

くりこみ理論 I*

アルバータ大 高橋 康

必要な background

- (1) 場の量子論についての簡単な知識
- (2) Feynman diagram についての簡単な知識

- § 1. Introduction
- § 2. Dyson's equation
- § 3. Power counting
- § 4. Dimensional analysis
- § 5. Internal consistency of renormalization theory
- § 6. Various representation of Green's function
- § 7. High energy behaviour
- § 8. Renormalization group I (Gell-mann-Low)
- § 9. Renormalization group II (Di Castro)
- § 10. scale transformation and Ward relation
- § 11. Callan-Symanzik equation

*) この講義ノートの別刷希望の方は、東大物性研中嶋研究室に申し込んで下さい。

§ 1. Introduction

くりこみ (renormalization) という言葉が、何を意味するかは、だんだんと明らかになるはずであるが、単に「Lagrangian に現われる mass (bare mass) が、相互作用の結果補正をうけて、その全体が observed mass になる」という意味だとすると、このような idea は可成り古くからちよいちよい現われている。

例えば, Pauli, Fierz ; Nuovo Cimento 15 1 (1938)

Dirac :

新しいところでは, Lamb-Retherfordによる水素原子の level shift の計算をやった Bethe の paper にはこの考えが使われている。

Bethe ; Phys. Rev. 72 339 (1947)

其後、電子の弾性散乱の計算が Tomonaga, Koba et al によってなされたが、ここではじめて、Q.E.D. (quantum electrodynamics) の発散が、mass と charge のくりこみにまとめられる事が指摘された。但し、これは perturbation の2次での話である。原論文は

Ito, Koba, Tomonaga ; Prog. Theoret Phys. 2, 216 (1947)

これには、Tomonaga による解かり易い解説がある。

Tomonaga ; 科学 19 2 (1950)

Ito : 自然 24 72 (1969)

Schwinger と Tomonaga とは独立に、超多時間形式を基礎にして、相対論的な場の理論に於けるくりこみ理論を定式化した。

Schwinger ; Phys. Rev. 74 1439 (1948) 75 651 (1949)

76 790 (1949)

又同時に, Feynman, Dyson による議論も現われた。

Feynman, Phys. Rev. 76 749 (1949)

Dyson ; Phys. Rev. 75 486, 1736 (1949)

Dyson の第二論文では、Q.E.D. に於いて、くりこみの idea が perturbation のすべての order でうまくゆく事が明らかにされたが、その証明は、荒けずりで、後に Ward や Salam が、証明を完成したといってよからう。

これで、Q.E.D. に於けるくりこみ理論は完成したわけであるが、他の素粒子の

相互作用, 例えば meson や nucleon の相互作用についても, 同様の idea で事がうまく運ぶか(即ち, すべての発散が, mass や coupling constant におしこめられるか)という問題がすぐ起る。この問題は, いろいろな人が研究したが, 名古屋大学のグループ及び Stückelberg は, どんな相互作用ではくりこめて, どんな相互作用はくりこめないかという一般論を展開した。

Sakata, Umezawa, Kamefuchi ; Prog. Theoret. Phys

7 377 (1952)

この paper によると, 相互作用は, そのくりこみ可能性に従い, 三つの groups にわけられる。即ち, super renormalizable interactions, renormalizable interactions, unrenormalizable interactions となる。その意味はあとで説明する。

以上の議論は, perturbation の展開の各 order で renormalize する事を考えたわけだが, perturbation の各 order でくりこみをやり, 発散がとりのぞかれたとしても, perturbation series の全体が converge するか否かが問題になる。この問題は未だに結論が出ていない。Q.E.D. では, perturbation series は asymptotic series と信じられている。

本文で説明する様に, renormalization theory には, いろいろと発散する constants が出て来る。それらの constants を, あたかも有限の constants の如く扱いそれらで割ったりかけたりするところには, 数学的には勿論問題があるが, 勿論これは正しい理論が発見されるまでの応急処置であると考ええる。その様な operation を数学的厳密にやろうと頭をなやます事は, あまり意義があるとは思えない。

この様な数学的な問題の他に, renormalization theory にはいろいろと物理的な問題がある。例えば, 出て来る renormalization constants の定義を, perturbation の展開によらずにやる事が出来ないか? renormalization constants の発散は, perturbation 展開したがためにおこるのかもしれない。若し, perturbation 展開によらずに renormalization constants を計算したら, 案外 converge するかもしれない。この様な approach は, Umezawa, Kamefuchi, Gell-mann, Low, Källén, Lehmann の papers に見られる。これらの研究が, Green 関数に対する, いわゆる spectral representation 及び renormalization group の考へと発展し

た。

Umezawa, Kamefuchi ; Prog. Theoret. Phys. 6 543 (1951)

Källén ; Helv. Phys. Acta, 25 417 (1952)

Gell-mann, Low ; Phys. Rev. 95 1300 (1954)

Lehmann ; Nuovo Cim. 11 342 (1954)

以上のHeisenlrrerg operators によるくりこみ理論も、実際にくりこみ常数を計算するには perturbation expansion による以外手がない。Källén は上の paper で、Q.E.D. にでてくる renormalization constants の少なくとも一つは、発散しているという事を perturbation expansion を用いずに証明した。Gell-mann-Low は、renormalization group の technique を用いて、Q.E.D. に於ける high energy behaviour を調べている。Lehmann は相互作用をしている場の Green 関数の singularity は free な場の Green 関数のそれより低くなる事はないという事を、近似や model によらずに示した。何れにしても、場の理論に於ける発散が、perturbation によるもので、近似方法を改良すれば、すべて finite results が得られるかもしれないという optimism には都合の悪い結果ばかりである。

くりこみ理論にまつわるもう一つの問題は、次の様なものである。即ち、くりこみ理論では、ある物理量、例えば、bare coupling constant に補正を加えたものを observed coupling constant と identify する。言いかえると、renormalized coupling constant は、bane coupling constant の関数として得られる事になる。実際計算では、積分が発散するので、cut-off を導入する。従って renormalized coupling constant は、bare coupling constant と、cut-off momentum λ , say, (と mass etc) の関数となる。ところで、この関数関係で、 λ を fix し、bare coupling constant をすべての実数の間を変化させると、renormalized coupling constant もそれに応じて、ある実数の範囲を変化するであろう。この、renormalized coupling constant の変化しうる範囲が限られていて、observed coupling constant の値が、その範囲の外にあると、bare coupling constant を実数とする限り、observed coupling constant = renormalized coupling constant とおけない事になる。無理にこの identification をやると、bare coupling constant が real でない事になり、我々の理論の出発点にとった Hamiltonian の

hermiticity がこわれるであろう。renormalized coupling constant のとりうる範囲は、勿論 cut off momentum λ に依存する。従って λ を適当にとって、上の identification が可能になる様にしておかないと、くりこみ理論は用いられない。

T.D.Lee は、この事情を簡単な model で調べた。

この model では、近似によらずに renormalized coupling constant が計算できるが、そのとき、 $\lambda \rightarrow \infty$ で、renormalized coupling constant の変化しうる範囲は 0 となる。従って、くりこみ理論は、cut-off と併用しないと consistent ではないかもしれない。

T.D.Lee ; Phys. Rev. 95 1329 (1954)

Renormalization theory は、relativistic field theory に於いて展開されたが、それは、relativistic な変換性によって、物理量を identify する事が容易だからである。non-relativistic な領域では、例えば、何を mass とよぶかという様な事がわかりにくくなる。Non-relativistic な領域でのくりこみは、phonon の速度をくりこんで、Lattice の stability を回復するという考えが提出された事がある。

Nakajima, Proceedings of the International Conference on
Theoretical Physics, Kyoto and Tokyo, September, 1953
(Science Council of Japan, Tokyo. 1954)

又、Chew et al は、fixed source meson theory の取扱いに関連し、non-relativistic なくりこみ理論を考えた。原論文よりも、Wick による review がわかり易い。

