

限定された観測データを用いた ARX モデルによる剛性・減衰同定法

正会員 ○前田朋宏*
同 吉富信太**
同 竹脇 出**システム同定 構造ヘルスモニタリング 物理パラメータ
ARX モデル パラメータ推定 テイラー展開

1. 序

地震時の応答や常時微動等を観測し、構造物の固有モード特性や物理パラメータを同定するシステム同定技術に関する研究成果^{1, 2)}は、建物の構造ヘルスモニタリング技術に応用され、その需要がますます増大している。

本論文は中村・竹脇らによる物理パラメータ（剛性・減衰）の同定手法^{3, 4)}の問題点を克服したものである。この手法では、全層の応答を同時に計測することなく、2つの層の応答のみを用いて1つの層の剛性・減衰を同定できる。その際に、同定に用いる振動数領域の関数の $\omega \rightarrow 0$ における極限值を用いるが、この関数は振動数0近傍でノイズの影響を受けやすく、実測データでは同定精度が低下する。本論文では、この困難点を克服するために時系列モデルである ARX モデル⁵⁾を有効に利用し、建物の物理パラメータを ARX パラメータで表現する。尚、本稿では紙面の都合上、剛性同定について述べる。

2. 地動入力時の応答を用いた剛性・減衰の同定法

本論文は文献 3)に基づくため、その内容を本節で簡潔に説明する。この手法では、図 1 に示すような線形弾性剛性、線形粘性減衰、線形履歴減衰を有するせん断型構造物モデルに対して、同定対象層の直上及び直下の層の水平変位（あるいは加速度）のみから、対象層の層剛性と層減衰係数が同定可能である。本論文では便宜上、同定関数を(1)式で定義する。 M_j は最上層から第 j 層までの質量の和を示す。同定関数の実部の $\omega \rightarrow 0$ における極限値を計算することで層剛性 k_j が同定される（(2)式参照）。同様に同定関数の虚部及び虚部の勾配から履歴減衰定数 β_j 及び粘性減衰係数 c_j が同定される。

$$f_j(\omega) = -\frac{\omega^2 M_j}{\{U_{j+1}(\omega)/U_j(\omega)\} - 1} \quad (1)$$

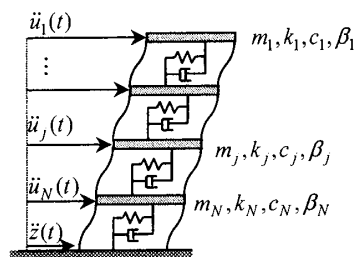


図 1 せん断型モデル

$$k_j = \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}\{f_j(\omega)\} \quad (2)$$

同定に際しては、(1)式の $U_{j+1}(\omega)/U_j(\omega)$ に観測データの離散フーリエ変換を代入する。これは有限個のパラメータでは表現されない周波数伝達関数であるため、文献 3)の手法を以降ではノンパラメトリック法と呼ぶことにする。それに対して、次節で提案する手法は、 $U_{j+1}(\omega)/U_j(\omega)$ に有限個の ARX パラメータ（ARX モデルを記述するパラメータ）で表現される伝達関数が代入されるパラメトリックな手法である。ノンパラメトリック法では、振動数0近傍で同定関数の値が乱れるため、近似関数を設定して極限値を評価する必要がある³⁾。この場合、建物層数やノイズレベルに応じた適切な近似関数の設定が問題となる。

3. ARX モデルを用いた剛性・減衰同定法

$G_{j,j+1}(\omega)$ を同定対象層の直下（第 $j+1$ 床：上層から番号付け）の応答に対する同定対象層の直上の応答の伝達関数として(3)式のように表すと、(1)式の同定関数は(4)式のように書き換えられる。

$$G_{j,j+1}(\omega) = \frac{U_j(\omega)}{U_{j+1}(\omega)}, f_j(\omega) = -\frac{\omega^2 M_j}{\{1/G_{j,j+1}(\omega)\} - 1} \quad (3, 4)$$

