

Gauss 可測なノルムについての再考

お茶の水女子大学大学院人間文化研究科 原井 敬子 (Keiko Harai)

同大学理学部 前田 ミチエ (Michie Maeda)

1 導入

無限次元空間上の測度論は, Prokhorov, Sazonov, Minlos らによって, 独立した研究分野として確立された. 無限次元空間上では, Gauss シリンダー測度が中心的な役割を果たしている. これは, 有限次元空間での定義をそのまま無限次元 Hilbert 空間に拡張して定義できるが, σ -加法性がなくシリンダー測度になっている. 1962 年, Gross([5]) が可測ノルムの概念を導入した. これは, Gauss シリンダー測度を測度に拡張するための条件である. Gauss シリンダー測度に関して, 今まで多くの結果が得られている. この論文でもう一度 Gauss シリンダー測度を考察してみようと思ったきっかけは, Kuo の Conjecture である. ここではこの Conjecture を中心に, Hilbert 空間 H 上のノルム $\|\cdot\|$ が, Gauss シリンダー測度に対して可測であるという条件と, $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 < +\infty$ となる H 上の完全正規直交基底 $\{e_n\}$ が存在するという条件について調べてみた.

2 準備

この論文では, X を Banach 空間, X^* を位相的対偶空間, $(\cdot, \cdot)$ を X^* と X の natural pairing, $\mathcal{B}(X)$ を X の Borel σ -algebra とする. また, H を実可分 Hilbert 空間, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を H 上の内積, $FD(H)$ を H の有限次元部分空間全体, $\mathcal{F}$ を H 上の有限次元部分空間への直交射影全体とする. I で恒等写像を表すことにする.

Z が, $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} \subset X^*$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に対して, 次のように表されるとき, シリンダー集合という.

$$Z = \{x \in X; ((\xi_1, x), \dots, (\xi_n, x)) \in B\}.$$

$\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ を固定したときのシリンダー集合全体を $\mathcal{R}_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}$ で表し, シリンダー集合全体を $\mathcal{R}$ で表すとき, $\mathcal{R}_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}$ は σ -algebra となり, $\mathcal{R}$ は algebra となる. また, Hilbert 空間上のシリンダー集合は次のように表すことができる.

$$Z = \{x \in H; Px \in F\} \quad (P \in \mathcal{F}, F \in \mathcal{B}(PH)).$$

次にシリンダー測度を定義する.

定義 2.1 $\mathcal{H}$ 上に定義された関数 μ が次の条件を満たすとき、シリンダー測度であるという。

(i) $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$

(ii) μ の $\mathcal{H}_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}$ への制限が確率測度

次に Hilbert 空間上で重要な役割を果たす Gauss シリンダー測度を定義する。

定義 2.2 集合関数 $\gamma : \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$ が次のように表されるとき、標準的 Gauss シリンダー測度であるという。

$Z = \{x \in H; Px \in F\}$ に対して、

$$\gamma(Z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_F e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx$$

ただし、 $n = \dim PH$ 、 dx は PH 上の Lebesgue 測度とする。

注意 1 H が無限次元空間のとき、 γ は有限加法的測度であるが、 σ -加法的ではない。一般に、Gauss シリンダー測度は、パラメータ t を使って、 $\gamma_t(Z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^n \int_F e^{-\frac{|x|^2}{2t}} dx$ と表され、 γ_1 を標準的 Gauss シリンダー測度というが、この論文では単に γ で標準的 Gauss シリンダー測度を表すことにする。