Wick ; Rev. Mod. Phys. 27 339 (1955)

この note は、くりこみ理論の essence のみを説明するにとどめ、technical detail については、原論文、又は、古いところは、

梅沢；素粒子論（みすず）(1953)

を参照されたい。新しいところの解説は、今のところ見当らない。

予備知識としては、場の理論の簡単な議論及び、Feynman diagram に関する elementary な知識があれば、充分である筈である。

§ 2. Dyson's equation

Dyson equation は、はじめ、Q.E.D. について導かれたが、Q.E.D. には photon の polarization による不必要な複雑さが入って来るし、gauge 不変性による特殊事情があるので、それらを避けるため、Dirac 粒子 (4-spinor) が scalar 粒子と Yukawa coupling をしている model をとろう。以下、 $\hbar = c = 1$ とする。又、空間座標を x_i ($i=1, 2, 3$)、時間座標を $t = x_0 = -ix_4$ とする。空間と時間を一緒にして x_μ ($\mu=1, 2, 3, 4$) と書く。summation convention を用いて、scalar product をあらわす。即ち

$$A \cdot B = A_\mu B_\mu = \underline{A} \cdot \underline{B} - A_0 B_0$$

$$x^2 = x_\mu x_\mu = \underline{x} \cdot \underline{x} - x_0^2$$

$$p \cdot x = p_\mu x_\mu = \underline{p} \cdot \underline{x} - p_0 x_0 \quad \text{etc.}$$

この system の Lagrangian は、

$$\begin{aligned} L(x) = & - \bar{\psi}(x) (\gamma \partial + m_0) \psi(x) \\ & - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \mu_0^2 \phi^2) \\ & + f_0 \bar{\psi}(x) \psi(x) \phi(x) \end{aligned} \quad (2.1)$$

但し、

$$\gamma \partial = \gamma_\lambda \partial_\lambda$$

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x) \gamma_4 \quad (\text{Pauli conjugate}) \quad (2.2)$$

である。spinor index は略してある。

ここにあらわれる場の量 $\psi(x)$ や $\phi(x)$ は、量子化されており、Commutation relation (C.R.)

$$\{ \psi_{\alpha}(x), \bar{\psi}_{\beta}(x') \} \delta(x_0 - x'_0) = (r_4)_{\alpha\beta} \delta^{(4)}(x - x') \quad (2.3)$$

$$[\dot{\phi}(x), \phi(x')] \delta(x_0 - x'_0) = -i \delta^{(4)}(x - x') \quad (2.4)$$

を満す。Lagrangian (2.1) に変分原理を要求すると Euler-Lagrange equation は、

$$(r\partial + m) \psi(x) = f_0 \psi(x) \phi(x) + \delta m \psi(x) \equiv \eta(x) \quad (2.5)$$

$$\bar{\psi}(x) (-r\partial + m) = f_0 \bar{\psi}(x) \phi(x) + \delta m \bar{\psi}(x) \equiv \bar{\eta}(x) \quad (2.6)$$

$$(\square - \mu^2) \phi(x) = -f_0 \bar{\psi}(x) \psi(x) - \delta \mu^2 \phi(x) \equiv J(x) \quad (2.7)$$

但し

$$\begin{aligned} m &= m_0 + \delta m, \\ \mu^2 &= \mu_0^2 + \delta \mu^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

この系の vacuum を $|0\rangle$ であらわす。Total energy と momentum は $|0\rangle$ について zero eigen value をもつ。zeropoint energy が出ない様に total energy を定義しておかないと、energy-momentum が 4 元ベクトルにならず、相対論的に困る事になる。

Dyson 方程式は、

$$\langle 0 | T(\psi_{\alpha}(x), \bar{\psi}_{\beta}(x')) | 0 \rangle = -i S'_{F\alpha\beta}(x - x') \quad (2.9)$$

$$\langle 0 | T(\phi(x), \phi(x')) | 0 \rangle = i \Delta'_F(x - x') \quad (2.10)$$

及び

$$\begin{aligned} &\langle 0 | T(\psi(x), \bar{\psi}(y), \phi(z)) | 0 \rangle \\ &= f_0 \int d^4x' d^4y' d^4z' S'_F(x - x') \Gamma(x' - z'; z' - y') \end{aligned}$$

$$\times S_F'(y'-y) \Delta_F'(z'-z) \quad (2.11)$$

によって定義される関数 S_F' , Δ_F' と Γ の間に成立つ方程式である。Feynman diagram 又は、運動方程式と C.R. を用いて導く事が出来る。

$$\Delta_F'(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ik(x-x')} \Delta_F'(k^2) \quad (2.12)$$

$$S_F'(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{ip(x-x')} S_F'(p) \quad (2.13)$$

$$\Gamma(x-z; z-y) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4p d^4q e^{ip(x-z)} e^{iq(z-y)} \Gamma(p, q) \quad (2.14)$$

とすると,

$$\Delta_F'(k^2) = \Delta_F(k^2) + \Delta_F(k^2) \pi^*(k^2) \Delta_F'(k^2) \quad (2.15)$$

$$S_F'(p) = S_F(p) + S_F(p) \Sigma^*(ip) S_F'(p) \quad (2.16)$$

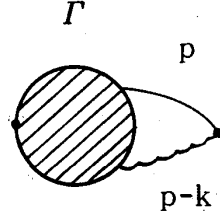
但し

$$\Delta_F(k^2) = -\frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \quad (2.17)$$

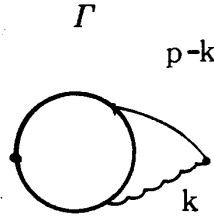
$$S_F(p) = \frac{1}{ip + m - i\epsilon} = -\frac{(ip - m)}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \quad (2.18)$$

又, π^* と Σ^* とは, boson と fermion の proper self-energy (一つの内線を切る事によって二つにわかれな self-energy) であり,

$$\pi^*(k^2) = -\delta\mu^2 + i \frac{f_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \text{Tr}[S_F'(p) \Gamma(p; p-k) S_F'(p-k)] \quad (2.19)$$



$$\Sigma^*(i\tau p) = + \delta m - i \frac{f_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k S_F'(p-k) \Gamma(p-k, p) \Delta_F'(k^2) \quad (2.20)$$



であたえられる。(2.15)と(2.16)とは

$$\Delta_F'(k^2) = - \frac{1}{k^2 + \mu^2 + \pi^*(k^2)} \quad (2.21)$$

$$S_F'(p) = \frac{1}{i\tau p + m - \Sigma^*(i\tau p)} \quad (2.22)$$

とも書かれる。

さて $\pi^*(k^2)$ を、例えば perturbation で計算してみると、発散する。

$$\begin{aligned} \pi^*(k^2) &= -\delta\mu^2 + i \frac{f_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4 p \text{Tr} \left[\frac{i\tau p - m}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \frac{i\tau(p-k) - m}{(p-k)^2 + m^2 - i\epsilon} \right] \\ &= -\delta\mu^2 + 4i \frac{f_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{-p(p-k) + m^2}{(p^2 + m^2)((p-k)^2 + m^2)} \quad (2.23) \end{aligned}$$

Power Counting をやってみると、第二項の積分は、cut-off momentum を Λ として、 Λ^2 の order である。

今、右辺第二項を $p^2 + \mu^2$ で Taylor 展開すると、

$$\pi^*(k^2) = -\delta \mu^2 + A + B(k^2 + \mu^2) + (k^2 + \mu^2) S(k^2) \quad (2.24)$$

となる。A は Λ^2 の発散, B は $\log$ の発散 (power counting では Λ の発散だが, 4次元積分の対称性から $\log \Lambda$ におちる) 又, $S(k^2)$ は finite で, $k^2 + \mu^2 = 0$ で 0 になる。

