

安島直円「円内容累円術」について

藤井康生 (Yasuo Fujii)

1 はじめに

安島直円は「円内容累円術」(左右対称の場合天明 4 年 (1784), 一般の場合寛政 3 年 (1791)) の中で内外の円があり, その間に環状に甲円, 乙円, 丙円, 丁円... を容れる. 外, 内, 甲円の直径を与えて乙円, 丙円, 丁円... の直径を求める問題の解を述べている. 安島の出した結論は, 累円の個数を角数とする正多角形の二距斜率を求める. するとこの二距斜率から累円の直径を求める事ができると述べている. この問題は松永良弼「算法全経 (廉術)」や有馬頼懂『拾璣算法』においてすでに取り上げられており累円の直径を求める漸化式も載せられている. 安島直円はこれらの結果を踏まえて, 「廉術変換」でその元となる, 外, 内, 甲, 乙円の直径の間の関係を一般に述べている. 「円内容累円術」において安島直円が述べようとしたことは $東 = \frac{4 \times 内 \times 外}{(外 - 甲)(丙 + 甲)}$ が二距斜率に等しいことである. 従来安島直円の「円内容累円術」は加藤平左衛門氏の『和算ノ研究 雑論 II』に述べられているように, 東の高次方程式を求め, これが二距斜率の式と同じになることを述べたものであるとされていたと思われる. 安島直円は東が二距斜率になることを, 証明しようとして「円内容累円術」において東を 3 円の場合より順に計算していったことは確かであるが, 安島直円が述べている結論は二距斜率は級数によって求められることがわかっているのだから, 先に触れた漸化式によらず, 二距斜率によって累円の直径が求められることを述べている. 累距斜を級数を用いて表すことは, 松永良弼「方円算法」から始まっている. これは級数の研究が松永良弼から有馬頼懂, 安島直円へと発展していったことが窺われる興味深いものである. 本稿では安島直円「円内容累円術」 「後編」について, 本文の順序にしたがって概説していく.

2 起源

仮如外径云内径云甲径云欲求乙丙丁及其次々円径者依廉術求得乙率而丙率而丁率及次々各率為法以甲径為通実以所求法除之得其円径

外円の内に内円があり, 甲円, 乙円, 丙円, 丁円... を外円, 内円に接し, 互いに接するように入れる.

外円, 内円, 甲円の直径を与えて, 乙円, 丙円, 丁円... の直径を求めよ.

廉術によって乙率, 丙率, 丁率... を求めて法とする. 甲円の直径を通実として,

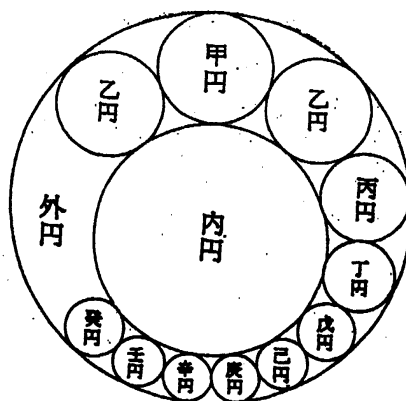
$\frac{通実}{乙率}$ が乙円の直径である. 丙円, 丁円... の直径も同様にして求められる.

麻術より

$$\text{寄位} = (\text{外} - \text{甲})(\text{内} + \text{甲}) \quad \text{増率} = \frac{2(\text{外} - \text{内}) \text{甲}}{\text{寄位}} \quad \text{因法} = \text{東} - 2$$

$$\text{乙率} = \text{増率} + \text{因法} \quad \text{東} = \frac{4 \text{内} \times \text{外}}{\text{寄位}} \quad \text{増率} = \text{乙率} - \text{因法}$$

$$\text{増率} = 2 \text{乙率} - \text{東} + 2$$



各率を求める

$$\text{甲率} = 1$$

$$\text{丙率} = \text{乙率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{甲率} = \text{乙率}(\text{東} - 2) + \text{増率} - 1 = \text{乙率} \times \text{東} - \text{因法} - 1$$

$$\text{丙率} = \text{乙率} \times \text{東} - \text{東} + 1 = \text{東} \times \text{冬} + 1 \quad \text{冬} = \text{乙率} - 1$$

$$\text{丁率} = \text{丙率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{乙率} = (\text{東} \times \text{冬} + 1)(\text{東} - 2) + \text{増率} - \text{乙率}$$

$$= \text{東}^2 \times \text{冬} + \text{東} - 2 \text{東} \times \text{冬} - 2 + \text{増率} - \text{乙率}$$

$$= \text{東}^2 \times \text{冬} - 2 \text{東} \times \text{冬} + \text{乙率}$$

$$\text{戊率} = \text{丁率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{丙率}$$

$$= (\text{東}^2 \times \text{冬} - 2 \text{東} \times \text{冬} + \text{乙率})(\text{東} - 2) + 2 \text{乙率} - \text{東} + 2 - \text{東} \times \text{冬} - 1$$

$$= \text{東}^3 \times \text{冬} - 4 \text{東}^2 \times \text{冬} + 3 \text{東} \times \text{冬} + \text{東} \times \text{乙率} - \text{東} + 1$$

$$= \text{東}^3 \times \text{冬} - 4 \text{東}^2 \times \text{冬} + 4 \text{東} \times \text{冬} + 1$$

$$\text{己率} = \text{戊率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{丁率}$$

$$= (\text{東}^3 \times \text{冬} - 4 \text{東}^2 \times \text{冬} + 4 \text{東} \times \text{冬} + 1)(\text{東} - 2) + 2 \text{乙率} - \text{東} + 2 - \text{東}^2 \times \text{冬} + 2 \text{東} \times \text{冬} - \text{乙率}$$

$$= \text{東}^4 \times \text{冬} - 6 \text{東}^3 \times \text{冬} + 11 \text{東}^2 \times \text{冬} - 6 \text{東} \times \text{冬} + \text{乙率}$$

$$\text{庚率} = \text{己率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{戊率}$$

$$= (\text{東}^4 \times \text{冬} - 6 \text{東}^3 \times \text{冬} + 11 \text{東}^2 \times \text{冬} - 6 \text{東} \times \text{冬} + \text{乙率})(\text{東} - 2) + (2 \text{乙率} - \text{東} + 2)$$

$$- (\text{東}^2 \times \text{冬} - 4 \text{東}^2 \times \text{冬} + 4 \text{東} \times \text{冬} + 1)$$

$$= \text{東}^5 \times \text{冬} - 8 \text{東}^4 \times \text{冬} + 22 \text{東}^3 \times \text{冬} - 24 \text{東}^2 \times \text{冬} + 8 \text{東} \times \text{冬} + 1 + \text{東}(\text{乙率} - 1)$$

$$= \text{東}^5 \times \text{冬} - 8 \text{東}^4 \times \text{冬} + 22 \text{東}^3 \times \text{冬} - 24 \text{東}^2 \times \text{冬} + 9 \text{東} \times \text{冬} + 1$$

$$\text{辛率} = \text{庚率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{己率}$$

$$= (\text{東}^5 \times \text{冬} - 8 \text{東}^4 \times \text{冬} + 22 \text{東}^3 \times \text{冬} - 24 \text{東}^2 \times \text{冬} + 9 \text{東} \times \text{冬} + 1)(\text{東} - 2) + (2 \text{乙率} - \text{東} + 2)$$

$$-(東^4 \times 冬 - 6 東^3 \times 冬 + 11 東^2 \times 冬 - 6 東 \times 冬 + 乙率)$$

$$= 東^6 \times 冬 - 10 東^5 \times 冬 + 37 東^4 \times 冬 - 62 東^3 \times 冬 + 46 東^2 \times 冬 - 12 東 \times 冬 + 乙率$$

$$壬率 = 辛率 \times 因法 + 増率 - 庚率$$

$$= (東^6 \times 冬 - 10 東^5 \times 冬 + 37 東^4 \times 冬 - 62 東^3 \times 冬 + 46 東^2 \times 冬 - 12 東 \times 冬 + 乙率)(東 - 2)$$

$$+ (2 乙率 - 東 + 2) - (東^5 \times 冬 - 8 東^4 \times 冬 + 22 東^3 \times 冬 - 24 東^2 \times 冬 + 9 東 \times 冬 + 1)$$

$$= 東^7 \times 冬 - 12 東^6 \times 冬 + 56 東^5 \times 冬 - 128 東^4 \times 冬 + 148 東^3 \times 冬 - 80 東^2 \times 冬$$

$$+ 16 東 \times 冬 + 1$$

$$癸率 = 壬率 \times 因法 + 増率 - 辛率$$

$$= 東^8 \times 冬 - 14 東^7 \times 冬 + 79 東^6 \times 冬 - 230 東^5 \times 冬 + 367 東^4 \times 冬$$