次に可測ノルムを定義する。

定義 2.3 $\|\cdot\|$ を H で定義されたノルムとし、 μ を H 上のシリンダー測度とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある P_0 が存在して、 $P \perp P_0$ となるどんな $P \in \mathcal{P}$ に対しても、

$$\mu(\{x \in H; \|Px\| > \varepsilon\}) < \varepsilon$$

が成り立つとき、 $\|\cdot\|$ は μ -可測であるという。

上の定義は次のように言い換えることができる。

任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $G \in FD(H)$ が存在して、 $F \perp G$ となるどんな $F \in FD(H)$ に対しても、

$$\mu(\{N_\varepsilon \cap F + F^\perp\}) \geq 1 - \varepsilon$$

が成り立つとき、 $\|\cdot\|$ は μ -可測であるという。

ただし、 $N_\varepsilon = \{x \in H; \|x\| \leq \varepsilon\}$ 、 $F^\perp$ は F の直交補空間とする。

定義 2.4 (Abstract Wiener space) γ を H 上の Gauss シリンダー測度、 $\|\cdot\|$ を H 上で定義された可測なノルム、 B を $\|\cdot\|$ に関する H の完備化とし、 i を H から B への埋め込み写像とする。このとき、 (i, H, B) を abstract Wiener space という。

定理 2.5 H 上で定義されたノルム $\|\cdot\|$ が γ -可測であることと、 $i(\gamma)$ が B 上で測度に拡張できることは同値である。(D.F.L. ([3]))

3 Gauss 可測なノルムの例と Kuo の Conjecture

A を Hilbert-Schmidt 作用素とし, $x \in H$ に対して, $\|x\| = |Ax|$ と定義すると, $\|\cdot\|$ は γ -可測となることはよく知られている. さらに, H 上のすべての完全正規直交基底 $\{e_n\}$ に対して, $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 = (\text{一定}) < +\infty$ となることも分かっている.

次に classical Wiener space 上で考える.

区間 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数 x で $x(0) = 0$ となるもの全体を $C[0, 1]$ と表す. また, C' を次の条件を満たす実数値関数 f 全体とする.

$$f \text{ は絶対連続, } f(0) = 0, f' \in L^2[0, 1]$$

さらに, C' 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を次のように定義する.

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$$

また, $\|x\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$ とする. このとき, $(i, C', C[0, 1])$ は abstract Wiener space となる. つまり, $\|\cdot\|$ は C' 上の Gauss 可測なノルムである. このとき, C' 上の完全正規直交基底を

$$e_n(t) = \sqrt{2} \left\{ 1 - \frac{1}{(n - \frac{1}{2})\pi} \cos(n - \frac{1}{2})\pi t \right\}$$

とすると, $\|e_n\| \geq \sqrt{2}$ となり, $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 = +\infty$ となる.

また, $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2$ に対して,

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)\| = \sup n^{-k} |x_n|$$

と定義する. $k \geq \frac{1}{2}$ のとき $\|\cdot\|$ は γ -可測となる. さらに,

$k > \frac{1}{2}$ のとき $\sum \|e_n\|^2 < \infty$ となる完全正規直交基底 $\{e_n\}$ が存在する

$k = \frac{1}{2}$ のとき $\sum \|e_n\|^2 = \infty$ となる完全正規直交基底 $\{e_n\}$ が存在することが分かっている. ([5]).

これらの例を見てみると, $\|\cdot\|$ が γ -可測であることと, ある $\{e_n\}$ に対して $\sum \|e_n\|^2 < +\infty$ となることが関係しているように思われる.

1975 年 Kuo が次の Conjecture を提示した.

Conjecture

$\|\cdot\|$ が H 上の γ -可測なノルムであるとき, $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 < +\infty$ となる完全正規直交基底 $\{e_n\}$ が存在するか?

4 Kuo の Conjecture の解決

Kuo の Conjecture

$\|\cdot\|$ が H 上の γ -可測なノルムであるとき, $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 < +\infty$ となる完全正規直交基底 $\{e_n\}$ が存在するか?

この Conjecture に興味をもち調べてみたところ, 2つの論文により肯定的に解決されていたので紹介する.