従って, 今,

$$\delta \mu^2 = A \quad (2.25)$$

ときめると

$$\begin{aligned} \Delta_F'^{-1}(k^2) &= -[k^2 + \mu^2 + [B + S(k^2)](k^2 + \mu^2)] \\ &= -(k^2 + \mu^2)(1 + B + S(k^2)) \end{aligned} \quad (2.26)$$

となり, $\Delta_F'^{-1}(k^2)$ は, $k^2 + \mu^2 = 0$ で

$$\Delta_F'^{-1}(k^2) \sim (1 + B)(k^2 + \mu^2) \quad (2.27)$$

の如く振舞う。即ち, μ^2 を (mass)² としてもつ free な Green 関数と, normalization $1 + B$ だけちがっている。

$$z_3^{-1} = 1 + B = 1 + \left. \frac{\partial \pi^*(k^2)}{\partial k^2} \right|_{k^2 + \mu^2 = 0}$$

なる量を wave function renormalization constant (の逆数) という。これは, perturbation の 2 次までで正しい。(2.24) は言うまでもなく, boson の mass renormalization である。

S_F' に対しても全く同様の argument が成立し

$$\Sigma^*(-m) = 0 \quad \text{mass renormalization}$$

$$z_2^{-1} = 1 - \left. \frac{\partial \Sigma^*(irp)}{\partial irp} \right|_{irp+m} \quad \begin{array}{l} \text{wave function} \\ \text{renormalization} \end{array}$$

となる。perturbation の2次までで、

$$\Delta_F'(k^2) = z_3 \Delta_{FC}(k^2)$$

$$S_F'(p) = z_2 S_{FC}(p)$$

とおいた時、 Δ_{FC} と S_{FC} とはもはや発散をふくまない。

ここでついでだから、積分(2.23)から、発散 A, B を分離する方法を具体的に説明しよう。(2.23)の右辺の k を、 $\ell^2 + \mu^2 = 0$ なる momentum ℓ で Taylor 展開する。即ち

$$\begin{aligned} \pi^*(k^2) = & -\delta \mu^2 + 4i \frac{f_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{-p^2 + m^2}{(p^2 + m^2)(p^2 + m^2)} \\ & + (k-\ell)_\mu 4i \frac{f_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{-p(p-k) + m^2}{(p^2 + m^2)((p-k)^2 + m^2)} \right]_{k=\ell} \\ & + \frac{1}{2!} (k-\ell)_\mu (k-\ell)_\nu 4i \frac{f_0^2}{(2\pi)^4} \\ & \times \int d^4p \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left[\frac{-p(p-k) + m^2}{(p^2 + m^2)((p-k)^2 + m^2)} \right] \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2.28)$$

Power countingをやってみると、第二項は Λ^2 の発散、第三項は Λ の発散、第四項は $\log \Lambda$ の発散と、順次発散の次数が下っている。この様な方法で有限の積分を分離する事が出来る。但し、上の例では Feynman の方法で積分を整理すると、第三項は対称性によって落ちてしまう。第四項は、 $k^2 + \mu^2$ に比例する様にかきかえられ、結局(2.24)をうるのである。^{*1)}

Dyson は、前述の paper で、Q.E.D. の S-matrix の中にでてくる発散が、constants z_1, z_2, z_3 と mass 及び charge の形にまとめられる事を、perturba-

tion のすべての order で証明した。ここでは、その証明ははぶき、話のみちすぢのみを示す。

Dyson の証明の要点は次の如くである。先づ、ある 4 つの constants z_1, z_2, z_3 及び α を用いて、

$$\Gamma(p, q; f_0) = z_1^{-1} \Gamma_c(p, q; f) \quad (2.29)$$

$$S_F'(p; f_0) = z_2 S_{Fc}(p; f) \quad (2.30)$$

$$\Delta_F'(k^2; f_0) = z_3 \Delta_{Fc}(k^2; f) \quad (2.31)$$

$$f_0 = \alpha^{-1} f$$

と書けたとする。^{*2)} そして、それら 4 つの constants の中に、すべての発散がおしこめられ、右辺の c のついた関数が convergent な様にきめられるか否かを調べる。

今、(2.29) - (2.32) を (2.21) 及び (2.19) に代入すると、

$$\Delta_{Fc}(k^2; f) = - \frac{1}{z_3 (k^2 + \mu^2 + \pi^*(k^2))} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \pi^*(k^2) = & - \partial \mu^2 + i \frac{f_0^2}{(2\pi)^4} z_2^2 z_1^{-1} \int d^4 p \operatorname{Tr} [S_{Fc}(p; f) \\ & \times \Gamma_c(p, q; f) S_{Fc}(p-k; f)] \end{aligned} \quad (2.34)$$

さて、Salam によると、

*1) 上の例では、 $\ell^2 + \mu^2 = 0$ なる vector ℓ のまわりで、Taylor 展開して、発散が一つづつ下る事を見たが、これは便宜的な事で、 $\ell^2 + \mu^2 = 0$ ととる必要は必ずしもない。任意の定まった vector ℓ_μ のまわりで展開しても、発散は一つづつ下る。物理的な要求から、便利な ℓ_μ をとればよい。

*2) mass dependence は explicit に書かない。

$$\frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p T_r [S_{Fc}(p; f) \Gamma_c(p, q; f) S_{Fc}(p-k; f)]$$

$$= z_1^{-1} [A + B(k^2 + \mu^2) + \dots] \quad (2.35)$$

が, perturbation の各 order で証明される。但し, …… は有限の term である。ここで右辺に z_1^{-1} factor が出るのは, いわゆる b-divergence によるもので, これには Salam の詳しい研究がある。

Salam, Phys. Rev. 82 216 (1951)

(2.35) を (2.34) に代入し, それを (2.33) に用いると,

$$\Delta_{Fc}(k^2, f) = - \frac{1}{z_3 [k^2 + \mu^2 - \delta \mu^2 + z_1^{-2} z_2^2 f^2 (A + B(k^2 + \mu^2) + \dots)]} \quad (2.36)$$

をうる。従って

$$\delta \mu^2 = z_3^{-1} f^2 A \quad (2.37)$$

$$z_3 = 1 - f^2 B \quad (2.38)$$

$$\alpha = z_1^{-1} z_2 z_3^{1/2} \quad (2.39)$$

ときめると,

$$\Delta_{Fc}(k^2; f) = - \frac{1}{k^2 + \mu^2 + \dots} \quad (2.40)$$

となり, すべての発散が, μ と z_1, z_2, z_3 に吸収される事になる。 S_{Fc} 及び Γ_c についても全く同様に話をすすめる事が出来る。

話をまとめると次の様になる。

$\Delta_F'(k^2, f_0) (S_F'(p; f), \Gamma(p, q; f))$ を perturbation で計算すると, いたるところに発散積分があらわれる。しかし, それらの発散積分から, (2.28) の方法によって, 順次, 有限項を分離してゆくと, 発散はすべて μ 及び f と $z_1 z_2 z_3$ の中におしこめる事が出来, 結局 (2.29) - (2.32) の形をまとめる事が出来る。ここで c

のついた量は、 μ や f の関数とみたとき、発散をふくまない。 z_1, z_2, z_3 は (2.37) - (2.38) 及び S_{Fc} に対する同様な関係によって定められる。尚、(2.37) - (2.38) は、夫々

$$\pi^*(-\mu^2) = 0 \quad (2.41)$$

$$z_3^{-1} = 1 + \frac{\partial \pi^*(k^2)}{\partial k^2} \Big|_{k^2 + \mu^2} \quad (2.42)$$

と書ける事を注意しておく。ここでは、renormalizationの詳しい証明は略したので、興味及びファイトのある方は、Dyson 及び Salam の原論文を参照されたい。

