

ランダムな流れ場の中の代数ソリトン

山口大教養 松野好雅 (Yoshimasa Matsuno)

1. 概要

2層流体系の界面を伝播する、弱非線形界面波への種々のランダムネスの影響を調べる。波動伝播を支配するモデル方程式として、以下の外力項を含む Benjamin-Ono (BO) 方程式を考える [1]:

$$\eta_t + (F-1)\eta_x - \frac{3\alpha}{2}\eta\eta_x - \frac{\Delta\delta}{2}H\eta_{xx} = \frac{\gamma\alpha F^2}{2}B_x \quad (1)$$

ここで $\eta = \eta(x, t)$ は界面変位、 F はフルード数、 Δ は上、下流体層の密度比を表す。右辺の γB は流体底面形状の不均一性を特徴づける関数である。また左辺最後の項の H はヒルベルト変換の演算子である。 α 、および δ は小さな無次元パラメータで、各々非線形、および分散の強さの目安を与える。上記方程式は、2次元非粘性、非圧縮流体の方程式系へ、特異摂動法を適用することによって導かれたが、その際の仮定として $\delta = O(\alpha)$ を置いている。

方程式 (1) は右辺=0 のときはよく知られた BO 方程式に帰着する。BO 方程式は完全可積分系であり、ソリトン解や周期波解等の厳密解を有する。ここではフルード数が 1 に近く、かつ時間的にゆるやかに変化する状況を考え、 $F = 1 + \alpha\Gamma(\alpha t)$ と置く。この条件下で方程式 (1) を $t \rightarrow (\Delta\delta/\alpha^2)t, x \rightarrow (\delta/\alpha)x, \eta \rightarrow (8/3)u, B \rightarrow (16/3F^2)B$ のように規格化すると

$$u_t + \Gamma(t)u_x - 4uu_x - Hu_{xx} = \gamma B_x, \quad u = u(x, t) \quad (2)$$

となる。以下では Γ, B および B_x がランダムに変化する場合を考察し、これらのランダムネスがソリトンや周期波の伝播特性、特に u の平均値に与える影響を、解析的手法により調べる。

2. ランダムな流れ場

最初に流体底面は平坦、すなわち $B = 0$ で流れ場がランダムに変化する場合を考える。このとき (2) は

$$u_t + \Gamma(t)u_x - 4uu_x - Hu_{xx} = 0, \quad u = u(x, t) \quad (3)$$

となる。ここで Γ は平均値 1 からのフルード数のゆらぎを表すが、これは平均値 0 のガウス分布に従うと仮定する。すなわち

$$\langle \Gamma(t) \rangle = 0, \quad \langle \Gamma(t_i)\Gamma(t_j) \rangle = 2D\delta(t_i - t_j) \quad (4)$$

ここで $\langle \dots \rangle$ はアンサンブル平均を表す。また D は Γ の相関の強さを特徴づける正の定数、 $\delta(t_1 - t_2)$ はデルタ関数である。(3) は可積分方程式であり種々の統計量が厳密に計算できるが、ここでは u がソリトン解と周期波解の場合について、これらの平均値を求める。

A. ソリトン

BO 方程式 (3) の 1-ソリトン解は、代数型の解で

$$u(x, t) = \frac{a}{a^2(x - \xi)^2 + 1} \quad (5a)$$

$$\xi = \int_0^t \Gamma(s)ds - at + \xi_0 \quad (5b)$$

と書ける。ここで a および ξ はソリトンの振幅、および初期位置である。ランダムネスは時刻 t でのソリトンの位置を表すパラメータ ξ のみに入っている。 u のフーリエ変換 $\hat{u}$ は

$$\hat{u}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{-ikx}dx = \pi e^{-ik\xi - |k|/a}. \quad (6)$$

となるが、これとガウス分布の仮定、および (4) より導かれる公式

$$\langle e^{ik \int_0^t \Gamma(s)ds} \rangle = e^{-k^2 Dt} \quad (7)$$

を用いると、 u の平均値は直ちに計算できて次のようになる：

$$\langle u(x, t) \rangle = \int_0^{\infty} e^{-Dtk^2 - k/a} \cos k(x + at - \xi_0)dk \quad (8)$$

この積分を $t \rightarrow \infty$ ($x + at - \xi_0 = \text{const.}$) で評価すると

$$\langle u(x, t) \rangle \sim \sqrt{\frac{\pi}{4Dt}} \exp \left[-\frac{(x + at - \xi_0)^2}{4Dt} \right] \propto t^{-1/2} \quad (9)$$