$$- 314 東^3 \times 冬 + 130 東^2 \times 冬 - 20 東 \times 冬 + 乙率$$

個別の場合について

$$3 円 の とき, 丙率 = 乙率$$

$$東 \times 冬 + 乙率 = 東 \times 冬 - 冬 = 冬(東 - 1) = 0$$

$$東 - 1 = 0$$

$$4 円 の とき, 丁率 = 乙率$$

$$東^2 \times 冬 - 2 東 \times 冬 = 東 \times 冬(東 - 2) = 0$$

$$東 - 2 = 0$$

$$5 円 の とき, 丁率 = 丙率$$

$$東^2 \times 冬 - 2 東 \times 冬 + 乙率 = 東 \times 冬 + 1$$

$$冬(東^2 - 3 東 + 1) = 0 \quad 東^2 - 3 東 + 1 = 0$$

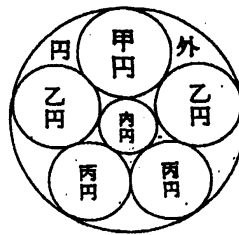
$$6 円 の とき, 戊率 = 丙率$$

$$東^3 \times 冬 - 4 東^2 \times 冬 + 3 東 \times 冬 + 東 \times 乙率 - 東 + 1 = 東 \times 冬 + 1$$

$$東 \times 冬(東^2 - 4 東 + 3) = 0$$

$$東^2 - 4 東 + 3 = 0$$

$$7 円 の とき, 戊率 = 丁率$$



$$\text{東}^3 \times \text{冬} - 4 \text{東}^2 \times \text{冬} + 3 \text{東} \times \text{冬} + \text{東} \times \text{乙率} - \text{東} + 1$$

$$= \text{東}^2 \times \text{冬} - 2 \text{東} \times \text{冬} + \text{乙率}$$

$$\text{冬} (\text{東}^3 - 5 \text{東}^2 + 6 \text{東} - 1) = 0$$

$$\text{東}^3 - 5 \text{東}^2 + 6 \text{東} - 1 = 0$$

8 円するとき, 己率 = 丁率

$$\text{東}^4 \times \text{冬} - 6 \text{東}^3 \times \text{冬} + 11 \text{東}^2 \times \text{冬} - 6 \text{東} \times \text{冬} + \text{乙率}$$

$$= \text{東}^2 \times \text{冬} - 3 \text{東} \times \text{冬} + \text{乙率}$$

$$\text{東} \times \text{冬} (\text{東}^3 - 6 \text{東}^2 + 10 \text{東} - 4) = 0$$

$$\text{東}^3 - 6 \text{東}^2 + 10 \text{東} - 4 = 0$$

9 円するとき, 己率 = 戊率

$$\text{東}^4 \times \text{冬} - 6 \text{東}^3 \times \text{冬} + 11 \text{東}^2 \times \text{冬} - 6 \text{東} \times \text{冬} + \text{乙率}$$

$$= \text{東}^3 \times \text{冬} - 4 \text{東}^2 \times \text{冬} + 4 \text{東} \times \text{冬} + 1$$

$$\text{東}^4 - 7 \text{東}^3 + 15 \text{東}^2 - 10 \text{東} + 1 = 0$$

10 円するとき, 庚率 = 戊率

$$\text{東}^5 \times \text{冬} - 8 \text{東}^4 \times \text{冬} + 22 \text{東}^3 \times \text{冬} - 24 \text{東}^2 \times \text{冬} + 9 \text{東} \times \text{冬} + 1$$

$$= \text{東}^3 \times \text{冬} - 4 \text{東}^2 \times \text{冬} + 4 \text{東} \times \text{冬} + 1$$

$$\text{東}^4 - 8 \text{東}^3 + 21 \text{東}^2 - 20 \text{東} + 5 = 0$$

11 円するとき, 庚率 = 己率

$$\text{東}^5 \times \text{冬} - 8 \text{東}^4 \times \text{冬} + 22 \text{東}^3 \times \text{冬} - 24 \text{東}^2 \times \text{冬} + 9 \text{東} \times \text{冬} + 1$$

$$= \text{東}^4 \times \text{冬} - 6 \text{東}^3 \times \text{冬} + 11 \text{東}^2 \times \text{冬} - 6 \text{東} \times \text{冬} + \text{乙率}$$

$$\text{東}^5 - 9 \text{東}^4 + 28 \text{東}^3 - 35 \text{東}^2 + 15 \text{東} - 1 = 0$$

12 円するとき, 辛率 = 己率

$$\text{東}^6 \times \text{冬} - 10 \text{東}^5 \times \text{冬} + 37 \text{東}^4 \times \text{冬} - 62 \text{東}^3 \times \text{冬} + 46 \text{東}^2 \times \text{冬} - 12 \text{東} \times \text{冬} + \text{乙率}$$

$$= \text{東}^4 \times \text{冬} - 6 \text{東}^3 \times \text{冬} + 11 \text{東}^2 \times \text{冬} - 6 \text{東} \times \text{冬} + \text{乙率}$$

$$\text{東}^5 - 10 \text{東}^4 + 36 \text{東}^3 - 56 \text{東}^2 + 35 \text{東} - 6 = 0$$

13円するとき、辛率 = 庚率

$$\begin{aligned} & \text{東}^6 \times \text{冬} - 10 \text{東}^5 \times \text{冬} + 37 \text{東}^4 \times \text{冬} - 62 \text{東}^3 \times \text{冬} + 46 \text{東}^2 \times \text{冬} - 12 \text{東} \times \text{冬} + \text{乙率} \\ &= \text{東}^5 \times \text{冬} - 8 \text{東}^4 \times \text{冬} + 22 \text{東}^3 \times \text{冬} - 24 \text{東}^2 \times \text{冬} + 9 \text{東} \times \text{冬} + 1 \\ &\text{東}^6 - 11 \text{東}^5 + 45 \text{東}^4 - 84 \text{東}^3 + 70 \text{東}^2 - 21 \text{東} + 1 = 0 \end{aligned}$$

14円するとき、壬率 = 庚率

$$\begin{aligned} & \text{東}^7 \times \text{冬} - 12 \text{東}^6 \times \text{冬} + 56 \text{東}^5 \times \text{冬} - 128 \text{東}^4 \times \text{冬} + 148 \text{東}^3 \times \text{冬} - 80 \text{東}^2 \times \text{冬} + 16 \text{東} \times \text{冬} + 1 \\ &= \text{東}^5 \times \text{冬} - 8 \text{東}^4 \times \text{冬} + 22 \text{東}^3 \times \text{冬} - 24 \text{東}^2 \times \text{冬} + 9 \text{東} \times \text{冬} + 1 \\ &\text{東}^6 - 12 \text{東}^5 + 55 \text{東}^4 - 120 \text{東}^3 + 126 \text{東}^2 - 56 \text{東} + 7 = 0 \end{aligned}$$

15円するとき、壬率 = 辛率

$$\begin{aligned} & \text{東}^7 \times \text{冬} - 12 \text{東}^6 \times \text{冬} + 56 \text{東}^5 \times \text{冬} - 128 \text{東}^4 \times \text{冬} + 148 \text{東}^3 \times \text{冬} - 80 \text{東}^2 \times \text{冬} + 16 \text{東} \times \text{冬} + 1 \\ &= \text{東}^6 \times \text{冬} - 10 \text{東}^5 \times \text{冬} + 37 \text{東}^4 \times \text{冬} - 62 \text{東}^3 \times \text{冬} + 46 \text{東}^2 \times \text{冬} - 12 \text{東} \times \text{冬} + \text{乙率} \\ &\text{東}^7 - 12 \text{東}^6 + 55 \text{東}^4 - 120 \text{東}^3 + 126 \text{東}^2 - 56 \text{東} + 7 = 0 \end{aligned}$$

16円するとき、癸率 = 辛率

$$\begin{aligned} & \text{東}^8 \times \text{冬} - 14 \text{東}^7 \times \text{冬} + 79 \text{東}^6 \times \text{冬} - 230 \text{東}^5 \times \text{冬} + 367 \text{東}^4 \times \text{冬} - 314 \text{東}^3 \times \text{冬} + 130 \text{東}^2 \times \text{冬} \\ & - 20 \text{東} \times \text{冬} + \text{乙率} \\ &= \text{東}^6 \times \text{冬} - 10 \text{東}^5 \times \text{冬} + 37 \text{東}^4 \times \text{冬} - 62 \text{東}^3 \times \text{冬} + 46 \text{東}^2 \times \text{冬} - 12 \text{東} \times \text{冬} + \text{乙率} \\ &\text{東}^9 - 14 \text{東}^8 + 78 \text{東}^6 - 220 \text{東}^5 + 330 \text{東}^4 - 252 \text{東}^3 + 84 \text{東}^2 - 8 \end{aligned}$$