Q.E.D. では、gauge 不変性のために $z_1 = z_2$ という関係が成立つ (Ward identity)。従って

$$e^2 = (z_1^{-2} z_2^2 z_3) e_0^2 = z_3 e_0^2. \quad (2.43)$$

即ち、charge は、photon の wave function renormalization constant z_3 のみによる。あとで証明する様に

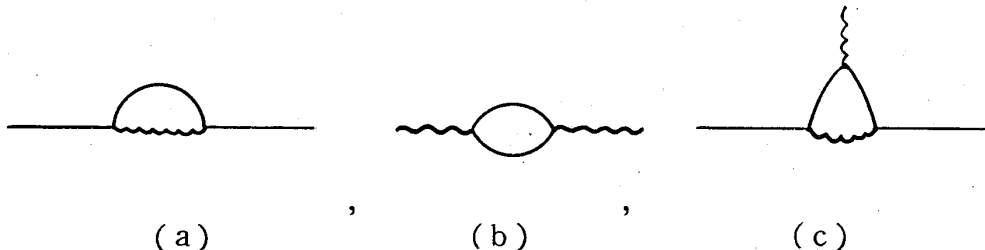
$$0 \leq z_3 \leq 1 \quad (2.44)$$

だから

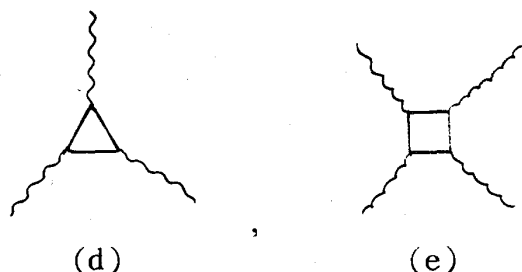
$$e^2 \leq e_0^2 \quad (2.45)$$

即ち、renormalized charge は、unrenormalized charge より、常に小さい。

最後に一つ注意。上に扱った model では、実はすべての発散が



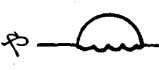
に形のみにとまらず、



等も発散する。簡単のため、これらを neglect したが、これらの発散をのぞくには、Lagrangian の中に、 $f_3 \phi^3 + f_4 \phi^4$ なる term をはじめてから入れておき、 f_3 や f_4 の中に発散をおしこめればよい。しかし、これには、問題があるかもしれない。何故なら、ここに導入した相互作用 f_3 や f_4 の term が、あらたに新しい形の発散を生じ、又、それらをくりこむ相互作用を導入しなければならないかもしれない。そして、この悪循環が無限につづくかもしれないからである。この様な事は、この model では、幸におこらなかったが、一般にはおこりうる事である。この点は、あとで調べる。Q.E.D. では、(d) は、Furry の theorem でゼロになり、(e) は gauge 不変性で Finite になる。

註： Furry の theorem というのは、Q.E.D. で、odd number の electron の closed loop の contribution は 0 になるというものである。これは理論が $e \rightarrow -e$ に対して不変である事から証明される。

§ 3. Power Counting

以上、Dyson のくりこみ理論の基礎になっているのは、power counting により、発散の order 又は発散する diagram の種類を知り、それを external な momentum について Taylor 展開し、有限部分を分離する事である。この様にして、先づ簡単な図形から順次に発散をとりのぞいてゆく事がミソである。従って、無限個の種類の diagram が発散すると、無限個の subtraction が必要になる。上の例では  や  や  のみが発散し、それより複雑な diagram には、常に上の三つの発散にもとづく発散以外はふくまれていない事が重要であった。

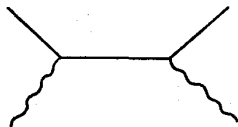
くりこみ理論を一般的に議論する場合、いくつ基本的な発散が出て来るかを先づ知る事が重要である。この事を調べるために、primitive divergence という概念を導入

する。

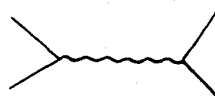
S-matrix の一つの matrix element は、内線に夫々適当な momentum variable を assign し、それらについての 4 次元積分であらわされる。それらの積分で、任意の一つの積分変数を固定して残りの積分変数について積分を行った場合は収斂するが、最初に固定した積分変数について更に積分すると発散する様な図形を primitive divergent な diagram とよぶ。言いかえると、primitive divergent diagram では、任意の一つの内線を切って、外線と見做すと、その図形は convergent になる様なものである。例えば、



は、発散するが、内線の一つを切ったもの



及び



は convergent なので  は primitive divergent な graph である。

Dirac と scalar 場の系で、primitive divergent な diagram がいくつあるかを見出すために、 n 個の vertex からなる graph を考えて見る。

各 vertex からは、二本の fermion lines

一本の boson line が出ている。

そのうち、 E_F 本は fermion の external lines

E_B 本は boson の " " とする。

すると fermion internal lines の数 $I_F = \frac{2n - E_F}{2}$

boson " $I_B = \frac{n - E_B}{2}$

さて、S-matrix の中で fermion line は $\frac{1}{p}$

boson line は $\frac{1}{k^2}$

なる high energy behaviour をする。

積分変数の数は、 $d^4 k_1 \cdots d^4 k_{I_B} d^4 p_1 \cdots d^4 p_{I_F}$ だが、各 vertex で energy - momentum が conserve するので 4 次元 δ -関数が n 個出て来る。但し、そのうち一つだけは S-matrix 全体の energy-momentum conservation をあらわすので除外すると、結局、独立な積分変数の数は、

$$4(I_B + I_F - n + 1)$$

となる。分母は、high energy で、 $(k \text{ or } p)^{I_F + 2 I_B}$ の振舞をするから、S-matrix element は、

$$4(I_B + I_F - n + 1) - (I_F + 2 I_B) \geq 0 \quad (3.1)$$

など発散する。これを external line の数で書くと、

$$4 - \frac{3}{2} E_F - E_B \geq 0 \quad (3.2)$$

となる。これが primitive divergence の必要条件である。

式(3.2)からわかる様に、primitive divergent な graph は、次の場に限られる

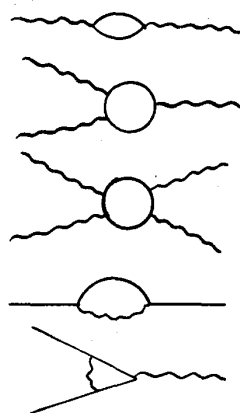
$$(a) \quad E_F = 0, \quad E_B = 2$$

$$(b) \quad E_F = 0, \quad E_B = 3$$

$$(c) \quad E_F = 0, \quad E_B = 4$$

$$(d) \quad E_F = 2, \quad E_B = 0$$

$$(e) \quad E_F = 2, \quad E_B = 1$$



これらの図形のどれをとっても、内線を一本きると収斂し、切らないと発散している。

例えば、 では、

$$I_F = 2, \quad I_B = 0 \quad \text{だから}$$

$$4(I_B + I_F - n + 1) - (I_F + 2I_B) = 2 > 0 \quad (\text{発散})$$

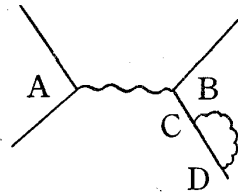
しかし、一本の fermion line をきると

$$I_F = 1, \quad I_B = 0$$

$$\therefore 4(I_B + I_F - n + 1) - (I_F + 2I_B) = -1 < 0 \quad (\text{収斂})$$

である。

例えば、



なる diagram では、任意の internal line 例えば boson line A B を切っても、発散しているから、primitive divergent とはよばない。External line の数がふえてくると、この様な事がおこる。その様な図形では、発散は常に primitive divergent 図形を部分的に含んでいる事からおこっている。従って、発散をくりこんで行く場合、primitive divergence を処理すればよい事になる。上の例では、CD から出る発散をくりこんでやると、全体は finite になる。

上の、primitive divergence の条件は、 $f_0 \bar{\psi} \psi \phi$ という簡単な相互作用について成立つが、相互作用が微分を含んでいたり、場自身の Green 関数が分子に変数をもっていると、primitive divergence の数は、ずっとふえて来る。例えば、例として

$$i f_0 \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi \partial_\mu \phi \quad (3.3)$$