となり、初期の代数ソリトンはガウシアン的な波束に近づくことがわかる。同様な計算により u が N -ソリトン解の場合においてもその平均値、さらに $\langle u(x, t)u(y, t) \rangle$ 等の相関関数も厳密に計算できるがここでは省略する。

B. 周期波

(3) の 1-周期波解は次のように書ける。

$$u(x, t) = \frac{k}{2} \frac{\sinh \phi}{\cos \eta + \cosh \phi} \quad (10a)$$

$$\eta = k(x - \xi), \quad \phi = \tanh^{-1}(k/a), \quad (\phi > 0) \quad (10b)$$

ここで k は波数を表す。 u の平均値は (7) を用いると

$$\langle u(x, t) \rangle = \frac{k}{2} + k \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 k^2 Dt - n\phi} \cos(nkz), \quad (z = x + at - \xi_0) \quad (11)$$

のように無限級数で表現できる。長波長極限 $k \rightarrow 0$ では上式は (8) に帰着する。 $t \rightarrow \infty$ の極限においては (11) は

$$\begin{aligned} \langle u(x, t) \rangle &\sim \frac{k}{2} + k \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 k^2 Dt} \cos(nkz) \\ &= \frac{k}{2} \theta_4 \left(\frac{kz}{2}, q \right), \quad (q = e^{-k^2 Dt}) \end{aligned} \quad (12)$$

のような漸近形をもつ。ここで θ_4 は Jacobi のテータ関数である。

3. ランダムな底面形状変化

ここでは流体底面形状がランダムに変化する場合を考える。ただし簡単のため、 Γ は時間によらず一定としておく。モデル方程式は

$$u_t + \Gamma u_x - 4uu_x - Hu_{xx} = \gamma B_x, \quad u = u(x, t) \quad (13)$$

と書ける。底面形状の変化は平均0のガウス分布とする。すなわち

$$\langle B(x) \rangle = 0, \langle B(x)B(y) \rangle = 2D\delta(x-y) \quad (14)$$

BO 方程式と異なり (13) は一般には可積分とならないため、 u の平均値を求めるには何らかの近似計算を必要とするが、以下では $\gamma \ll 1$ の場合を考え、ランダムな底面形状変化がソリトンの伝播特性に与える影響を、ソリトンの摂動論により調べる。

A. ソリトンの摂動論

小さな摂動項を含む BO 方程式の摂動論 [2, 3] によると、摂動によって誘起されるソリトンの振幅、および位置の変化の時間発展は、 $O(\gamma)$ の近似で次のように書ける：

$$\frac{da}{dt} = -\frac{4\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_2 B_x dx \equiv -\frac{4\gamma}{\pi} (g_2, B_x) \quad (15)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \Gamma - a + \frac{4\gamma}{\pi} (g_1, B_x) \quad (16)$$

ここで

$$g_1 = \frac{x - \xi}{a^2(x - \xi)^2 + 1}, \quad g_2 = -\frac{a}{a^2(x - \xi)^2 + 1} \quad (17)$$

(15)、(16) を逐次的に解くために a 、および ξ を

$$a(t) = a_0 + \gamma a_1, \quad \xi(t) = \bar{\xi} + \gamma \xi_1 \quad (18)$$

のように γ のべきに展開する。ここで $\bar{\xi} = (\Gamma - a_0)t + \xi_0$ 。 (15) - (18) より

$$a_1 = -\frac{4}{\pi} \int_0^t (g_2^{(0)}, B_x) dt', \quad (g_2^{(0)} = g_2|_{\gamma=0}) \quad (19)$$

$$\xi_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^t dt' \int_0^{t'} (g_2^{(0)}, B_x) dt'' + \frac{4}{\pi} \int_0^t (g_1^{(0)}, B_x) dt' \quad (20)$$

を得る。

B. u の平均値

u の平均値は $O(\gamma)$ の近似の範囲で

$$\langle u(x, t) \rangle \sim \frac{1}{2} \langle (a_0 + \gamma a_1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik[\phi_0 + \gamma\{a_1(x - \bar{\xi}) - a_0\xi_1\}] - |k|} dk \rangle \quad (21)$$

と書ける。ただし $\phi_0 = a_0(x - \bar{\xi})$. ここで f, g が平均値 0 のガウス分布をもつ確率変数とするとき、

$$\langle e^f \rangle = e^{\frac{1}{2}\langle f^2 \rangle}, \quad \langle f e^g \rangle = \langle f g \rangle e^{\frac{1}{2}\langle g^2 \rangle} \quad (22)$$