第 $j+1$ 床と第 j 床の応答をそれぞれ入力と出力とみなした ARX モデルを導入すれば、伝達関数 $G_{j,j+1}(\omega)$ は ARX パラメータ a_k, b_k ($k=1, \dots, n$)を用いて(5)式で表現できる。尚、出力と入力のパラメータ数 n_a と n_b はいずれも n とする。本提案手法ではノンパラメトリック法と同様に $\omega \rightarrow 0$ の極限を扱うため ARX パラメータで表現された伝達関数の $\omega=0$ 周りのテイラー展開を考える。

$$G_{j,j+1}(\omega) = \frac{b_1 e^{-i\omega T_0} + \dots + b_n e^{-in\omega T_0}}{1 + a_1 e^{-i\omega T_0} + \dots + a_n e^{-in\omega T_0}} \approx A_0 + A_1 \omega + A_2 \omega^2 + \dots \quad (5)$$

テイラー展開の j 次の係数 A_j は、(6)式のように ARX パラメータ a_k, b_k を用いて表現できる。順次係数を計算すると、 ω の偶数次の係数は実数となり、 ω の奇数次の係数は純虚数となる。従って係数 A_j を実部 A_j^R と虚部 A_j^I に分けると、(5)式は(7)式のように書き換えられる。

$$A_0 = \sum_{k=1}^n b_k / \left(1 + \sum_{k=1}^n a_k\right) \quad (6)$$

$$G_{j,j+1}(\omega) \approx (A_0^R + A_2^R \omega^2 + \dots) + i(A_1^I \omega + A_3^I \omega^3 + \dots) \quad (7)$$

せん断型モデルにおいて連続2層を入出力とした伝達関数は、次の(8)式を満たすことが理論的に証明できる。

(8)式は伝達関数実部が $\omega \rightarrow 0$ において1に収束することを表し、伝達関数のテイラー展開では(9)式に対応する。さらに(6)式を(9)式に代入してARXパラメーター間の関係式である(10)式が得られる。(10)式を制約条件としてARXパラメーターの推定を行うことが本提案手法の特徴の一つである。さらに伝達関数のテイラー展開である(7)式及び制約条件である(10)式を用いて(4)式を計算すると、その実部の極限值から、層剛性同定値が(11)式のように表現できる。

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}\{G_{j,j+1}(\omega)\} = 1, A_0^R = 1, \sum_{k=1}^n a_k + 1 = \sum_{k=1}^n b_k \quad (8, 9, 10)$$

$$k_j = \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}\{f_j(\omega)\} = M_j / A_2^R \quad (11)$$

ここで A_2^R はARXパラメーターを用いて表されるため、(11)式を用いれば物理パラメーター同定問題はARXパラメーターの推定問題に帰着される。すなわち本提案手法では、ノンパラメトリック法で困難であった近似関数の設定を回避した同定が可能となる。(10)式の制約条件はARXパラメーターについて線形である。

線形の制約条件は、ラグランジュの未定乗数法を適用して容易に一括最小二乗法⁵⁾に組み込むことができ、ARXパラメーター推定問題は線形連立方程式に帰着される。尚、同様の手順を同定関数の虚部の勾配に適用すれば粘性減衰係数をARXパラメーターで直接表現することができる。

4. 4層模型実験実測データへの適用

提案手法を、図2に示すような4層せん断型構造物模型の実測データに適用する。模型の剛性は予め別の手法により求めている。模型を振動台上に固定し、最大変位が5mmのバンドリミテッドホワイトノイズを入力として与えて模型床板上の加速度応答と振動台上の加速度応答を500Hzで約10s収録した。図3に、模型実験の計測データを用いてプロットしたノンパラメトリック法と本手法の同定関数実部を示す。本手法により低振動数領域におけるノイズの影響を低減できていることが分かる。さらに本手法を適用して同定関数実部の $\omega \rightarrow 0$ における極限值である剛性の同定値を求めると第1層で36.7(0.6%)、第2層で31.6(5.6%)、第3層で24.4(3.9%)、第4層で13.3(5.5%)となった(単位N/mm、括弧内の数値は誤差)。