東について

$$6 \text{円} \quad (\text{東}^2 - 4 \text{東} + 3) \div (\text{東} - 1) = \text{東} - 3$$

$$8 \text{円} \quad (\text{東}^3 - 6 \text{東}^2 + 10 \text{東} - 4) \div (\text{東} - 2) = \text{東}^2 - 4 \text{東} - 2$$

$$10 \text{円} \quad (\text{東}^4 - 8 \text{東}^3 + 21 \text{東}^2 - 20 \text{東} + 5) \div (\text{東}^2 - 3 \text{東} + 1) = \text{東}^2 - 5 \text{東} + 5$$

$$12 \text{円} \quad (\text{東}^5 - 10 \text{東}^4 + 36 \text{東}^3 - 56 \text{東}^2 + 35 \text{東} - 6) \div (\text{東}^2 - 4 \text{東} + 3) = \text{東}^3 - 6 \text{東}^2 + 9 \text{東} - 2$$

$$\begin{aligned} 14 \text{円} \quad & (\text{東}^6 - 12 \text{東}^5 + 55 \text{東}^4 - 120 \text{東}^3 + 126 \text{東}^2 - 56 \text{東} + 7) \div (\text{東}^3 - 5 \text{東}^2 + 6 \text{東} - 1) \\ &= \text{東}^3 - 7 \text{東}^2 + 14 \text{東} - 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16 \text{円} \quad & (\text{東}^7 - 14 \text{東}^6 + 78 \text{東}^5 - 220 \text{東}^4 + 330 \text{東}^3 - 252 \text{東}^2 + 84 \text{東} - 8) \div (\text{東}^3 - 6 \text{東}^2 + 10 \text{東} - 4) \\ &= \text{東}^4 - 8 \text{東}^3 + 20 \text{東}^2 - 16 \text{東} + 2 \end{aligned}$$

	8級	7級	6級	5級	4級	3級	2級	1級
3円							-1	1
4円							-2	1
5円						1	-3	1
6円						3	-4	1
7円					-1	6	-5	1
8円					-4	10	-6	1
9円				1	-10	15	-7	1
10円				5	-20	21	-8	1
11円			-1	15	-35	28	-9	1
12円			-6	35	-56	36	-10	1
13円		1	-27	70	-84	45	-11	1
14円		7	-56	126	-120	55	-12	1
15円	-1	28	-126	210	-165	66	-13	1
16円	-8	84	-252	330	-220	78	-14	1

表 1: 東の係数

	5級	4級	3級	2級	1級
4円				-2	1
6円				-3	1
8円			2	-4	1
10円			5	-5	1
12円		-2	9	-6	1
14円		-7	14	-7	1
16円	2	-16	20	-8	1

表 2: 偶数個の場合

奇数個の場合について

$$\text{原数} = (\text{円数}) - 2 = n - 2 \quad \text{一差} = (\text{原数}) - 1 = n - 3$$

$$\text{二差} = (\text{一差}) - 1 = n - 4 \quad \text{三差} = (\text{二差}) - 1 = n - 5$$

$$1 \text{ 級数 } 1$$

$$2 \text{ 級数 } \text{原数} = n - 1$$

$$3 \text{ 級数 } \frac{(\text{一差})(\text{二差})}{2} = \frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

$$4 \text{ 級数 } \frac{(3 \text{ 級数})(\text{三差})(\text{四差})}{3(\text{一差})} = \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{2 \times 3}$$

	8級	7級	6級	5級	4級	3級	2級	1級
3円							-1	1
5円						1	-3	1
7円					-1	6	-5	1
9円				1	-10	15	-7	1
11円			-1	15	-35	28	-9	1
13円		1	-21	70	-84	45	-11	1
15円	-1	28	-126	210	-165	66	-13	1

表 3: 奇数個の場合

$$5 \text{ 級数 } \frac{(4 \text{ 級数})(5 \text{ 差})(6 \text{ 差})}{4(2 \text{ 差})} = \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{2 \times 3 \times 4}$$

$$6 \text{ 級数 } \frac{(5 \text{ 級数})(7 \text{ 差})(8 \text{ 差})}{5(3 \text{ 差})} = \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{2 \times 3 \times 4 \times 5}$$

偶数個の場合につて

$$\text{原数} = \frac{\text{円数}}{2} = \frac{n}{2} \quad \text{一差} = (\text{原数}) - 3 = \frac{n}{2} - 3$$

$$1 \text{ 級数 } 1$$

$$2 \text{ 級数 } \text{原数} = \frac{n}{2}$$

$$3 \text{ 級数 } \frac{(2 \text{ 級数})(1 \text{ 差})}{2} = \frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2} - 3)}{2}$$

$$4 \text{ 級数 } \frac{(3 \text{ 級数})(2 \text{ 差})(3 \text{ 差})}{3(1 \text{ 差})} = \frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2} - 4)(\frac{n}{2} - 5)}{2 \times 3}$$

$$5 \text{ 級数 } \frac{(4 \text{ 級数})(4 \text{ 差})(5 \text{ 差})}{4(2 \text{ 差})} = \frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2} - 5)(\frac{n}{2} - 6)(\frac{n}{2} - 7)}{2 \times 3 \times 4}$$

$$6 \text{ 級数 } \frac{(5 \text{ 級数})(6 \text{ 差})(5 \text{ 差})}{5(3 \text{ 差})} = \frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2} - 6)(\frac{n}{2} - 7)(\frac{n}{2} - 8)(\frac{n}{2} - 9)}{2 \times 3 \times 4 \times 5}$$

直求徑式

$$9 \text{ 円 } \text{東}^4 - 7 \text{ 東}^3 + 15 \text{ 東}^2 - 10 \text{ 東} + 1 = 0$$

$$3 \text{ 円 } \text{東} - 1 = 0$$

$$(9 \text{ 円}) \div (3 \text{ 円}) \quad 9 \text{ 円 } \text{東}^3 - 6 \text{ 東}^2 + 9 \text{ 東} - 1$$

$$12 \text{ 円 } \text{東}^3 - 6 \text{ 東}^2 + 9 \text{ 東} - 2 \text{ 東} - 2$$

$$(12 \text{ 円}) \div (4 \text{ 円}) \quad \text{東}^2 - 4 + 1$$

$$15円 \quad 東^7 - 13 東^6 + 66 東^5 - 165 東^4 + 210 東^3 - 126 東^2 + 28 東 - 1$$

$$(15円) \div (3円) \quad 東^6 - 12 東^5 + 54 東^4 - 111 東^3 + 99 東^2 - 27 東 + 1$$

$$(15円) \div (5円) \quad 東^4 - 9 東^3 + 26 東^2 - 24 東 + 1$$

東を得た後

$$(外 - 甲)(内 + 甲) 東 = 4 内 \times 外$$

$$内 \times 外 \times 東 - 内 \times 甲 \times 東 + 外 \times 甲 \times 東 - 甲^2 東 = 4 内 \times 外$$

$$内 \times 外 - 内 \times 甲 + 外 \times 甲 - 甲^2 - \frac{4 内 \times 外}{東} = 0$$

外, 内より甲を求める式

$$内 \times 外 - \frac{4 内 \times 外}{東} + (外 - 内) 甲 - 甲^2 = 0$$

外, 甲より内を求める式

$$外 \times 甲 - 甲^2 + (外 - 甲 - \frac{4 外}{東}) 内 = 0$$

内, 甲より外を求める式

$$-内 \times 甲 - 甲^2 + (内 + 甲 - \frac{4 内}{東}) 外 = 0$$

$$\frac{1}{東} = \frac{(外 - 甲)(内 + 甲)}{4 内 \times 外}$$

補足 東に関する注記

どのようにして $東 = \frac{4 外 \times 内}{(外 - 甲)(内 + 甲)}$ が二距斜率率になると考えたか

円に内接する正三角形を考える. 1 辺を a , 二距斜を a_2 , 円の直径を R , 矢を c , とする.

$$a : c = R : a \quad c = \frac{a^2}{R}$$

$$\frac{a_2}{2} : c = R - c : \frac{a_2}{2} \quad (\frac{a_2}{2})^2 = c(R - c) = \frac{a^2}{R}(R - \frac{a^2}{R})$$

$$(\frac{a_2}{a})^2 = 4 \frac{R^2 - a^2}{R^2}$$

円に直径の等しい円が内接および外接する場合を考える. $R = 外 - 甲$, $R = 内 + 甲$ より

$$(\frac{a_2}{a})^2 = 4 \frac{(外 - 2 甲) 外}{(外 - 甲)^2}$$

$$(\frac{a_2}{a})^2 = 4 \frac{(内 + 2 甲) 内}{(内 + 甲)^2}$$

上記のような考察から東が二距斜率率になることが考えられたのではないかと思われる.