等の公式が成り立つことに注意する。(19)、(20) を (21) へ代入し、(22) を用いて平均値を計算し、さらに公式 $(1 + \gamma \frac{\partial}{\partial x})f(x) = f(x + \gamma) + O(\gamma^2)$ を使うと最終的に

$$\langle u(x, t) \rangle \sim \frac{a_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(\phi_0 + \gamma^2 \phi_1) - |k| - \frac{1}{2}\gamma^2 b^2 k^2} dk \quad (23)$$

が導かれる。ここで

$$\phi_1 = \frac{\langle a_1^2 \rangle}{a_0} (x - \bar{\xi}) - \langle a_1 \xi_1 \rangle \quad (24)$$

$$b^2 = \langle a_1^2 \rangle (x - \bar{\xi})^2 - 2a_0 \langle a_1 \xi_1 \rangle (x - \bar{\xi}) + a_0^2 \langle \xi_1^2 \rangle \quad (25)$$

上式に現れる期待値 $\langle \xi_1^2 \rangle$ 、 $\langle a_1^2 \rangle$ 、 $\langle a_1 \xi_1 \rangle$ は (19)、(20) および (22) を使って具体的に評価でき、以下のようになる。

$$\langle \xi_1^2 \rangle = \frac{32D}{\pi} \frac{1}{a_0(\Gamma - a_0)^2} \left[\frac{1}{2} \frac{\tau^2}{(\Gamma - a_0)^2} + \frac{2(\Gamma - 2a_0)}{a_0(\Gamma - a_0)^2} \ln\left(1 + \frac{\tau^2}{4}\right) + \frac{\Gamma - 3a_0}{a_0^2(\Gamma - a_0)} \frac{\tau^2}{\tau^2 + 4} \right] \quad (26)$$

$$\langle a_1^2 \rangle = \frac{32D}{\pi} \frac{a_0}{(\Gamma - a_0)^2} \frac{\tau^2}{\tau^2 + 4} \quad (27)$$

$$\langle a_1 \xi_1 \rangle = -\frac{16D}{\pi} \frac{1}{(\Gamma - a_0)^3} \frac{\tau^3}{\tau^2 + 4} \quad (28)$$

ただしここで $\tau = a_0(\Gamma - a_0)t$ と置いた。これら表式は $t \rightarrow 0$ のとき

$$\langle \xi_1^2 \rangle \sim \frac{8D}{\pi a_0} t^2, \quad \langle a_1^2 \rangle \sim \frac{8Da_0^3}{\pi} t^2, \quad \langle a_1 \xi_1 \rangle \sim -\frac{4Da_0^3}{\pi} t^3 \quad (29)$$

また $t \rightarrow \infty$ のとき

$$\langle \xi_1^2 \rangle \sim \frac{16D}{\pi a_0(\Gamma - a_0)^2} t^2, \quad \langle a_1^2 \rangle \sim \frac{32D}{\pi} \frac{a_0}{(\Gamma - a_0)^2}, \quad \langle a_1 \xi_1 \rangle \sim -\frac{16D}{\pi} \frac{a_0}{(\Gamma - a_0)^2} t \quad (30)$$

となることに注意する。(30) を用いると、(23) の $t \rightarrow \infty$ (ただし $x - \bar{\xi} = \text{const.}$) における漸近形として

$$\langle u(x, t) \rangle \sim \sqrt{\frac{\pi a_0}{2 \bar{b} \gamma}} \exp \left[-\frac{(\phi_0 + \gamma^2 \bar{\phi}_1)^2}{2\gamma^2 \bar{b}^2} \right] \propto t^{-1} \quad (31)$$

が導かれる。ここで簡単のため

$$\tilde{\phi}_1 = \frac{16D}{\pi} \frac{a_0}{(\Gamma - a_0)^2} t, \quad \tilde{b} = \sqrt{\frac{8Da_0}{\pi}} t \quad (32)$$

と置いた。

4. ランダムな底面形状勾配変化

最後に流体底面の勾配が平均値0のガウス分布に従う場合を考える。ただし§3と同様に $\gamma \ll 1$ と仮定する。(14)に対応する式は今の場合

$$\langle B_x(x) \rangle = 0, \quad \langle B_x(x) B_y(y) \rangle = 2D\delta(x - y) \quad (33)$$

