義される. (1) を区間 $[0, 1]$ に制限したものを考えると, 2 次の B-spline 関数

$$N_2(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & \text{if } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

を用いることで,

$$T(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} 2^{-j-1} N_2(2^{j+1}x - 2k) \quad (2)$$

と書きなおすことができる.

1.1 一般化された高木関数

一般化された高木関数は、次の形で与えられる：

$$F(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j G(\Psi^j(x)). \quad (3)$$

ここで、 Ψ^j は Ψ を j 回合成した関数、即ち、 $\Psi^j(x) = \Psi^{j-1}(\Psi(x))$ とする。 G は初期関数と呼ばれ、 $\text{supp } G \subset [0, 1]$ を満たす。いま、 $G(x) = N_2(2x)$ 、 $c_j = 1$ 、 $t = 2^{-1}$ 、 Ψ を 2 次の Bernoulli シフト写像

$$B_2(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{if } \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とすると、高木関数 (1) の別表現

$$T(x) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} N_2(2B_2^j(x))$$

が得られる。一般化された高木関数は様々な研究が行われており、例えば次のような結果が知られている。

Proposition 1.1 (M. Krüppel, M. Yamaguti and M. Hata) 初期関数 G は $\text{supp } G \subset [0, 1]$ を満たすとし、 $c_j = 1$ とする。このとき、一般化された高木関数 (3) は

$$F(t, x) = tF(t, \Psi(x)) + G(x), \quad (t, x) \in [0, 1] \times \mathbf{R}$$

を満たす。

一方、 $c_j = (j+1)^{-1}$ に対して、我々は以下を示した。

Proposition 1.2 初期関数 G $\text{supp } G \subset [0, 1]$ を満たし、 $c_j = (j+1)^{-1}$ とする。このとき、一般化された高木関数 (3) は

$$F(t, x) = tF(t, \Psi(x)) - t \int_0^1 sF(ts, \Psi(x)) ds + G(x), \quad (t, x) \in [0, 1] \times \mathbf{R}$$

を満たす。

1.2 Main Results

Bernoulli シフト写像は次の形に一般化される：

$$B_p(x) = \begin{cases} px & \text{if } 0 < x \leq 1 \cdot p^{-1}, \\ px - 1 & \text{if } 1 \cdot p^{-1} < x \leq 2 \cdot p^{-1}, \\ px - 2 & \text{if } 2 \cdot p^{-1} < x \leq 3 \cdot p^{-1}, \\ \vdots & \\ px - (p-1) & \text{if } (p-1) \cdot p^{-1} < x \leq 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

いま、各 p に対して初期関数を

$$G(x) = \sum_{k=0}^{p-2} g(k+1)N_2(px-k)$$

とおく。ここで、各 $1 \leq k \leq p-1$ に対して、 $g(k) \in \mathbf{R}$ とし、 $g(0) = g(p) = 0$ と定める。 $x \in [0, 1]$ に対して、その p 進法での表現

$$x = 0.\xi_1\xi_2\cdots = 0 + \xi_1p^{-1} + \xi_2p^{-2} + \cdots$$

を考え、これにより定まる列 $\{\xi_j\}$ に対して、

$$D_J^{(p)} = \sum_{j=1}^J c_{j-1} (g(\xi_j + 1) - g(\xi_j))$$

を定める。 $x \in [0, 1]$ を p 進数で展開した際に、有限小数となるものを p -adic rational, 無限小数となるものを non p -adic rational と呼ぶことにする。 x が non p -adic rational のとき、 $\xi_J \neq 0$ なるようなものが ξ_J が無限個取れる。そこで、 $\xi_{J_m}^- \neq 0$ となる部分列 $\{J_m^-\}$ を考え、

$$r_m^- := c_{J_m^- - 1} (2g(\xi_{J_m^-}) - g(\xi_{J_m^-} - 1) - g(\xi_{J_m^-} + 1)) \xi_{J_m^-}$$

と定める。 $\xi_{J_m^-} \neq 0$ であるから、 $g(\xi_{J_m^-} - 1)$ は well-defined である。

同様にして、 x が non p -adic rational のとき、 $\xi_J \neq p-1$ なるようなものが ξ_J が無限個取れる。 $\xi_{J_m}^+ \neq p-1$ となる部分列 $\{J_m^+\}$ を考え、

$$r_m^+ := c_{J_m^+ - 1} (2g(\xi_{J_m^+} + 1) - g(\xi_{J_m^+}) - g(\xi_{J_m^+} + 2)) (\xi_{J_m^+} + 1)$$