3 甲円が2個並んでいる時、同様に各率を求める

廉術より

$$\text{寄位} = (\text{外} - \text{矢})(\text{内} + \text{矢}) \quad \text{増率} = \frac{2(\text{外} - \text{内}) \text{甲}}{\text{位}} \quad \text{因法} = \text{東} - 2$$

$$\text{東} = \frac{4 \text{内} \times \text{外}}{\text{位}} \quad \text{冬} = \text{増率} + \text{因法} \quad \text{江} = \text{冬} - 2$$

$$\text{増率} = \text{冬} - \text{東} + 2 \quad \text{甲率} = 1$$

$$\text{乙率} = \text{甲率} \times \text{因法} + \text{増率} = \text{甲率} = \text{冬} - 1$$

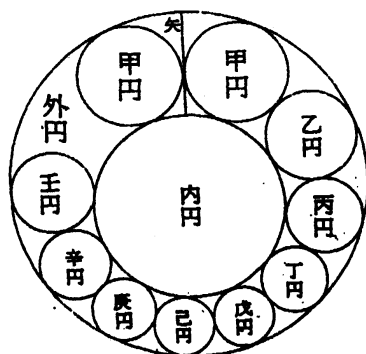
$$\text{丙率} = \text{乙率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{甲率} = (\text{冬} - 1)(\text{東} - 2) * (\text{冬} - \text{東} + 2) - 1$$

$$= \text{東} \times \text{冬} - \text{冬} - 2 \text{東} + 3 = \text{東} \times \text{江} - \text{江} + 1$$

$$\text{丁率} = \text{丙率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{乙率} = \text{東}^2 \times \text{江} - 3 \text{東} \times \text{江} + 2 \text{江} + 1$$

$$\text{戊率} = \text{丁率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{丙率} = \text{東}^3 \times \text{江} - 5 \text{東}^2 \times \text{江} + 7 \text{東} \times \text{江} - 3 \text{江} + \text{冬} - 1$$

$$\text{己率} = \text{戊率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{丁率} = \text{東}^4 \times \text{江} - 7 \text{東}^3 \times \text{江} + 16 \text{東}^2 \times \text{江} - 13 \text{東} \times \text{江} + 3 \text{江} + 1$$



個別の場合について

$$3 \text{ 円のとき, 甲率} = \text{丙率} \quad \text{東} \times \text{江} - \text{江} + 1 = 1 \quad \text{東} \times \text{江} - \text{江} = 0 \quad \text{東} - 1 = 0$$

$$4 \text{ 円のとき, 乙率} = \text{丙率} \quad \text{東} \times \text{江} - \text{江} + 1 = \text{冬} - 1 \quad \text{東} \times \text{江} - \text{江} - \text{冬} + 2 = 0$$

$$\text{東} \times \text{江} - 2 \text{江} = 0 \quad \text{東} - 2 = 0$$

$$5 \text{ 円のとき, 乙率} = \text{丁率} \quad \text{東}^2 \times \text{江} - 3 \text{東} \times \text{江} + 2 \text{江} + 1 = \text{冬} - 1$$

$$\text{東}^2 \times \text{江} - 3 \text{東} \times \text{江} + 2 \text{江} - \text{冬} + 2 = 0 \quad \text{東}^2 \times \text{江} - 3 \text{東} \times \text{江} + \text{江} = 0 \quad \text{東}^2 - 3 \text{東} + 1 = 0$$

$$6 \text{ 円のとき, 丙率} = \text{丁率} \quad \text{東}^2 \times \text{江} - 3 \text{東} \times \text{江} + 2 \text{江} + 1 = \text{東} \times \text{江} - \text{江} + 1$$

$$\text{東}^2 \times \text{江} - 4 \text{東} \times \text{江} + 3 \text{江} = 0 \quad \text{東}^2 - 4 \text{東} + 3 = 0$$

$$7 \text{ 円のとき, 丙率} = \text{戊率}$$

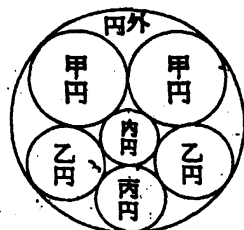
$$\text{東}^3 \times \text{江} - 5 \text{東}^2 \times \text{江} + 7 \text{東} \times \text{江} - 3 \text{江} + \text{冬} - 1 = \text{東} \times \text{江} - \text{江} + 1$$

$$\text{東}^3 \times \text{江} - 5 \text{東}^2 \times \text{江} + 6 \text{東} \times \text{江} - 2 \text{江} + \text{冬} - 2 = 0 \quad \text{東}^3 - 5 \text{東}^2 + 6 \text{東} - 1 = 0$$

$$8 \text{ 円のとき, 丁率} = \text{戊率}$$

$$\text{東}^3 \times \text{江} - 5 \text{東}^2 \times \text{江} + 7 \text{東} \times \text{江} - 3 \text{江} + \text{冬} - 1 = \text{東}^2 \times \text{江} - 3 \text{東} \times \text{江} + 2 \text{江} + 1$$

$$\text{東}^3 \times \text{江} - 6 \text{東}^2 \times \text{江} + 10 \text{東} \times \text{江} - 5 \text{江} + \text{冬} - 2 = 0 \quad \text{東}^3 - 6 \text{東}^2 + 10 \text{東} - 4 = 0$$



	4級	3級	2級	1級
3円			-1	1
4円			-2	1
5円		1	-3	1
6円		3	-4	1
7円	-1	6	-5	1
8円	-4	10	-6	1

表 4: 東を求める式

東を得た後

$$(外 - 矢)(内 + 矢) 東 = 4 内 \times 外$$

$$内 \times 外 \times 東 + 外 \times 矢 \times 東 - 矢 \times 内 \times 東 - 矢^2 \times 東 - 4 内 \times 外 = 0 \quad \text{前空式}$$

$$子 = 外 - 甲 \quad 丑 = 内 + 甲 \quad 外 - 内 - 矢 = 余矢$$

次に矢を消去する

$$子^2 - 甲^2 = (外 - 甲)^2 - 甲^2 = 外^2 - 2 外 \times 甲 = 寅^2$$

$$丑^2 - 甲^2 = (内 + 甲)^2 - 甲^2 = 内^2 + 2 内 \times 甲 = (寅 + 卯)^2$$

$$卯 = 矢 - 余矢 = 外 - 内 - 2 余矢 = (外 - 内 - 余矢) - 余矢 = -外 + 内 + 2 矢$$

$$(寅 + 卯)^2 + 寅^2 - 卯^2 = 2 寅^2 + 2 寅 \times 卯 = 内^2 + 2 内 \times 甲 + 外^2 - 2 外 \times 甲 - (-外 + 内 + 2 矢)^2$$

$$= 2 内 \times 甲 - 2 外 \times 甲 + 2 外 \times 内 + 4 外 \times 矢 - 4 内 \times 矢 - 4 矢^2$$

$$-外 \times 甲 + 内 \times 甲 + 内 \times 外 + 2 外 \times 矢 - 2 内 \times 矢 - 2 矢^2 = (寅 + 卯) 寅$$

$$-外 \times 甲 \times 東 + 内 \times 甲 \times 東 + 内 \times 外 \times 東 + 2 外 \times 矢 \times 東 - 2 内 \times 矢 \times 東 - 2 矢^2 \times 東$$

$$= (寅 + 卯) 寅 \times 東$$

$$(上式) - (前空式)$$

$$-外 \times 甲 \times 東 + 内 \times 甲 \times 東 - 内 \times 外 \times 東 + 8 内 \times 外 = (寅 + 卯) 寅 \times 東$$

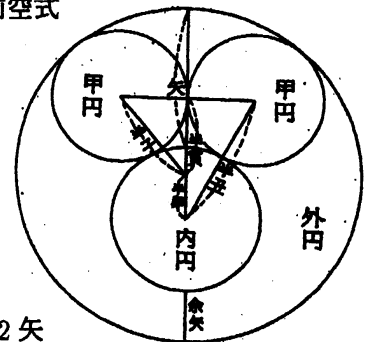
$$-(外 - 内) 甲 \times 東 - 内 \times 外 \times 東 + 8 内 \times 外 = (寅 + 卯) 寅 \times 東$$

$$上式を2乗すると, \{(寅 + 卯) 寅 \times 東\}^2 = (寅 + 卯)^2 寅^2 \times 東^2 \quad \text{より}$$

$$4 内 \times 外 \times 甲^2 \times 東 + (外 - 内)^2 甲^2 \times 東^2 - 16(外 - 内) 内 \times 外 \times 甲 \times 東$$

$$-16 内^2 \times 外^2 \times 東 + 64 内^2 \times 外^2 = 0$$

$$(外 + 内)^2 甲^2 \times 東^2 - 16(外 - 内) 内 \times 外 \times 甲 \times 東 - 16 内^2 \times 外^2 \times 東 + 64 内^2 \times 外^2 = 0$$