なる相互作用を考える。前の notation で、

$$\text{分子の変数の数は, } 4(I_F + I_B - n + 1) + 2I_B$$

$$\text{分母は } p^{I_F} \times (k^2)^{I_B}$$

従って、divergence の条件は、

$$4(I_F + I_B - n + 1) + 2 I_B - (I_F + 2 I_B) \geq 0$$

即ち,

$$4 - \frac{3}{2} E_F - 2 E_B + n \geq 0 \quad (3.4)$$

となるから、 n が増えてくると、いくらでも新しい divergence が出て来る。例えば微分のかかっていない前の例では、 は (3.2) をみたさないが、今度の場合の (3.3) では、(3.4) をみたす。即ち、この diagram は発散している。これをくりこむためには、 $f \bar{\psi} \psi \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi$ という相互作用を入れておき、 f の中にくりこめばよいが、これが更に新しい divergence をもちこみ、更に新しい相互作用を入れてくりこむと、それが更に又新しい発散をもちこみ、悪循環がつづく事になる。このような悪循環がおこると、renormalization は有限回の operation で完成しない事になる。このような無限の悪循環のおこらない相互作用を renormalizable, 悪循環のおこるものを unrenormalizable な相互作用とよぶ。

どのような相互作用は、renormalizable であるかという問題は、Sakata, Umezawa, Kamefuchi により詳しく調べられた。

Sakata, Umezawa, Kamefuchi, Prog. Theoret. Phys.
7 377 (1952)

簡単にいうと彼らの判定条件は、次の様なものである。今、相互作用 Hamiltonian として、

$$\mathcal{H} = g \prod_{\alpha} \partial^{a^{(\alpha)}} \phi^{(\alpha)}(x) \quad (3.4)$$

をとろう。即ち、場 $\phi^{(\alpha)}$ には、微分が $a^{(\alpha)}$ 回かかっているとする。 α -場の spin を $s^{(\alpha)}$ とすると、 $\text{mass} \neq 0$ のとき、

$$\langle T(\phi^{(\alpha)} \phi^{(\alpha)}) \rangle \sim \partial^{2s^{(\alpha)}} \Delta_F$$

である。即ち、 $\phi^{(\alpha)}$ の内線には、factor $k^{2s^{(\alpha)}} / k^2$ があらわれる。前と同様 power

counting をやり, primitive divergence の数が有限個しかないという条件を書くと,

$$\eta \equiv \sum_{\alpha} (a^{(\alpha)} + s^{(\alpha)} + 1) \lambda^{(\alpha)} - 4 \leq 0 \quad (3.5)$$

となる。即ち (3.5) が成立つ場合には, くりこみが可能である。ここで, $\lambda^{(\alpha)}$ は, α -場 $\phi^{(\alpha)}$ の数である。又, 関与する場が, mass をもたないと,

$$s^{(\alpha)} = \begin{cases} 0 & \text{for integer spin} \\ \frac{1}{2} & \text{for half-integer spin} \end{cases}$$

としなければならない。(3.5) の証明はここではないが, 次の章で次元解析をすると, その意味が明らかになる。

$\eta > 0$ なる理論を unrenormalizable,
 $\eta \leq 0$ なる理論を renormalizable, 特に
 $\eta < 0$ なる場合を super-renormalizable という。

(3.5) 式を用いて, 次の場合を判定してみよう。

$$(1) \text{ Q.E.D. } \mathcal{L} = i \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi A_{\mu}$$

$$A_{\mu} \text{ は massless だから } s^{(\alpha)} = 0,$$

$$\lambda^{(\alpha)} = 1,$$

$$a^{(\alpha)} = 0,$$

$$\psi \text{ は } s^{(\alpha)} = \frac{1}{2}$$

$$\lambda^{(\alpha)} = 2$$

$$a^{(\alpha)} = 0$$

$$\therefore \eta = 1 + \frac{3}{2} \cdot 2 - 4 = 0 \quad (\text{くりこみ可能})$$

(2) Q.E.D. with Pauli-term

$$\mathcal{L} = i \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi F_{\mu\nu}$$

$$A_\mu \text{ については} \quad s = 0$$

$$\lambda = 1$$

$$a = 1$$

$$\psi \text{ については} \quad s = \frac{1}{2}$$

$$\lambda = 2$$

$$a = 0$$

従って

$$\eta = 2 + \frac{3}{2} \cdot 2 - 4 = 1 \quad (\text{くりこみ不可能})$$

$$(3) \quad \mathcal{L} = f_0 \phi^4$$

$$s = 0$$

$$\lambda = 4$$

$$a = 0$$

$$\therefore \eta = 4 - 4 = 0 \quad (\text{くりこみ可能})$$

$$(4) \quad \mathcal{L} = f_0 \phi^3$$

$$s = 0$$

$$\lambda = 3$$

$$a = 0$$

$$\eta = 3 - 4 = -1 \quad (\text{くりこみ可能})$$

$$(5) \quad \mathcal{L} = f (\bar{\psi} \psi)^2$$

$$s = \frac{1}{2}$$

$$\lambda = 4$$

$$a = 0$$

$$\therefore \eta = \frac{3}{2} \cdot 4 - 4 = 2 \quad (\text{くりこみ不可能})$$

となる。

上の判定条件は、くりこみ可能な相互作用を見出すのに役立つが、この条件をみたさないからといって、くりこみ不可能とは断言出来ない事に注意する必要がある。例として、

$$\mathcal{L} = f i \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi U_{\mu}$$

をとろう。ここで U_{μ} は massive vector であり、Green 関数は

$$\langle T(U_{\mu}(x), U_{\nu}(x')) \rangle_0 = i \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{1}{\mu^2} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \right) \Delta_F(x-x')$$

である。Power Counting による判定条件は、

$$U_{\mu} \text{ につき} \quad s = 1$$

$$a = 0$$

$$\lambda = 1$$

$$\psi \text{ につき} \quad s = \frac{1}{2}$$

$$a = 0$$

$$\lambda = 2$$

$$\therefore \eta = 2 + \frac{3}{2} \cdot 2 = 5$$

となるから、くりこみ出来ない相互作用という事になるが、実は U_{μ} の Green 関数にある $\partial_{\mu} \partial_{\nu}$ - term は、常に、conserved current $\bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi$ と一緒に出て来る。部分積分で Q_{μ} を $\bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi$ にかけて 0 になるので、essential には、微分 ∂_{μ} は S-matrix の power counting に contribute しない。言いかえると conserved current があると、 U_{μ} の Green 関数は、effective には、微分のないものとなり、くりこみ可能となる。一般に、何らかの symmetry などのために、power counting

を naive に行ったものよりも primitive divergence の数はへる事があるので、判定条件 (3.5) が満されていない時には、更に細く事情を検討し直さないと、unrenormalizable interaction であるという主張が出来ない事になる。

§ 4. Dimensional Analysis

上にのべた判定条件 (3.5) は、実は簡単な物理的意味をもっている。それを見るために、相互作用

$$\mathcal{H} = g \prod_{\alpha} \partial^{a^{(\alpha)}} \phi^{(\alpha)}(x) \quad (4.1)$$

の coupling constant g の次元を計算して見よう。但し、 g の次元を計算する場合、 $\phi^{(\alpha)}$ には、次の次元を assign する：

$$[\phi^{(\alpha)}(x)] = L^{-(s^{(\alpha)}+1)} \quad (4.2)$$

例、

$$[\psi(\text{spin } \frac{1}{2})] = L^{-3/2}$$

$$[\phi(\text{spin } 0)] = L^{-1}$$

$$[A_{\mu}(\text{spin } 1, \text{mass } 0)] = L^{-1}$$

$$[U_{\mu}(\text{spin } 1, \text{mass } \neq 0)] = L^{-2}$$

$$[\psi_{\mu\alpha}(\text{spin } \frac{3}{2}, \text{mass } \neq 0)] = L^{-5/2}$$

.....