定義 4.1 E を実可分 Banach 空間, (ξ_n) をそれぞれの *distribution* が *standard Gaussian* 測度となる独立な *random variables* の列, μ を E 上の対称な *Gaussian* 測度とする. このとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \xi_n \text{ が収束する (a.s.)}$$

$$\mu \text{ が } \sum_{n=1}^{\infty} x_n \xi_n \text{ の distribution}$$

となる E 上の列 $\{x_n\}$ が存在する. そのような列 $\{x_n\}$ を μ に対する *representing sequence* と呼ぶ.

定義 4.2 H を Hilbert 空間, $\{e_n\}$ を H 上完全正規直交基底, $\{x_n\}$ を μ に対する *representing sequence* とするとき, $T : e_n \rightarrow x_n$ ($n = 1, 2, \dots$) は連続な線型作用素 $T : H \rightarrow E$ に一意に拡張できる. この T を *representing operator* と呼ぶ.

$T : \mu$ に対する *representing operator* とするとき, $\{f_n\}$ を H 上完全正規直交基底とすると, $\{Tf_n\}$ は μ に対する *representing sequence* なる.

逆に, $\{y_n\}$ を μ に対する *representing sequence* すると, 対応する H 上完全正規直交基底 $\{f_n\}$ が存在する.

次の定理は Kuo の Conjecture を解決した論文の 1 つである.

定理 4.3 (Kwapien and Szymanski) E を実可分 Banach 空間, μ を E 上対称な Gaussian 測度とすると, $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < +\infty$ となる μ に対する representing sequence $\{x_n\}$ が存在する.

この定理により, $\|\cdot\|$ が γ -可測であるとき, $i(\gamma)$ は測度に拡張でき, ある $i(\gamma)$ に対する representing sequence $\{x_n\}$ が存在して, $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < +\infty$ となる. さらに, それに対応する完全正規直交基底 $\{e_n\}$ が存在し, $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 < +\infty$ となる.

定義 4.4 X を実 Banach 空間, μ を X 上 Radon 確率測度で $\int_X |\langle x, x^* \rangle|^2 d\mu(x) < \infty$ を満たすものとする. このとき, μ の covariance operator $R_\mu : X^* \rightarrow X$ を

$$R_\mu x^* = \int_X \langle x, x^* \rangle x d\mu(x) \quad (x^* \in X^*)$$

と定義する.

定義 4.5 Y, Z を実 Banach 空間とする. 線型作用素 $R : Y \rightarrow Z$ が次の形で表されるとき, *nuclear* であるという.

$$Ry = \sum_{k=1}^{\infty} \langle y, y_k^* \rangle z_k \quad (y \in Y)$$

ただし, $(y_k^*) \subset Y^*$, $(z_k) \subset Z$, $\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k^*\| \|z_k\| < \infty$ とする.

注意 2 可分な Hilbert 空間上では, *symmetric positive nuclear linear operator* と *covariance operator* は一致する.

定理 4.6 (V.I. Tarieladze) X を実 Banach 空間, μ を X 上 Radon 確率測度で, $\int_X \|x\|^2 d\mu(x) < \infty$ を満たすものとする, μ の covariance operator $R_\mu : X^* \rightarrow X$ は

$$R_\mu x^* = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k, x^* \rangle x_k$$

と表される.

ただし, $x^* \in X^*$, $(x_k) \subset X$, $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < \infty$ とする.

この定理において、問題点が2つある。

Problem1

上の定理で、 $\{x_n\} \subset X$ が位相的に独立な列として選べるか？

この問題1が解決されれば、Kuo の Conjecture を直接証明できるが、逆に定理 4.3 により、 $\{x_n\}$ が位相的に独立な列としてとれることがいえる。

Problem2

X が実 Banach 空間のとき、すべての symmetric positive nuclear linear operator $R : X^* \rightarrow X$ は $Rx^* = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k, x^* \rangle x_k$, where $(x_k) \subset X, \sum \|x_k\|^2 < \infty$ と表されるか？

この問題2については、未解決のままか不明であるが、Kuo の Conjecture に直接関係していない。

5 type2, cotype2 の Banach 空間への拡張

ここでは、まず type2, cotype2 の Banach 空間の定義を述べる。
(ξ_n) をそれぞれの distribution が standard Gaussian 測度となる独立な random variables の列とする。