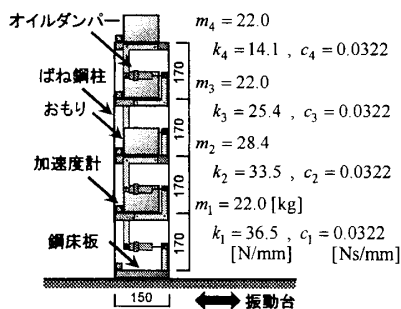


図2 4層せん断型構造物模型

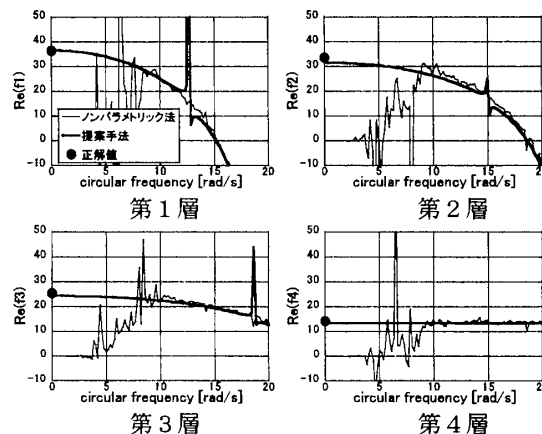


図3 ARXパラメーターで表現された同定関数実部

5. 結論

- (1) 全層の応答を同時に計測することなく、同定対象層の上下層における地震時応答観測結果のみから層の物理パラメーターを同定する問題に対して、既往の同定法³⁾の課題であった低振動数領域のノイズの影響を低減する手法を提案した。
- (2) ARXモデルを記述するパラメーターを用いて表現される伝達関数のテイラー展開により、建物の物理パラメーターをARXパラメーターで表現することを可能とした。
- (3) せん断型モデルの伝達関数の $\omega \rightarrow 0$ における極限值が満たすべき条件を導き、その関係式をARXパラメーターの制約条件としてパラメーター推定問題に組み込んだ。
- (4) 模型実験の実測データを用いた検証により、提案手法の精度を明らかにした。本手法は実測データに含まれるノイズによる同定精度の低下を抑制することが可能であり、実用性の高い手法といえる。

本手法では、剛性と粘性減衰を同定することが可能である。本論文では示していないが、剛性の同定精度に比べて減衰の同定精度は安定していない。履歴減衰を考慮した同定手法については今後の課題としたい。

参考文献

- 1) G.Housner, et al. Special issue; Structural control: past, present, and future. *J. Engng. Mech.*, ASCE; 123(9), pp.897-971, 1997.9.
- 2) Proc. of the Fifth World Conference on Structural Control and Monitoring (5WCSCM), Tokyo, 2010.7.
- 3) 中村 充, 竹脇 出, 安井 譲, 上谷宏二: 限定された地震観測記録を用いた建築物の剛性と減衰の同時同定, 日本建築学会構造系論文集, No.528, pp.75-82, 2000.2.
- 4) I.Takewaki and M.Nakamura: Stiffness-damping simultaneous identification under limited observation, *J. Engng. Mech.*, ASCE; 131(10), pp.1027-1035, 2005.10.
- 5) 足立修一: システム同定の基礎, 東京電機大学出版局, 2009.9.

* 京都大学大学院工学研究科都市環境工学専攻

** 京都大学大学院工学研究科建築学専攻

* Dept. of Urban and Environmental Eng., Kyoto Univ.

** Dept. of Architecture and Architectural Eng., Kyoto Univ.