さて、(4.1) の左辺 (interaction Hamiltonian) は L^{-4}

$$\therefore [g] = L^{-4} L^{\sum_{\alpha} \lambda^{(\alpha)} (s^{(\alpha)}+1)} L^{\sum_{\alpha} \lambda^{(\alpha)} a^{(\alpha)}}$$

$$= L^{\eta} \quad (4.3)$$

となり, (3.5) に出て来た η と一致する。従って, 条件 (3.5) は, g が長さの 0 又は負のベキをもつ時は renormalizable という事になる。

今, S-matrix を perturbation 展開したとする。そして, その n 次の項を $S^{(n)}$ とする。極めて high energy では, mass は neglect できるから, 次元解析に入ってくる量は $g (= L^{\eta})$ と, 考えている process を特徴づける。energy E である。従って次元から

$$\frac{S^{(n+1)}}{S^{(n)}} \sim g E^{\eta} \quad (4.4)$$

となる。 η が正だと $E \rightarrow \infty$ に従い, $S^{(n)}$ より $S^{(n+1)}$ が限りなく大きくなるから, perturbation 展開は意味を失う。一方, $\eta = 0$ なら, g が小さければ perturbation は悪くないかもしれない。 $\eta < 0$ なら, energy が大きい程, perturbation の convergence がよくなる。

最後に, 二つ注意をのべる。

(i) $\phi^{(\alpha)}$ に assign した次元 $L^{-(s^{(\alpha)}+1)}$ は, 通常の意味の次元 (canonical dimension) と異っている。ここでの assign の仕方は, Green 関数にかかっている最高微分の係数を dimensionless にする様にしてある。こう assign する事によって high energy で mass を neglect し, E のみを考慮する事が可能になったのである。例えば, vector の Green 関数は

$$\langle T(U_{\mu}(x), U_{\nu}(x')) \rangle_0 = i \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{1}{\mu^2} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \right) \Delta_F(x-x')$$

であるが, high energy では, 右辺の $\partial_{\mu} \partial_{\nu}$ がきくであろう。しかし $\frac{1}{\mu^2}$ がかかっているのを, μ^2 を neglect するわけにゆかない。そこで, U_{μ} を定義し直して

$$\langle T(U'_{\mu}(x), U'_{\nu}(x')) \rangle_0 = i (\mu^2 \delta_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \partial_{\nu}) \Delta_F(x-x')$$

とすると, high energy の analysis では, 右辺の $\partial_{\mu} \partial_{\nu}$ term のみを考えればよ

い事になる。この新しく redefine した場 U'_μ の次元が

$$|U'_\mu| = L^{-2}$$

である。

(ii) 判定条件 (3.5) は, relativistic な場について作られたものである。non-relativistic な場に応用する場合は, 次の様な補正をしなければならない。

schrodinger field は spin の如何によらず,

$$\langle T(\psi, \psi^+) \rangle \sim \frac{1}{p_0 - \frac{1}{2m} p^2}$$

だから, $S^{(\alpha)} = 0$ とおかねばならない。

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = 0 \text{ なる phonon についても同様である。}$$

§5. Internal Consistency of renormalization theory

くりこみ理論は, 結局のところ次の様な構造をしている。今, 裸の mass m_0 , μ_0 及び裸の coupling constant g_0 から出発して, ある物理量 K を計算したとすると, K は m_0 , μ_0 , g_0 の関数としては発散を含んでいる。次に, coupling constant や mass の observed value を夫々 g , m , μ とすると, それらも g_0 , m_0 , μ_0 の関数としては発散を含んでいる。即ち,

$$K = K(m_0, \mu_0, g_0, \Lambda) \quad (5.1)$$

$$m = m(m_0, \mu_0, g_0, \Lambda)$$

$$\mu = \mu(m_0, \mu_0, g_0, \Lambda) \quad (5.2)$$

$$g = g(m_0, \mu_0, g_0, \Lambda)$$

ここに Λ は cut-off momentum である。さて、(5.2) を逆に解いて m_0 , μ_0 , g_0 を m , μ , g であらわし (5.2) に代入すると、それは m と μ と g の関数となる。即ち、

$$K(m_0, \mu_0, g_0, \Lambda) = \mathcal{K}(m, \mu, g, \Lambda) \quad (5.3)$$

こうしたとき、 $\mathcal{K}$ は Λ を含まないか、含んでいても $\Lambda \rightarrow \infty$ で finite な値をとる... というのが、くりこみ理論である。

しかし、関係 (5.2) に問題がある。例えば (5.2) のはじめの二式を三番目の式に代入し、 m_0 と μ_0 を消したとすると、関係

$$g = g(m, \mu, g_0; \Lambda)$$

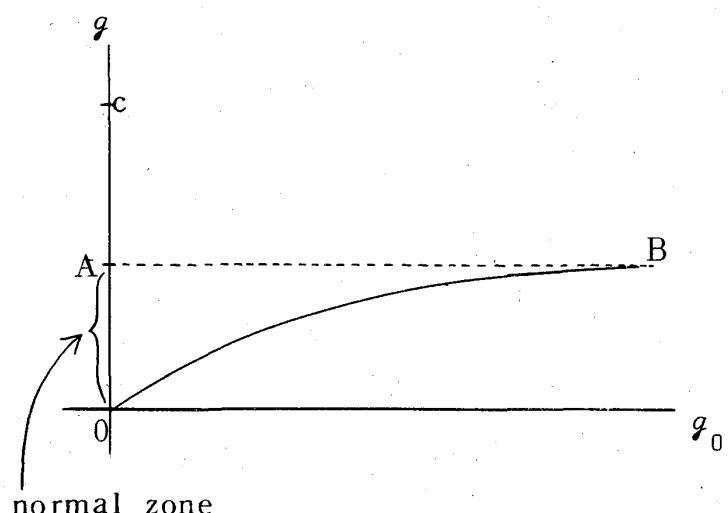
が得られるであろう。ここで m と μ に observed value を入れ、 Λ を fix して g_0 を $-\infty$ から $+\infty$ まで動かすとき、 g のとりうる値の領域を normal zone とよぶ。若し normal zone がせまいと、 g を直ちに observed value に identify できないかもしれない。無理に g を observed coupling constant とみなすと、 g_0 は実数でありえない事になり、はじめの Hamiltonian の hermiticity をこわすかもしれない。下の図からわかる様に、若し g_0 をかえた時 (Λ を fix して) curve OB が saturate すると g は OA より大きな値がとれない事になる。Observed な g が例えば OC であれば、くりこみ理論は、consistent ではない。cut-off を小さくとると normal zone OA は、C までひろがるかもしれない。

この様な事を Lee は、簡単な model で調べた。

T.D.Lee, Phys.

Rev. 95 1329 (1954)

この model では、くりこみ定



数 z が正確に計算されるが、その計算に出て来る cut-off Λ を大きくすると、normal zone がずんずん減って来て、 $\Lambda \rightarrow \infty$ では normal zone が消えてしまう。即ち

$$|g| < a(\Lambda)$$

なる $a(\Lambda)$ が存在し、

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} a(\Lambda) \rightarrow \infty$$

となるのである。従って g を finite にとるためには、 Λ を有限にとどめておかねばならない。むりに Λ を大きくとると、negative norm をもった粒子があらわれる。これを ghost とよぶ。

Källén, Pauli; Dan. Mat. Fys. Medd. 30 No.7 (1955)

以上の考察から、くりこみ理論は、cut off と併用しないと self-consistent でないという考えが生まれる。Q.E.D. に於いて、その cut-off を rough にあててみると、

$$\Lambda \simeq m e^{137} \quad (e = 2.718281828459045 \dots)$$

という大きな量になり、実験的に detect するのは難しい。

§ 6. Various representation of Green's functions

以上、perturbation theory による renormalization をながめて来たが、同じ事が Heisenberg 表示でできないか。勿論形式的には、§ 2 でやった様に、運動方程式から、perturbation を用いないで、Dyson の方程式を導く事が出来る。然しながら、どういう種類の primitive divergence が出るかとか発散項を分離する事とかは perturbation の知識をかりないと出来ない。以下に、Heisenberg 表示の量を用いて、renormalization constants を定義する方法を述べる。その目的のためには、Green's function についての、いろいろな表現方法を先づ調べておくとも便利である。種々の表示は目的に応じて、いろいろと使い方がある。