と定める。 $\xi_{J_m^+} \neq p-1$ であるから、 $g(\xi_{J_m^+} + 2)$ は well-defined である。

これらを用いることで、次の定理が導かれる。

Theorem 1.3 $p \geq 2$ とし, $1 \leq k \leq p-1$ に対して, $g(k) \in \mathbf{R}$ と定め, $g(0) = g(p) = 0$ とする. $t = p^{-1}$, $\Psi(x) = B_p(x)$, $G(x) = \sum_{k=0}^{p-2} g_{k+1} N_2(px - k)$ とおき,

$$\mathbf{T}(x) := F(p^{-1}, x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j p^{-j} G\left(B_p^j(x)\right).$$

を考える. このとき, $\mathbf{T}(x)$ は以下の条件の少なくとも 1 つを満たすとき, $x \in [0, 1]$ で微分不可能である:

- (i) $\left\{D_{J_m^+}^{(p)} + r_m^+\right\}_{m \in \mathbf{N}}$ が収束しない.
- (ii) x が *non p-adic rational* のとき, $\left\{D_{J_m^-}^{(p)} + r_m^-\right\}_{m \in \mathbf{N}}$ が収束しない.
- (iii) x が *non p-adic rational* のとき, $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(D_{J_m^+}^{(p)} + r_m^+\right) \neq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(D_{J_m^-}^{(p)} + r_m^-\right)$.

(iii) の条件の, $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(D_{J_m^+}^{(p)} + r_m^+\right)$ は右側微分係数, $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(D_{J_m^-}^{(p)} + r_m^-\right)$ は左側微分係数を表している. つまり, $D_{J_m^\pm}^{(p)}$ と $r_m^\pm$ という, 微分係数を表す量を導入することにより, 微分不可能性に関する結果を記述することができた.

高木関数 (3) についての non p-adic rational $x = 0.101010 \dots$ における微分不可能性を, この定理を用いて考えてみよう. この x に対して, $J_m^+ = 2m$, $J_m^- = 2m-1$ であり,

$$\begin{aligned} D_{J_m^+}^{(2)} &= \sum_{j=1}^{2m} (1 - 2\xi_j) = (1-1) + \dots + (1-1) = 0 \quad \text{for all } m \in \mathbf{N} \\ D_{J_m^-}^{(2)} &= \sum_{j=1}^{2m-1} (1 - 2\xi_j) = 1 + (-1+1) + \dots + (-1+1) = 1 \quad \text{for all } m \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

さらに, $r_m^\pm = 2$ であることがわかる. 上の定理の条件 (iii) を用いることにより, $T(x)$ は $x = 0.101010 \dots$ で微分不可能であることがわかる.

Lipschitz 連続である関数は離散ウェーブレットで展開することができる. また, $T(x)$ は絶対連続でもあるから, 超関数の意味で微分することができる. 今回, 我々は Haar ウェーブレットを用いて, 高木関数をウェーブレット展開し, その L^2 ノルムを算出することに成功した.

Theorem 1.4 $c_j = 1$, $(j+1)^{-1}$ に対して, 関数

$$T(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j 2^{-j} N_2\left(2B_2^j(x)\right)$$

は, Haar ウェーブレット ψ^H を用いて,

$$T(x) = \sum_{J \in \mathbf{Z}} \sum_{K \in \mathbf{Z}} d_{J,K} \psi_{J,K}^H(x),$$

$$d_{J,K} = \begin{cases} 2^{-3/2J} \sum_{j=0}^{J-1} c_j \left(2 \left\lfloor \frac{K \bmod 2^{J-j}}{2^{J-j-1}} \right\rfloor - 1 \right) & \text{if } 0 \leq j \leq J-1, K \geq 0, \\ 2^{J/2-1} \sum_{j=0}^{\infty} c_j 2^{-j} & \text{if } J \leq -1, K = 0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (4)$$

と展開できる. ここで, $[x]$ は, x を超えない最大の整数を表す. また特に $c_j = (j+1)^{-1}$ のとき, $\|T\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 = \frac{1}{3} \text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) + (\log 2)^2$, $\|T'\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 = \frac{2}{3} \pi^2$ となる. ここで, $\text{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$ は多重対数関数と呼ばれる特殊関数である.

2 高木関数の L^2 ノルム

ここでは, Theorem 1.4 の $c_j = (j+1)^{-1}$ における, $\|T\|_{L^2}$ の値を直接的に求めてみることを考える. 次の補題を準備する.