外、内より甲を求める

$$64 \text{ 内}^2 \times \text{外}^2 - 16 \text{ 内}^2 \times \text{外}^2 \times \text{東} + \{-16(\text{外} - \text{内}) \text{ 内} \times \text{外} \times \text{東}\} \text{ 甲} + (\text{外} + \text{内})^2 \text{ 東}^2 \times \text{甲}^2 = 0$$

外、甲より内を求める

$$\begin{aligned} & \text{外}^2 \times \text{甲}^2 \times \text{東}^2 + \{2 \text{ 外} \times \text{甲}^2 \times \text{東}^2 - 16 \text{ 外}^2 \times \text{甲} \times \text{東}\} \text{ 内} \\ & + \{\text{甲}^2 \times \text{東}^2 + 16 \text{ 外} \times \text{甲} \times \text{東} - 16 \text{ 外}^2 \times \text{東} + 64 \text{ 外}^2\} \text{ 内}^2 = 0 \end{aligned}$$

東を求める式は円数を角数とした時の二距斜巾を求める式と同じ。

術文 術曰以四個為原數置周法冪四之為負一差置一差乘周法冪四之得數三除四除之為正二差置二差乘周法冪四之得數五除六除之、為負三差置三差乘周法冪四之得數七除八除之為正四差置四差乘周法冪四之得數九除一十除之為負五差余倣之次第如此求之即為求東表所求表出于此

原數正四個

一差負三十九個四七八四一七六〇四三五七四

二差正一百二十九個八七八七八八〇四五三

三差負一百七十〇個九一三六二一六一三

四差正一百二十〇個四八九二八二五六

五差負五十二個八五二四二八八

六差正一十五個八〇七〇四七

七差負三個四二八七八

求東術曰置七差以円数冪除之得數以減六差余以円数冪除之得數以減五差余以円数冪除之得數以減四差余以円数冪除之得數以減三差余以円数冪除之得數以減二差余以円数冪除之得數以減一差余以円数冪除之得數以減原數余得東

仮如円数三者依定式得東一個整

以表求之得一個〇〇〇〇〇〇〇〇六 九位合

乃円数一十者用五差則一十一位合矣 円数三十者用三差則一十位合矣

故円数愈多則用差數愈少而足故隨題而当用差數而已

東を求める式

$$\text{原数} = 4 \quad \text{一差} = 4(\text{周法})^2 \quad \text{二差} = \frac{(-\text{一差})4(\text{周法})^2}{3 \times 4} = \frac{16(\text{周法})^4}{3 \times 4}$$

$$\text{三差} = \frac{(\text{二差})4(\text{周法})^2}{5 \times 6} \quad \text{四差} = \frac{(\text{三差})4(\text{周法})^2}{7 \times 8} \quad \text{五差} = \frac{(\text{四差})4(\text{周法})^2}{9 \times 10}$$

$$\text{東} = \text{原数} - [\text{一差} - [\text{二差} - [\text{三差} - [\text{四差} - [\text{五差} - [\text{六差} - \frac{\text{七差}}{(\text{円数})^2}]]]] \frac{1}{(\text{円数})^2}]$$

$$\frac{1}{(\text{円数})^2}] \frac{1}{(\text{円数})^2}] \frac{1}{(\text{円数})^2}] \frac{1}{(\text{円数})^2}] \frac{1}{(\text{円数})^2}]$$

注

$$\text{東} = \left(\frac{a_2}{a}\right)^2 = (2 \cos \theta)^2 = 2(1 + \cos 2\theta) \quad \theta = \frac{\pi}{n}$$

4 円内容累円術後編

図のように内，外円の間に累円を容れたものがある。

外，内，甲円の直径を与えて，乙円，丙円，丁円…の直径を求めよ。

術 円数を角数とする，正多角形の二距斜巾率を求め東とする。

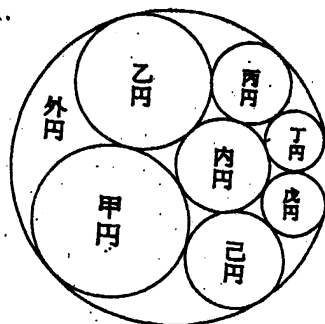
$$\text{因法} = \text{東} - 2 \quad \text{増率} = \sqrt{\frac{(\text{外} - \text{内}) \text{東} \times \text{甲}}{\text{外} \times \text{内}}} \quad \text{西} = \text{増率} + \text{東}$$

$$\text{西} - \frac{\{\sqrt{2 \text{西} - (\frac{2 \text{増率} \times \text{甲}}{\text{外} - \text{内}} + \text{東} + 4)}\} + 2}{2} = \text{乙率}$$

$$\text{丙率} = \text{乙率} \times \text{因法} + \text{増率} - 1$$

$$\text{丁率} = \text{丙率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{乙率}$$

$$\text{戊率} = \text{丁率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{丙率}$$



外，甲，乙を与えて内を求める 廉術変換より

$$\text{外}^2 \times \text{甲}^2 \times \text{乙}^2 \times \text{東}^2 + \{2 \text{外} \times \text{甲}^2 \times \text{乙}^2 \times \text{東}^2 - 8 \text{外}^2 (\text{甲} + \text{乙}) \text{甲} \times \text{乙} \times \text{東}\} \text{内}$$

$$+ \{ \text{甲}^2 \times \text{乙}^2 \times \text{東}^2 + 8 \text{外} (\text{甲} + \text{乙}) \text{甲} \times \text{乙} \times \text{東} + 16 \text{外}^2 \times (\text{甲} + \text{乙})^2 - 16 \text{外}^2 \times \text{甲} \times \text{乙} \} \text{内}^2 = 0$$

$$- \text{外} \times \text{甲} \times \text{乙} \times \text{東} + \{-\text{甲} \times \text{乙} \times \text{東} + 4 \text{外} (\text{甲} + \text{乙})\} = \text{寄位}$$

$$\text{寄位}^2 = \text{外}^2 \times \text{甲}^2 \times \text{乙}^2 \times \text{東}^2 + \{2 \text{甲}^2 \times \text{乙}^2 \times \text{東}^2 \times \text{外} - 8 \text{外}^2 \times \text{甲} \times \text{乙} \times \text{東} (\text{甲} + \text{乙})\} \text{内}$$

$$+ \{ \text{甲}^2 \times \text{乙}^2 \times \text{東}^2 - 8 \text{外} (\text{甲} + \text{乙}) \text{甲} \times \text{乙} \times \text{東} + 16 \text{外}^2 (\text{甲} + \text{乙}) \} \text{内}^2$$

$$\text{寄位}^2 - \text{基式} = \{-16 \text{外} (\text{甲} + \text{乙}) \text{甲} \times \text{乙} \times \text{東} + 16 \text{外}^2 \times \text{甲} \times \text{乙} \times \text{東}\} \text{内}^2$$

$$\sqrt{\quad} = \sqrt{-16 \text{外} (\text{甲} + \text{乙}) \text{甲} \times \text{乙} \times \text{東} + 16 \text{外}^2 \times \text{甲} \times \text{乙} \times \text{東}}$$

$$- \text{外} \times \text{甲} \times \text{乙} \times \text{東} + \{-\text{甲} \times \text{乙} \times \text{東} + 4 \text{外} (\text{甲} + \text{乙}) - \sqrt{\quad}\} \text{内} = 0$$

$$- \text{外} \times \text{甲} \times \text{乙} \times \text{東} + \{-\text{甲} \times \text{乙} \times \text{東} + 4 \text{外} (\text{甲} + \text{乙}) + \sqrt{\quad}\} \text{内} = 0$$

解 廉術変換の天を求める式. 天は甲, 地は乙に換える.

$$(外+内) 甲^2 \times 乙^2 \times 乾 (外-内) 甲^2 \times 乙 - 2 乾 (外-内) 甲 \times 乙^2 + 2 乾 (外-内) 甲 \times 乙 \times 矢$$

$$- 2 乾 \times 坤 \times 甲 \times 乙 + 乾^2 \times 甲^2 + 乾^2 \times 乙^2 = 0 \quad \text{基式}$$

$$乾 = 外 \times 内 + 外 \times 矢 - 内 \times 矢 - 矢^2 \quad 坤 = 内 \times 外 + 矢^2$$

$$東 = \frac{4 内 \times 外}{乾} = 因法 + 2 \quad 増率 = \frac{2(外-内) 甲}{乾} \quad 東 \times 乾 = 4 内 \times 外 \quad \text{とする}$$