Green 関数の種々の表示

(1) Spectral representation

Interact している scalar 場 $\phi(x)$ をとろう。Heisenberg 表示では, total energy-momentum P_μ を用いて

$$\phi(x) = e^{-iPx} \phi(0) e^{iPx} \quad (6.1)$$

と書ける。 P_μ については

$$P_\mu |0\rangle = 0 \quad (6.2)$$

$$P_\mu |p, \alpha\rangle = p_\mu |p, \alpha\rangle \quad (6.3)$$

が成立つ。ここに α は p 以外の quantum number, Hamiltonian の eigenvalue p_0 は non negative である。すると,

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle &= \langle 0 | \phi(0) e^{ip(x-x')} \phi(0) | 0 \rangle \\ &= \sum_{\alpha} \int d^4p \cdot |\langle 0 | \phi(0) | p, \alpha \rangle|^2 e^{ip(x-x')} \theta(p_0) \end{aligned} \quad (6.4)$$

今

$$\rho(-p^2) = (2\pi)^3 \sum_{\alpha} |\langle 0 | \phi(0) | p, \alpha \rangle|^2 \quad (6.5)$$

とおく。これは右辺が relativistic に invariant であるから, p^2 のみの関数であるという事にすぎない。(6.5) を (6.4) に代入すると

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p e^{ip(x-x')} \theta(p_0) \rho(-p^2) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\kappa^2 \int d^4p e^{ip(x-x')} \theta(p_0) \delta(p^2 + \kappa^2) \rho(\kappa^2) \end{aligned}$$

$$= i \int_0^{\infty} d\kappa^2 \rho(\kappa^2) \Delta^{(+)}(x-x', \kappa^2) \quad (6.6)$$

with

$$\begin{aligned} \Delta^{(+)}(x-x', \kappa^2) &= -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4p e^{ip(x-x')} \theta(p_0) \delta(p^2 + \kappa^2) \\ &= -\Delta^{(-)}(x'-x, \kappa^2) \end{aligned} \quad (6.7)$$

(6.6) は $\langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle$ の spectral representation である。

同様に

$$\langle 0 | \phi(x') \phi(x) | 0 \rangle = -i \int_0^{\infty} d\kappa^2 \rho(\kappa^2) \Delta^{(-)}(x-x', \kappa^2) \quad (6.8)$$

(6.6) と (6.8) を組み合わせて,

$$\langle 0 | [\phi(x), \phi(x')] | 0 \rangle = i \int_0^{\infty} d\kappa^2 \rho(\kappa^2) \Delta(x-x', \kappa^2), \quad (6.9)$$

$$\langle 0 | T(\phi(x), \phi(x')) | 0 \rangle = i \int_0^{\infty} d\kappa^2 \rho(\kappa^2) \Delta_F(x-x', \kappa^2), \quad (6.10)$$

where

$$\Delta(x-x', \kappa^2) = \Delta^{(+)}(x-x', \kappa^2) \Delta^{(-)}(x-x', \kappa^2) \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} \Delta_F(x-x', \kappa^2) &= \theta(x_0 - x'_0) \Delta^{(+)}(x-x; \kappa^2) \\ &\quad - \theta(x'_0 - x_0) \Delta^{(-)}(x-x', \kappa^2) \end{aligned} \quad (6.12)$$

であって、特に (6.11) は

$$\begin{aligned} \Delta(x, \kappa^2) &= 0 \quad x_0 = 0 \\ \dot{\Delta}(x, \kappa^2) \delta(x_0) &= -\delta^{(4)}(x) \end{aligned} \quad (6.13)$$

(6.10) は, Fourier transform すると,

$$\Delta_F'(k^2) = - \int_0^{\infty} d\kappa^2 \rho(\kappa^2) \frac{1}{k^2 + \kappa^2 - i\epsilon} \quad (6.14)$$

となる。

定義 (6.5) により,

$$\rho(\kappa^2) \geq 0 \quad (6.15)$$

である。

若し $\dot{\phi}(x)$ が $\phi(x)$ の canonical to momentum である様な場合には

$$[\dot{\phi}(x), \phi(x')] \delta(x_0 - x'_0) = -i \delta^{(4)}(x - x') \quad (6.16)$$

この真空期待値と, (6.9) を時間微分したものと比較すると,

$$\int_0^{\infty} d\kappa^2 \rho(\kappa^2) = 1 \quad (6.17)$$

を得る。

くりこみの条件

$$\Delta_F'(k^2) = z_3 \Delta_{Fc}(k^2) \quad (6.18)$$

及び, $\Delta_F'(k^2)$ が $k^2 + \mu^2 = 0$ に pole をもつ事を考慮すると,

$$\rho(\kappa^2) = z_3 (\delta(\kappa^2 - \mu^2) + \sigma(\kappa^2)) \quad (6.19)$$

ここで,

$$\sigma(\kappa^2) = 0 \quad \text{at} \quad \kappa^2 \leq \kappa_a^2 (> \mu^2) \quad (6.20)$$

であり, 勿論

$$z_3 \sigma(\kappa^2) \geq 0 \quad (6.21)$$

である。

条件 (6.17) は,

$$0 < z_3 = 1 - z_3 \int_{\kappa_a^2}^{\infty} d\kappa^2 \sigma(\kappa^2) \leq 1 \quad (6.22)$$

又は,

$$z_3^{-1} = 1 + \int_{\kappa_a^2}^{\infty} d\kappa^2 \sigma(\kappa^2) \geq 1 \quad (6.22')$$

以上は、相互作用の detail にはよらない話である。

(2) 分数形表示

Dyson equation によると,

$$\Delta_F'(k^2) = - \frac{1}{k^2 + \mu^2 + \pi^*(k^2)} \quad (6.23)$$

$$k^2 + \mu^2 + \pi^*(k^2) = 0 \quad (6.24)$$

の根 (の符号を逆にしたもの) を μ^2 とすると,

$$\begin{aligned} k^2 + \mu^2 + \pi^*(k^2) &= \kappa^2 + \mu^2 + \pi^*(k^2) - \pi^*(-\mu^2) \\ &\equiv \kappa^2 + \mu^2 + (z_3^{-1} - 1)(\kappa^2 + \mu^2) \\ &\quad + z_3^{-1}(\kappa^2 + \mu^2)\pi_1(k^2) \\ &= z_3^{-1}(\kappa^2 + \mu^2)(1 + \pi_1(k^2)) \end{aligned} \quad (6.25)$$

と書く事が出来る。ここで,

$$\pi_1(-\mu^2) = 0 \quad (6.26)$$

又,

$$z_3^{-1} = 1 + \frac{\partial \pi^*(\kappa^2)}{\partial k^2} \Big|_{k^2 + \mu^2 = 0} \quad (6.27)$$

斯くて (6.23) (6.25) より

$$\Delta_F'(k^2) = -z_3 \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \frac{1}{1 + \pi_1(k^2)} \quad (6.28)$$

更に (6.26) を考慮して $\pi_1(k^2)$ を書き直すと

$$\pi_1(k^2) = (k^2 + \mu^2) \pi_2(k^2) \quad (6.29)$$

Hence

$$\Delta_C'(k^2) = -\frac{z_3}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} - \frac{z_3 \pi_2(k^2)}{1 + \pi_1(k^2)} \quad (6.30)$$

と書く事も出来る。

前の representation に出て来た $\sigma(\kappa^2)$ と $\pi_1(k^2)$ とを関係づけるには、

$$\frac{1}{k^2 + \kappa^2 - i\epsilon} = P \frac{1}{k^2 + \kappa^2} + i\pi \delta(k^2 + \kappa^2) \quad (6.31)$$