Lemma 2.1

$$\int_0^1 N_2(2B_2^{j_1}(x)) N_2(2B_2^{j_2}(x)) dx = \begin{cases} \frac{1}{3} & (j_1 = j_2) \\ \frac{1}{4} & (j_1 \neq j_2) \end{cases} \quad (5)$$

$$\int_0^1 \frac{d}{dx} (N_2(2B_2^{j_1}(x))) \frac{d}{dx} (N_2(2B_2^{j_2}(x))) dx = \begin{cases} 4^{j+1} & (j_1 = j_2 = j) \\ 0 & (j_1 \neq j_2) \end{cases} \quad (6)$$

Proof まず (5) 式を計算する.

(a) $j_1 = j_2$ のとき:

$$\begin{aligned} \int_0^1 N_2(2B_2^{j_1}(x)) N_2(2B_2^{j_1}(x)) dx &= 2^{j_1} \int_0^{1/2^{j_1}} \{N_2(2B_2^{j_1}(x))\}^2 dx \\ &= 2^{j_1+1} \int_0^{1/2^{j_1+1}} (2^{j_1+1} x)^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(b) $j_1 \neq j_2$ のとき: $j_1 < j_2$ とする.

$$\begin{aligned} \int_0^1 N_2(2B_2^{j_1}(x)) N_2(2B_2^{j_2}(x)) dx &= 2^{j_1+1} \int_0^{1/2^{j_1+1}} N_2(2B_2^{j_1}(x)) N_2(2B_2^{j_2}(x)) dx \\ &= 2^{2j_1+2} \int_0^{1/2^{j_1+1}} x N_2(2B_2^{j_2}(x)) dx \end{aligned}$$

ここで,

$$\int_0^{1/2^{j_2}} (x+k) N_2(B_2^{j_2}(x)) dx = \frac{1}{2^{2(j_2+1)}} + \frac{k}{2^{j_2+1}}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2^{j_1+1}} x N_2(2B_2^{j_2}(x)) dx &= \sum_{k=0}^{2^{j_2-j_1-1}-1} \int_{k/2^{j_2+1}}^{(k+1)/2^{j_2+1}} x N_2(2B_2^{j_2}(x)) dx \\ &= \sum_{k=0}^{2^{j_2-j_1-1}-1} \int_0^{1/2^{j_2+1}} \left(x + \frac{k}{2^{j_2}}\right) N_2(2B_2^{j_2}(x)) dx \\ &= \sum_{k=0}^{2^{j_2-j_1-1}-1} \left(\frac{1}{2^{2(j_2+1)}} + \frac{k}{2^{2j_2+1}}\right) = \frac{1}{2^{2j_1+4}}. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \int_0^1 N_2(2B_2^{j_1}(x)) N_2(2B_2^{j_2}(x)) dx &= 2^{2j_1+2} \int_0^{1/2^{j_1+1}} x N_2(2B_2^{j_2}(x)) dx \\ &= 2^{2j_1+2} \frac{1}{2^{2j_1+4}} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

を得る. Haar ウェーブレットは

$$\psi^H(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < \frac{1}{2}), \\ -1 & (\frac{1}{2} \leq x < 1), \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義される. ウェーブレットの定義から, $\{\psi_{j,k}^H = 2^{j/2} \psi^H(2^j \cdot -k) \mid j, k \in \mathbf{Z}\}$ は $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底となる. また, 超関数の意味で微分をすると,

$$\frac{d}{dx} N_2(x) = \psi^H(2x)$$

となるから, (6) 式については,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \frac{d}{dx} (N_2(2B_2^{j_1}(x))) \frac{d}{dx} (N_2(2B_2^{j_2}(x))) dx \\
&= \int_0^1 \sum_{k_1=0}^{2^{j_1}-1} 2^{j_1+1} \psi^H(2^{j_1}x - k_1) \sum_{k_2=0}^{2^{j_2}-1} 2^{j_2+1} \psi^H(2^{j_2}x - k_2) \\
&= \int_0^1 \sum_{k_1=0}^{2^{j_1}-1} 2^{j_1/2+1} \psi_{j_1, k_1}^H(x) \sum_{k_2=0}^{2^{j_2}-1} 2^{j_2/2+1} \psi_{j_2, k_2}^H(x) dx \\
&= \sum_{k_1=0}^{2^{j_1}-1} \sum_{k_2=0}^{2^{j_2}-1} 2^{j_1/2+j_2/2+2} \int_0^1 \psi_{j_1, k_1}^H(x) \psi_{j_2, k_2}^H(x) dx \\
&= \sum_{k_1=0}^{2^{j_1}-1} \sum_{k_2=0}^{2^{j_2}-1} 2^{j_1/2+j_2/2+2} \delta_{j_1, j_2} \delta_{k_1, k_2} = \begin{cases} 4^{j+1} & (j_1 = j_2 = j) \\ 0 & (j_1 \neq j_2) \end{cases}
\end{aligned}$$