乙を求める式

$$(外+内)^2 東 \times 甲^2 \times 乙^2 - 8(外-内) 内 \times 外 (甲+乙) 甲 \times 乙 \times 東 - 16 内^2 \times 外^2 \times 甲 \times 乙 \times 東 \\ + 16 内^2 \times 外^2 (甲+乙)^2 = 0$$

$$16 内^2 \times 外^2 \times 甲^2 + \{32 内^2 \times 外^2 \times 甲 - 16 内^2 \times 外^2 \times 甲 \times 東 - 8(外-内) 内 \times 外 \times 甲 \times 東\} 乙 \\ + \{16 内^2 \times 外^2 + (外+内)^2 \times 甲^2 \times 東^2 - 8(外-内) 内 \times 外 \times 甲 \times 東\} 乙^2 = 0 \quad \dots \text{原式}$$

$$- 2 内 \times 外 \times 甲 + \{-2 内 \times 外 + 内 \times 外 \times 東 + \frac{(外-内) 甲 \times 東}{2}\} 乙 = \text{寄位}$$

$$4(\text{寄位})^2 = 16 内^2 \times 外^2 \times 甲^2$$

$$+ \{32 内^2 \times 外^2 \times 甲 - 16 内^2 \times 外^2 \times 甲 \times 東 - 8(外-内) 外 \times 内 \times 甲^2 東\} 乙$$

$$+ \{16 内^2 \times 外^2 + 44 内^2 \times 外^2 \times 東^2 + (外-内)^2 甲^2 \times 東^2 - 16 内^2 \times 外^2 \times 東$$

$$+ 4(外-内) 内 \times 外 \times 甲 \times 東^2 - 8(外-内) 内 \times 外 \times 甲 \times 東\} 乙^2$$

$$\{4(\text{寄位})^2 - (\text{原式})\} \div 4 = \{-4 内^2 \times 外^2 \times 東 + 内^2 \times 外^2 \times 東^2 + (外-内) 内 \times 外 \times 甲 \times 東^2$$

$$- 内 \times 外 \times 甲^2 \times 東^2\} 乙^2$$

$$(\text{上式の乙の係数}) \div (外^2 \times 内^2) = -4 東 + 東^2 + \frac{(外-内) 甲 \times 東^2}{外 \times 内} - \frac{甲^2 \times 東^2}{外 \times 内}$$

$$= -4 東 + 東^2 + 2 増率 \times 東 - \frac{甲^2 \times 東^2}{外 \times 内} \quad \text{西} = 東 + 増率$$

$$= -4 東 - 東^2 + 2 東 \times 西 - \frac{2 増率 \times 甲 \times 東}{外-内}$$

$$\sqrt{\quad} = \sqrt{-4 東 - 東^2 + 2 東 \times 西 - \frac{2 増率 \times 甲 \times 東}{外-内}} \quad \text{で表す}$$

$$-2 甲 + \{2 + 東 + 増率 - \sqrt{\quad}\} 乙 = 0$$

$$乙率 = \{東 + 増率 - 2 - \sqrt{\quad}\} \div 2 \quad 乙 = \frac{甲}{乙率} \quad 東 = 因法 + 2$$

因法を求める

$$\text{丙率} = \text{乙率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{甲率} = \text{増率} - 1 + \text{乙率} \times \text{因法}$$

$$\text{丁率} = \text{丙率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{乙率} = \text{増率} - \text{乙率} + (\text{増率} - 1) \text{因法} + \text{乙率} \times \text{因法}^2$$

$$\text{戊率} = \text{丁率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{丙率} = 1 + (\text{増率} - 2 \text{乙率}) \text{因法} + (\text{増率} - 1) \text{因法}^2 + \text{乙率} \times \text{因法}^3$$

$$\text{己率} = \text{戊率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{丁率} = \text{乙率} + (-\text{増率} + 2) \text{因法} + (\text{増率} - 3 \text{乙率}) \text{因法}^2$$

$$+ (\text{増率} - 1) \text{因法}^3 + \text{乙率} \times \text{因法}^4$$

$$\text{庚率} = \text{己率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{戊率} = \text{増率} - 1 + (-\text{増率} + 3 \text{乙率}) \text{因法} + (-2 \text{増率} + 3) \text{因法}^2$$

$$+ (\text{増率} - 4 \text{乙率}) \text{因法}^3 + (\text{増率} - 1) \text{因法}^4 + \text{乙率} \times \text{因法}^5$$

$$\text{辛率} = \text{庚率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{己率} = \text{増率} - \text{乙率} + (2 \text{増率} - 3) \text{因法} + (-\text{増率} + 6 \text{乙率}) \text{因法}^2$$

$$+ (-3 \text{増率} + 4) \text{因法}^3 + (\text{増率} - 5 \text{乙率}) \text{因法}^4 + (\text{増率} - 1) \text{因法}^5 + \text{乙率} \times \text{因法}^6$$

$$\text{壬率} = \text{辛率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{庚率} = 1 + (2 \text{増率} - 4 \text{乙率}) \text{因法} + (4 \text{増率} - 6) \text{因法}^2$$

$$+ (-3 \text{増率} + 10 \text{乙率}) \text{因法}^3 + (-3 \text{増率} + 5) \text{因法}^4 + (\text{増率} - 6 \text{乙率}) \text{因法}^5$$

$$+ (\text{増率} - 1) \text{因法}^6 + \text{乙率} \times \text{因法}^7$$

$$\text{癸率} = \text{壬率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{辛率} = \text{乙率} + (-2 \text{増率} + 4) \text{因法} + (4 \text{増率} - 10 \text{乙率}) \text{因法}^2$$

$$+ (7 \text{増率} - 10) \text{因法}^3 + (-4 \text{増率} + 15 \text{乙率}) \text{因法}^4 + (-4 \text{増率} + 6) \text{因法}^5$$

$$+ (\text{増率} - 7 \text{乙率}) \text{因法}^6 + (\text{増率} - 1) \text{因法}^7 + \text{乙率} \times \text{因法}^8$$

三円

$$\text{丁率} = \text{甲率} \quad (\text{増率} - \text{乙率}) + (\text{増率} - 1) \text{因法} + \text{乙率} \times \text{因法}^2 = 1$$

$$(\text{増率} - \text{乙率} - 1) + (\text{増率} - 1) \text{因法} + \text{乙率} \times \text{因法} = 0 \dots \text{前式}$$

$$\text{戊率} = \text{乙率} \quad 1 + (\text{増率} - 2 \text{乙率}) \text{因法} + (\text{増率} - 1) \text{因法}^2 + \text{乙率} \times \text{因法}^3 = \text{乙率}$$

$$(1 - \text{乙率}) + (\text{増率} - 2 \text{乙率}) \text{因法} + (\text{増率} - 1) \text{因法}^2 + \text{乙率} \times \text{因法} = 0 \dots \text{後式}$$

$$\text{後式} - \text{前式} \times \text{因法}$$

$$(1 - \text{乙率}) + (-\text{乙率} + 1) \text{因法} = (-1 - \text{因法})(\text{乙率} - 1) = 0$$

$$-1 - \text{因法} = 0$$

四円

$$\text{戊率} = \text{甲率} \quad 1 + (\text{増率} - 2 \text{乙率}) \text{因法} + (\text{増率} - 1) \text{因法}^2 + \text{乙率} \times \text{因法}^3 = 1$$

$$(\text{増率} - 2 \text{乙率}) + (\text{増率} - 1) \text{因法} + \text{乙率} \times \text{因法}^2 = 0 \dots \text{前式}$$

$$\text{己率} = \text{乙率}$$

$$\text{乙率} + (-\text{増率} + 2) \text{因法} + (\text{増率} - 3 \text{乙率}) \text{因法}^2 + (\text{増率} - 1) \text{因法}^3 + \text{乙率} \times \text{因法} = \text{乙率}$$

$$(-\text{増率} + 2) + (\text{増率} - 3 \text{乙率}) \text{因法} + (\text{増率} - 1) \text{因法}^2 + \text{乙率} \times \text{因法}^3 = 0 \dots \text{後式}$$

$$\text{後式} - \text{前式} \times \text{因法}$$

$$(-\text{増率} + 2) - \text{乙率} \times \text{因法} = 0 \dots \text{一式}$$

$$\text{前式} + (\text{一式}) \times \text{因法} \quad (\text{増率} - 2 \text{乙率}) + \text{因法} = 0 \dots \text{二式}$$

$$(\text{一式}) + (\text{二式}) \quad (-2 \text{乙率} + 2) + (-\text{乙率} + 1) \text{因法} = (\text{乙率} - 1)(-2 - \text{因法}) = 0$$

$$-2 - \text{因法} = 0 \quad \text{この式は題意に背くから} \quad \text{因法} = 0$$

五円

$$\text{己率} = \text{甲率}$$

$$\text{乙率} + (-\text{増率} + 2) \text{因法} + (\text{増率} - 3 \text{乙率}) \text{因法}^2 + (\text{増率} - 1) \text{因法}^3 + \text{乙率} \times \text{因法}^4 = 0$$

$$\text{乙率} - 1 + (-\text{増率} + 2) \text{因法} + (\text{増率} - 3 \text{乙率}) \text{因法}^2 + (\text{増率} - 1) \text{因法}^3$$