を用いて、先づ

$$\mathcal{J}_m \Delta_C'(k^2) = -\pi \rho(-k^2) \quad (6.32)$$

に注意する。(6.28) の imaginary part は

$$z_3 P \frac{1}{k^2 + \mu^2} \cdot \frac{\mathcal{J}_m \pi_1(k^2)}{|1 + \pi_1(k^2)|^2} - k^2 > \mu^2$$

従って、

$$\begin{aligned} \sigma(\kappa^2) &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\kappa^2 - \mu^2} \cdot \frac{\mathcal{J}_m \pi_1(-\kappa^2)}{|1 + \pi_1(-\kappa^2)|^2} \\ &= \frac{z_3^{-2}}{\pi} (\kappa^2 - \mu^2) |\Delta_C'(-\kappa^2)|^2 \mathcal{J}_m \pi_1(-\kappa^2) \end{aligned} \quad (6.33)$$

となる。

$\pi_1(k^2)$ に対しては, spectral representation が成立するが, ここでは必要がないので, 文献のみをあげておく。

Lehmann, Symanzik, Zimmermann, Nuovo Cim
2 425 (1955)

(3) Improper self-energy による表示,

(2.11) 式にもどり,

$$\begin{aligned} (\square - \mu^2) <0|T(\phi(x), \phi(x'))|0> \\ = i \delta^{(4)}(x-x') + <0|T(J(x), \phi(x'))|0> \end{aligned}$$

の右から $\overleftarrow{\square}' - \mu^2$ をかけると,

$$\begin{aligned} (\square - \mu^2) <0|T(\phi(x), \phi(x'))|0> (\overleftarrow{\square}' - \mu^2) \\ = i (\square - \mu^2 - \delta \mu^2) \delta^{(4)}(x-x') \\ + <0|T(J(x), J(x'))|0> \end{aligned} \quad (6.34)$$

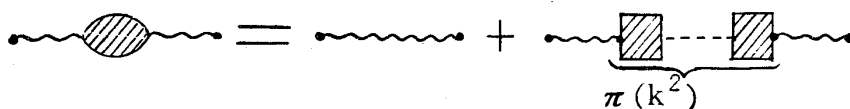
を得る。

$$<0|T(J(x), J(x'))|0> = i \pi(x-x') + i \delta \mu^2 \delta^{(4)}(x-x')$$

とおくと, Fourier transform に対し

$$\Delta_F'(k^2) = \Delta_F(k^2) + \Delta_F(k^2) \pi(k^2) \Delta_F(k^2) \quad (6.35)$$

が成立つ。これは, Dyson equation の別の形である。



$\pi(k^2)$ は improper self-energy で, 一本の線を切る事により, 二つの図形にわ

かれる。

この表示 (6.35) は、今のところあまり利用されていない。

Improper self energy は、散乱 matrix と関係づけられる事を注意する。

$$\eta = f_0 \phi(x) \psi(x)$$

$$\bar{\eta} = f_0 \bar{\psi}(x) \phi(x)$$

$$\langle T(\phi(x) \psi(y) \phi(x') \bar{\psi}(y')) \rangle_0$$

$$= -\frac{f_0^2}{(2\pi)^{12}} \int d^4p d^4k d^4p' d^4k' e^{ipy} e^{ikx} e^{-ip'y'} e^{-ik'x'} \\ \times \delta^{(4)}(p+k-p'-k') S_F'(p) \Delta_F'(k) W(p, k; p', k') \Delta_F'(k') S_F'(p')$$

によって W を定義し、Reduction formula を用いると、

$$\langle p, k | \cdot S | p', k' \rangle$$

$$= -(-i)^4 z_3^{-1} z_2^{-1} \int d^4x d^4y d^4x' d^4y' \\ \times \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-ikx} e^{-iby} e^{ik'x'} e^{ip'y'} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}}} \\ \times \bar{u}^{(r)}(p) (\not{r} \partial_y + m) (\not{\square} - \mu^2) \langle T(\phi(x) \psi(y) \phi(x') \bar{\psi}(y')) \rangle_0 \\ \times (\not{\square}' - \mu^2) \times (-\not{r} \partial_{y'} + m) u^{(r')}(p') \\ = \frac{f_0^2}{(2\pi)^2} z_2 z_3 \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}}} \bar{u}^{(r)}(p) W(p, k; p', k') u^{(r')}(p')$$

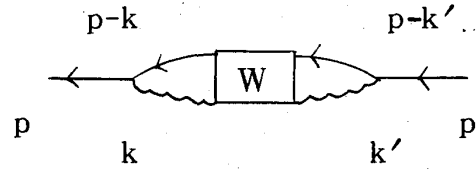
この様に、 $W(p, k; p', k')$ は、meson nucleon の散乱に関係している。尚、 W の定義式で $x=y$, $x'=y'$ とおくと、

$$\langle T(\phi(x) \psi(x), \phi(x') \bar{\psi}(x')) \rangle_0$$

$$= -\frac{f_0^2}{(2\pi)^{12}} \int d^4p d^4k d^4p' d^4k' e^{i(k+p)x} e^{-i(k'+p')x'} \\ \times \delta^{(4)}(p+k-p'-k') S_F'(p) \Delta_F'(k) W(p, k; p', k') \Delta_F'(k') S_F'(p')$$

$$= -\frac{f_0^2}{(2\pi)^{12}} \int d^4p d^4k d^4p' d^4k' e^{i(k+p)(x-x')} \\ + \delta^{(4)}(p+k-p'-k') S_F'(p) \Delta_F'(k) W(p, k; p', k') \Delta_F'(k') S_F'(p')$$

$$= -\frac{f_0^2}{(2\pi)^{12}} \int d^4p e^{ip(x-x')} \int d^4k d^4k' \\ \times S_F'(p-k) \Delta_F'(k) W(p-k, k; p-k', k') \Delta_F'(k') S_F'(p-k')$$



$$(\gamma \partial + m) \psi(x) = f_0 \phi(x) \psi(x) = \eta(x)$$

$$(\gamma \partial + m) \langle T(\psi(x), \bar{\psi}(x')) \rangle_0 (-\overleftarrow{\gamma \partial'} + m)$$

$$= -i(\gamma \partial + m) \delta^{(4)}(x-x') + \langle T(\eta(x) \bar{\eta}(x')) \rangle_0$$

$$(i\gamma p + m) S_F'(p)(i\gamma p + m) = (i\gamma p + m)$$

$$= i \frac{f_0^2}{(2\pi)^8} \int d^4k d^4k' S_F'(p-k) \Delta_F'(k)$$

$$\times W(p-k, k; p-k', k') \Delta_F'(k') S_F'(p-k')$$

$$= (i\gamma p + m) + \Sigma(i\gamma p)$$

従って improper self-energy は,

$$\begin{aligned} \Sigma(i\gamma p) = & -i \frac{f_0^2}{(2\pi)^8} \int d^4k d^4k' S_F'(p-k) \Delta_F'(k^2) \\ & \times W(p-k, k; p-k', k') \Delta_F'(k'^2) S_F'(p-k') \end{aligned}$$

となる。

全く同様の事を, photon についてやると photon propagator につき

$$k^2 D_F'(k^2) k^2 = -k^2 + \pi(k^2)$$

$$\therefore -k^2 D_F'(k^2) = 1 - \frac{1}{k^2} \pi(k^2)$$

但し,

$$\pi(k^2) = -i \int d^4x e^{-ikx} \langle T(\rho(x), \rho(0)) \rangle_0$$

$\rho(x)$ は charge density である。これらと, solid state physics でよく知られた式

$$\frac{1}{\epsilon(\omega, \underline{q})} = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \sum_n | \langle n | \rho_q | 0 \rangle |^2 \left\{ \frac{1}{\omega + \omega_{n0} + i\epsilon} + \frac{1}{-\omega + \omega_{n0} - i\epsilon} \right\}$$

を比較せよ。