さて, この Lemma を用いると,

$$\begin{aligned}
\|T\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbf{R}} \left(\sum_{j_1=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j_1}(j_1+1)} N_2(2B_2^{j_1}(x)) \right) \left(\sum_{j_2=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j_2}(j_2+1)} N_2(2B_2^{j_2}(x)) \right) dx \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j(j+1)^2} \int_0^1 (N_2(2B_2^j(x)))^2 dx \\
&\quad + \sum_{j_1 \neq j_2} \frac{1}{2^{j_1+j_2}(j_1+1)(j_2+1)} \int_0^1 (N_2(2B_2^{j_1}(x))) (N_2(2B_2^{j_2}(x))) dx \\
&= \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j(j+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{j_1 \neq j_2} \frac{1}{2^{j_1+j_2}(j_1+1)(j_2+1)} \\
&= \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j(j+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{j_1=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j_1}(j_1+1)} \left(\sum_{j_2=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j_2}(j_2+1)} - \frac{1}{2^{j_1}(j_1+1)} \right) \\
&= \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j(j+1)^2} + \frac{1}{4} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j(j+1)} \right)^2 \\
&= \frac{1}{3} \text{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) + (\log 2)^2
\end{aligned}$$

同様にして,

$$\begin{aligned}
 \|T'\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbf{R}} \left(\sum_{j_1=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j_1}(j_1+1)} \frac{d}{dx} N_2(2B_2^{j_1}(x)) \right) \left(\sum_{j_2=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j_2}(j_2+1)} \frac{d}{dx} N_2(2B_2^{j_2}(x)) \right) dx \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j(j+1)^2} \int_0^1 (N_2(2B_2^j(x)))^2 dx \\
 &\quad + \sum_{j_1 \neq j_2} \frac{1}{2^{j_1+j_2}(j_1+1)(j_2+1)} \int_0^1 \frac{d}{dx} (N_2(2B_2^{j_1}(x))) \frac{d}{dx} (N_2(2B_2^{j_2}(x))) dx \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j(j+1)^2} 4^{j+1} = \frac{2}{3} \pi^2
 \end{aligned}$$

を得る. [7] では, T の L^2 ノルムの値を, 離散ウェーブレットや Fourier 解析の手法を用いて値を求めた. しかし, 上にあるように, 実際に直接的に求めることも可能である. Theorem 1.3 と Theorem 1.4 を始めとした詳細や証明については, 投稿中の論文 [7] をお待ちください.

References

- [1] P. C. Allaart and K. Kawamura, The improper infinite derivatives of Takagi's nowhere-differentiable function, J. Math. Anal. Appl., **372**, 656–665 (2010).
- [2] P. C. Allaart and K. Kawamura, The Takagi function: a survey, Real Anal. Exchange, **37**, 1–54 (2011/2012).
- [3] E. G. Begle and W. L. Ayres, On Hildebrandt's example of a function without a finite derivative, Amer. Math. Monthly, **43**, 294–296 (1936).
- [4] I. Daubechies, Ten lectures on wavelets, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 61, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.
- [5] N. Fukuda and T. Kinoshita, On non-symmetric orthogonal spline wavelets, Southeast Asian Bull. Math., **36**, No. 3, 319–341 (2012).
- [6] N. Fukuda, T. Kinoshita and T. Suzuki, On the unconditional convergence of wavelet expansions for continuous functions, to appear in Int. J. Wavelets. Multiresolut. Inf. Process., **14**, No.1, 1–18 (2016).

- [7] N. Fukuda, T. Kinoshita and T. Suzuki, On a Generalization of the Takagi Function and its Wavelet Expansion, preprint.
- [8] N. Kôno, On generalized Takagi functions, *Acta Math. Hungar*, **49**, No. 3-4, 315–324 (1987).
- [9] M. Krüppel, On the extrema and the improper derivatives of Takagi's continuous nowhere differentiable function, *Rostock, Math.Kolloq.*, **62**, 41–59 (2007).
- [10] M. Krüppel, On the improper derivatives of Takagi's continuous nowhere differentiable function, *Rostock. Math.Kolloq.*, **65**, 3–13 (2010).
- [11] T. Takagi, A simple example of the continuous function without derivative, *Phys.-Math. Soc. Japan*, **1**, 176–177 (1903). The Collected Papers of Teiji Takagi, S. Kuroda, Ed., Iwanami 5–6(1973).
- [12] M. Yamaguti and M. Hata, Weierstrass's function and chaos, *Hokkaido Math. J.*, **12**, 333–342 (1983).
- [13] M. Yamaguti and M. Hata, The Takagi function and its generalization, *Japan, I. Appl Math.*, **1**, 183–199 (1984).