$$+ \text{乙率} \times \text{因法}^4 = 0 \dots \text{前式}$$

$$\text{庚率} = \text{乙率}$$

$$\text{増率} - 1 + (-\text{増率} + 3 \text{乙率}) \text{因法} + (-2 \text{増率} + 3) \text{因法}^2 + (\text{増率} - 4 \text{乙率}) \text{因法}^3$$

$$+ (\text{増率} - 1) \text{因法}^4 + \text{乙率} \times \text{因法}^5 = \text{乙率}$$

$$\text{増率} - \text{乙率} - 1 + (-\text{増率} + 3 \text{乙率}) \text{因法} + (-2 \text{増率} + 3) \text{因法}^2 + (\text{増率} - 4 \text{乙率}) \text{因法}^3$$

$$+ (\text{増率} - 1) \text{因法}^4 + \text{乙率} \times \text{因法}^5 = 0 \dots \text{後式}$$

$$\text{後式} - \text{前式} \times \text{因法}$$

$$(\text{増率} - \text{乙率} - 1) + (-\text{増率} + 2 \text{乙率}) \text{因法} + (-\text{増率} + 1) \text{因法}^2 - \text{乙率} \times \text{因法}^3 = 0 \dots \text{一式}$$

$$(\text{一式}) \times \text{因法} - (\text{前式})$$

$$(\text{乙率} - 1) + (-\text{乙率} + 1) \text{因法} + (-\text{乙率} + 1) \text{因法}^2 = 0 \dots \text{二式}$$

$$(\text{乙率} - 1)(1 - \text{因法} - \text{因法}^2) = 0 \quad 1 - \text{因法} - \text{因法}^2 = 0$$

六円

庚率 = 甲率

$$\begin{aligned} & \text{増率} - 1 + (-\text{増率} + 3 \text{ 乙率}) \text{ 因法} + (-2 \text{ 増率} + 3) \text{ 因法}^2 + (\text{増率} - 4 \text{ 乙率}) \text{ 因法}^3 \\ & + (\text{増率} - 1) \text{ 因法}^4 + \text{乙率} \times \text{因法}^5 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{増率} - 2 + (-\text{増率} + 3 \text{ 乙率}) \text{ 因法} + (-2 \text{ 増率} + 3) \text{ 因法}^2 + (\text{増率} - 4 \text{ 乙率}) \text{ 因法}^3 \\ & + (\text{増率} - 1) \text{ 因法}^4 + \text{乙率} \times \text{因法}^5 = 0 \dots \text{前式} \end{aligned}$$

辛率 = 乙率

$$\begin{aligned} & \text{増率} - \text{乙率} + (2 \text{ 増率} - 3) \text{ 因法} + (-2 \text{ 増率} + 6 \text{ 乙率}) \text{ 因法}^2 + (-3 \text{ 増率} + 4) \text{ 因法}^3 \\ & + (\text{増率} - 5 \text{ 乙率}) \text{ 因法}^4 + (\text{増率} - 1) \text{ 因法}^5 + \text{乙率} \times \text{因法}^6 = \text{乙率} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{増率} - 2 \text{ 乙率} + (2 \text{ 増率} - 3) \text{ 因法} + (-2 \text{ 増率} + 6 \text{ 乙率}) \text{ 因法}^2 + (-3 \text{ 増率} + 4) \text{ 因法}^3 \\ & + (\text{増率} - 5 \text{ 乙率}) \text{ 因法}^4 + (\text{増率} - 1) \text{ 因法}^5 + \text{乙率} \times \text{因法}^6 = 0 \dots \text{後式} \end{aligned}$$

後式 - 前式 $\times$ 因法

$$\begin{aligned} & \text{増率} - 2 \text{ 乙率} + (\text{増率} - 1) \text{ 因法} + (-\text{増率} + 3 \text{ 乙率}) \text{ 因法}^2 + (-\text{増率} + 1) \text{ 因法}^3 \\ & - \text{乙率} \times \text{因法}^4 = 0 \dots \text{一式} \end{aligned}$$

(一式) $\times$ 因法 + 前式

$$\text{増率} - +2 \text{ 乙率} \times \text{因法} + (-\text{増率} + 2) \text{ 因法}^2 - \text{乙率} \times \text{因法}^3 = 0 \dots \text{二式}$$

(一式) - (二式) $\times$ 因法

$$\text{増率} - 2 \text{ 乙率} + \text{因法} + (-\text{増率} + 2 \text{ 乙率}) \text{ 因法}^2 - \text{因法}^3 = 0 \dots \text{三式}$$

(三式) - (二式)

$$-2 \text{ 乙率} + 2 + (-\text{乙率} + 1) \text{ 因法} + (2 \text{ 乙率} - 2) \text{ 因法}^2 + (\text{乙率} - 1) \text{ 因法}^3 = 0$$

$$(\text{乙率} - 1)(-2 - \text{因法} + 2 \text{ 因法}^2 + \text{因法}^3) = 0$$

$$-2 - \text{因法} + 2 \text{ 因法}^2 + \text{因法}^3 = 0$$

$$(2 + \text{因法})(1 - \text{因法})(-1 + \text{因法}) = 0 \quad -1 + \text{因法} = 0$$

七円

辛率 = 甲率

$$\begin{aligned} & (\text{増率} - \text{乙率}) + (2 \text{ 増率} - 3) \text{ 因法} + (-2 \text{ 増率} + 6 \text{ 乙率}) \text{ 因法}^2 + (-3 \text{ 増率} + 4) \text{ 因法}^3 \\ & + (\text{増率} - 5 \text{ 乙率}) \text{ 因法}^4 + (\text{増率} - 1) \text{ 因法}^5 + \text{乙率} \times \text{因法}^6 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\text{増率} - \text{乙率} - 1) + (2 \text{ 増率} - 3) \text{ 因法} + (-2 \text{ 増率} + 6 \text{ 乙率}) \text{ 因法}^2 + (-3 \text{ 増率} + 4) \text{ 因法}^3 \\ & + (\text{増率} - 5 \text{ 乙率}) \text{ 因法}^4 + (\text{増率} - 1) \text{ 因法}^5 + \text{乙率} \times \text{因法}^6 = 0 \dots \text{前式} \end{aligned}$$

壬率 = 乙率

$$\begin{aligned} & 1 + (2 \text{ 増率} - 4 \text{ 乙率}) \text{ 因法} + (4 \text{ 増率} - 6) \text{ 因法}^2 + (-3 \text{ 増率} + 10 \text{ 乙率}) \text{ 因法}^3 + (-4 \text{ 増率} + 5) \text{ 因法}^4 \\ & + (\text{増率} - 6 \text{ 乙率}) \text{ 因法}^5 + (\text{増率} - 1) \text{ 因法}^6 + \text{乙率} \times \text{因法}^7 = \text{乙率} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\text{乙率} + 1 + (2 \text{ 増率} - 4 \text{ 乙率}) \text{ 因法} + (4 \text{ 増率} - 6) \text{ 因法}^2 + (-3 \text{ 増率} + 10 \text{ 乙率}) \text{ 因法}^3 \\ & + (-4 \text{ 増率} + 5) \text{ 因法}^4 + (\text{増率} - 6 \text{ 乙率}) \text{ 因法}^5 + (\text{増率} - 1) \text{ 因法}^6 + \text{乙率} \times \text{因法}^7 = 0 \dots \text{後式} \end{aligned}$$

後式 - 前式 $\times$ 因法

$$\begin{aligned} & -\text{乙率} + 1 + (\text{増率} - 3 \text{ 乙率} + 1) \text{ 因法} + (2 \text{ 増率} - 3) \text{ 因法}^2 + (-\text{増率} + 4 \text{ 乙率}) \text{ 因法}^3 \\ & + (-4 \text{ 増率} + 5) \text{ 因法}^4 + \text{乙率} \times \text{因法}^5 = 0 \dots \text{一式} \end{aligned}$$

前式 + (一式) $\times$ 因法

$$\begin{aligned} & (\text{増率} - \text{乙率} - 1) + (2 \text{ 増率} - \text{乙率} - 2) \text{ 因法} + (-\text{増率} + 3 \text{ 乙率} + 1) \text{ 因法}^2 + (-\text{増率} + 1) \text{ 因法}^3 \\ & - \text{乙率} \times \text{因法}^4 = 0 \dots \text{二式} \end{aligned}$$

(一式) - (二式) $\times$ 因法

$$-\text{乙率} + 1 + (-2 \text{ 乙率} + 2) \text{ 因法} + (\text{乙率} - 1) \text{ 因法}^2 + (\text{乙率} - 1) \text{ 因法}^3 = 0$$

$$(\text{乙率} - 1)(-1 - 2 \text{ 因法} + \text{因法}^2 + \text{因法}^3) = 0 \quad -1 - 2 \text{ 因法} + \text{因法}^2 + \text{因法}^3 = 0$$