定義 5.1 Banach 空間 B が type 2 $\iff \sum \|x_n\|^2 < \infty$ のとき $\sum x_n \xi_n$ が収束 (a.s.) する

定義 5.2 Banach 空間 B が cotype 2 $\iff \sum x_n \xi_n$ が収束 (a.s.) するとき $\sum \|x_n\|^2 < \infty$

次はよく知られている事実である。

すべての Banach space は type 1 であり、 L^p ($1 \leq p \leq 2$) は type p であり、 L^r ($2 \leq r \leq +\infty$) は type 2 である。また、 L^1 は type 1 であり、 L^∞ は type 1 である。

すべての Banach space は cotype $+\infty$ である。また、 L^1 は cotype 2 で、 L^∞ は cotype $+\infty$ である。

定理 5.3 H を実可分 Hilbert 空間、 $\|\cdot\|$ を H 上で定義された γ -可測なノルム、 B を $\|\cdot\|$ に関する H の完備化、 i を H から B への埋め込み写像とする。 B が cotype 2 のと

き, H 上のすべての完全正規直交基底 $\{e_n\}$ に対して,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 < +\infty$$

となる.

証明 H 上のある完全正規直交基底 $\{f_n\}$ に対して, $\sum i(f_n)\xi_n$ の distribution が $i(\gamma)$ となるので, $\sum i(f_n)\xi_n$ が収束 (a.s) する. representing sequence の性質から, H 上のすべての完全正規直交基底 $\{e_n\}$ に対して $\sum i(e_n)\xi_n$ が収束 (a.s) する. B は cotype 2 であるので, $\sum \|e_n\|^2 < +\infty$ となる.

定理 5.4 H を実可分 Hilbert 空間, $\|\cdot\|$ を H 上で定義されたノルム, B を $\|\cdot\|$ に関する H の完備化, i を H から B への埋め込み写像とする. B が type 2 であるとき, 次が成り立つ.

$$\|\cdot\| \text{ が } \gamma\text{-可測} \iff \sum \|e_n\|^2 < +\infty \text{ となる } \{e_n\} \text{ が存在する}$$

証明 $(\implies)$ は明らかであるので, $(\impliedby)$ を示す. $\|\cdot\|$ が type 2 のとき, $\sum \|i(e_n)\|^2 < +\infty$ より $\sum i(e_n)\xi_n$ が収束 (a.s) する. $\sum i(e_n)\xi_n$ の distribution が $i(\gamma)$ になるので, $\|\cdot\|$ は γ -可測になる.

注意 3 (i, H, B) : abstract Wiener space とすると,

① B が Hilbert 空間であるとき

H 上の完全正規直交基底 $\{e_n\}$ に対して, $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 = \text{constant} < +\infty$ となる.

② B が Hilbert 空間でないとき

ある B に対しては, $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 = +\infty$ となる H 上の正規直交基底 $\{e_n\}$ が存在する.

参考文献

- [1] A. Badrikian, and S. Chevet, *Mesures cylindriques, espaces de Wiener et fonctions aléatoires Gaussiennes*, Lecture Notes in Math. 379, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.
- [2] P. Baxendale, *Gaussian Measures on Function Spaces*, Amer. J. Math. 98(1976), 891-952.

- [3] R.M. Dudley, J. Feldman, and L. LeCam, *On semi-norms and probabilities, and abstract Wiener Spaces*, Ann.of Math.**93**(1971),390-408.
- [4] L. Gross, *Measurable functions on Hilbert space*, Trans. Amer. Math. Soc. 105(1962), 372-390.
- [5] K. Harai and M. Maeda, シリンダー測度の回転と可測ノルム, 京都大学数理解析研究所講究録 1253(2002), 14-25.
- [6] H.H. Kuo, *Gaussian Measures in Banach Spaces*, Lecture.Notes in Math.463, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1975.