と書ける。摂動論による計算の手続きは§3と同様に行えるので、ここでは結果のみ記す。

u の平均値は(23)の形で与えられる。ただし(26) - (28)に対応する式は以下のようにになる。

$$\begin{aligned} \langle \xi_1^2 \rangle = & \frac{32D}{\pi a_0^3 (\Gamma - a_0)^4} \left[\frac{4}{3} \tau^2 + \frac{2}{3} (\tau^3 - 3\tau) \tan^{-1} \frac{\tau}{2} \right. \\ & \left. - (\tau^2 - \frac{2}{3}) \ln(1 + \frac{\tau^2}{4}) - \frac{2a_0 - \Gamma}{a_0} \tau^2 + 2 \left(\frac{2a_0 - \Gamma}{a_0} \right)^2 \left\{ \tau \tan^{-1} \frac{\tau}{2} - \ln(1 + \frac{\tau^2}{4}) \right\} \right] \end{aligned} \quad (34)$$

$$\langle a_1^2 \rangle = \frac{32D}{\pi a_0 (\Gamma - a_0)^2} \left[\tau \tan^{-1} \frac{\tau}{2} - \ln(1 + \frac{\tau^2}{4}) \right] \quad (35)$$

$$\langle a_1 \xi_1 \rangle = -\frac{32D}{\pi a_0^2 (\Gamma - a_0)^3} \left[\tau^2 \tan^{-1} \frac{\tau}{2} - \tau \ln(1 + \frac{\tau^2}{4}) \right] \quad (36)$$

$t \rightarrow 0$ のときこれらの式は

$$\langle \xi_1^2 \rangle \sim \frac{16D}{\pi a_0^3} \left(\frac{\Gamma + a_0}{\Gamma - a_0} \right)^2 t^2, \quad \langle a_1^2 \rangle \sim \frac{16a_0 D}{\pi} t^2, \quad \langle a_1 \xi_1 \rangle \sim -\frac{8a_0 D}{\pi} t^3 \quad (37)$$

と近似でき、また $t \rightarrow \infty$ では

$$\langle \xi_1^2 \rangle \sim \frac{32D}{3} \frac{t^3}{|\Gamma - a_0|}, \quad \langle a_1^2 \rangle \sim \frac{16D}{\Gamma - a_0} t, \quad \langle a_1 \xi_1 \rangle \sim -\frac{16D}{\Gamma - a_0} t^2 \quad (38)$$

なる漸近評価ができる。従って $t \rightarrow \infty$ (ただし $x - \bar{\xi} = \text{const.}$) において u の平均値は漸近形

$$\langle u(x, t) \rangle \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{a_0}{\tilde{b} \gamma} \exp \left[-\frac{(\phi_0 + \gamma^2 \tilde{\phi}_1)^2}{2\gamma^2 \tilde{b}^2} \right] \propto t^{-\frac{3}{2}} \quad (39)$$

をもつ。ただし

$$\tilde{\phi}_1 = \frac{16D}{\Gamma - a_0} t^2, \quad \tilde{b} = a_0 \sqrt{\frac{32D}{3|\Gamma - a_0|}} t^{\frac{3}{2}} \quad (40)$$

5. まとめ

ランダム媒質中の波動伝播の研究は古くから行われているが、それらは主として線形波動に関するものである。近年、非線形波動方程式の解法の急速な発展に伴い、ランダムな非線形波動の研究も盛んになってきた。ここでは外力項を含む BO 方程式をモデル方程式として、一様な流れ場や、流体底面形状等にランダムな変動要素が含まれる場合、これらのソリトンや周期波への影響を調べた。特にランダム場として、平均値 0 のガウス分布を仮定し、波動場の平均値を積分表示の形で具体的に求めた。またこれらの漸近評価を行い、初期波形はランダム場との相互作用の結果、ガウス型の波束に近づくことを示した。関連した仕事についてはすべて省略したが、これについては最近発行された著書 [4]、[5]、およびこれらの巻末につけられた文献が参考になる。

6. 参考文献

- [1] Y. Matsuno, Phys. Rev. **E52**, 6333 (1995).
- [2] Y. Matsuno, Phys. Rev. Lett. **73**, 1316 (1994).
- [3] Y. Matsuno, Phys. Rev. **E51**, 1471 (1995).
- [4] V.V. Konotop and L. Vázquez, *Nonlinear Random Waves* (World Scientific, Singapore, 1994).
- [5] F. Abdullaev, *Theory of Solitons in Inhomogeneous Media* (Wiley, New York, 1994).