八円

壬率 = 甲率

$$\begin{aligned} & 2 \text{ 増率} - 4 \text{ 乙率} + (4 \text{ 増率} - 6) \text{ 因法} + (-3 \text{ 増率} + 10 \text{ 乙率}) \text{ 因法}^2 + (-4 \text{ 増率} + 5) \text{ 因法}^3 \\ & + (\text{増率} - 6 \text{ 乙率}) \text{ 因法}^4 + (\text{増率} - 1) \text{ 因法}^5 + \text{乙率} \times \text{因法}^6 = 0 \dots \text{前式} \end{aligned}$$

癸率 = 乙率

$$-2 \text{ 増率} + 4) + (4 \text{ 増率} - 10 \text{ 乙率}) \text{ 因法} + (7 \text{ 増率} - 10 \text{ 乙率}) \text{ 因法}^2 + (-4 \text{ 増率} + 15 \text{ 乙率}) \text{ 因法}^3 \\ + (-5 \text{ 増率} + 6) \text{ 因法}^4 + (\text{増率} - 7 \text{ 乙率}) \text{ 因法}^5 + (\text{増率} - 1) \text{ 因法}^6 + \text{乙率} \times \text{因法}^7 = 0 \dots \text{後式}$$

後式 - 前式 $\times$ 因法

$$(-2 \text{ 増率} + 4) + (2 \text{ 増率} - 6 \text{ 乙率}) \text{ 因法} + (3 \text{ 増率} - 4) \text{ 因法}^2 + (-\text{増率} + 5 \text{ 乙率}) \text{ 因法}^3 \\ + (-\text{増率} + 1) \text{ 因法}^4 + \text{乙率} \times \text{因法}^5 = 0 \dots \text{一式}$$

前式 + (一式) $\times$ 因法

$$(2 \text{ 増率} - 4 \text{ 乙率}) + (2 \text{ 増率} - 2) \text{ 因法} + (-\text{増率} + 4 \text{ 乙率}) \text{ 因法}^2 \\ + (-\text{増率} + 1) \text{ 因法}^3 - \text{乙率} \times \text{因法}^4 = 0 \dots \text{二式}$$

(一式) - (二式) $\times$ 因法

$$(-2 \text{ 増率} + 4) - 2 \text{ 乙率} \times \text{因法} + (\text{増率} - 2) \text{ 因法}^2 + \text{乙率} \times \text{因法}^3 = 0 \dots \text{三式}$$

(二式) + (三式) $\times$ 因法

$$(2 \text{ 増率} - 4 \text{ 乙率}) + 2 \text{ 因法} + (-\text{増率} + 2 \text{ 乙率}) \text{ 因法}^2 - \text{因法}^3 = 0 \dots \text{四式}$$

(三式) + (四式)

$$-4 \text{ 乙率} + 4 + (-2 \text{ 乙率} + 2) \text{ 因法} + (2 \text{ 乙率} - 2) \text{ 因法}^2 + (\text{乙率} - 1) \text{ 因法}^3 = 0$$

$$(\text{乙率} - 1)(-4 - 2 \text{ 因法} + 2 \text{ 因法}^2 + \text{因法}^3) = 0 \quad -4 - 2 \text{ 因法} + 2 \text{ 因法}^2 + \text{因法}^3 = 0$$

$$(2 + \text{因法})(-2 + \text{因法}^2) = 0 \quad -2 + \text{因法}^2 = 0$$

東を得る式

$$\text{東} = \text{因法} + 2$$

$$3 \text{ 円} \quad 1 - \text{東} = 0$$

$$4 \text{ 円} \quad -2 + \text{東} = 0$$

$$5 \text{ 円} \quad -1 + 3 \text{ 東} - \text{東}^2 = 0$$

$$6 \text{ 円} \quad -3 + \text{東} = 0$$

$$7 \text{ 円} \quad -1 + 6 \text{ 東} - 5 \text{ 東}^2 + \text{東}^3 = 0$$

$$8 \text{ 円} \quad 2 - 4 \text{ 東} + \text{東}^2 = 0$$

5 補足廉術変換より

外円、内円、地円の直径、および矢の長さが与えられたとき、天円、人円の直径を求める。

$$\text{子} = -\text{外} + \text{内} + 2\text{矢} = -(\text{外} - \text{内}) + 2\text{矢} = -(\text{外} - \text{矢}) + (\text{内} + \text{矢})$$

$$\text{丑} = \text{外} - \text{天} \quad \text{寅} = \text{内} + \text{天} \quad \text{卯} = \text{外} - \text{地} \quad \text{辰} = \text{内} + \text{地} \quad \text{巳} = \text{天} + \text{地}$$

$$\text{寅}^2 - \text{子}^2 - \text{丑}^2 = 2\text{子} \times \text{午}$$

$$= -2\text{外}^2 - 4\text{内} \times \text{矢} - 4\text{矢}^2 + 4\text{外} \times \text{矢} + 2\text{外} \times \text{内} + 2\text{内} \times \text{天} + 2\text{外} \times \text{天}$$

$$\text{東} = \text{子} \times \text{午} = -\text{外}^2 - 2\text{内} \times \text{矢} - 2\text{矢}^2 + 2\text{外} \times \text{矢} + \text{外} \times \text{内} + \text{内} \times \text{天} + \text{外} \times \text{天}$$

$$\text{子}^2 \times \text{丑}^2 - \text{東}^2 = 4\text{子}^2 \times \text{未}^2$$

$$\text{乾} = \text{外} \times \text{内} + \text{外} \times \text{矢} - \text{内} \times \text{矢} - \text{矢}^2$$

$$\text{子}^2 \times \text{未}^2 = -\text{乾}(\text{外} - \text{内})\text{矢} + \text{乾} \times \text{矢}^2 + \text{乾}(\text{外} - \text{内})\text{天} - \text{乾} \times \text{天}^2 = \text{冬}$$

冬の中の天を地に換える、丑を卯に、寅を辰に、午を申に換える。

$$\text{子}^2 \times \text{酉}^2 = -\text{乾}(\text{外} - \text{内})\text{矢} + \text{乾} \times \text{矢}^2 + \text{乾}(\text{外} - \text{内})\text{地} - \text{乾} \times \text{地}^2 = \text{江}$$

酉 = 未 + 亥、東の中の天を地に換える。

$$\text{子} \times \text{申} = -\text{外}^2 - 2\text{内} \times \text{矢} - 2\text{矢}^2 + 2\text{外} \times \text{矢} + \text{外} \times \text{内} + \text{内} \times \text{地} + \text{外} \times \text{地}$$

$$\text{東} - \text{子} \times \text{申} = \text{子} \times \text{戌} = \text{内} \times \text{天} + \text{外} \times \text{天} - \text{内} \times \text{地} - \text{外} \times \text{地}$$

$$\text{子}^2 \times \text{巳}^2 - \text{子}^2 \times \text{戌}^2 = 4\text{子}^2 \times \text{亥}^2$$

$$\text{子}^2 \times \text{亥}^2 = \text{支} = -\text{乾} \times \text{天}^2 - 2\text{乾} \times \text{天} \times \text{地} - \text{乾} \times \text{地}^2 + (\text{外} + \text{内})^2 \text{天} \times \text{地}$$

$$\text{支} + \text{江} - \text{冬} = \text{子}^2 \times 2\text{亥} \times \text{酉}$$

$$= -2\text{天} \times \text{地} \times \text{乾} - 2\text{地}^2 \times \text{乾} - (\text{外} - \text{内})\text{乾} \times \text{天} + (\text{外} - \text{内})\text{乾} \times \text{地} + (\text{外} + \text{内})^2 \text{天} \times \text{地}$$

$$4\text{江} \times \text{支} = 4\text{子}^4 \times \text{亥}^2 \times \text{酉}^2$$

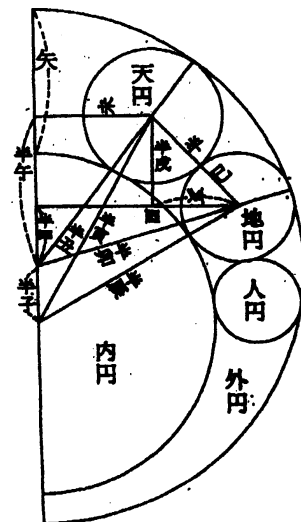
$$\text{坤} = \text{外} \times \text{内} + \text{矢}^2 \quad \text{とおき子を約す。}$$

$$\text{乾}^2 \times \text{地}^2 + \{-2\text{乾}(\text{外} - \text{内})\text{地}^2 - 2\text{乾} \times \text{坤} \times \text{地} + 2\text{乾}(\text{外} - \text{内})\text{矢} \times \text{地}\} \text{天}$$

$$+ \{(\text{外} + \text{内})^2 \text{地}^2 + \text{乾}^2 - 2\text{乾}(\text{外} - \text{内})\text{地}\} \text{天}^2 = 0$$

天を地に、地を人に換える。天を求める式と人を求める式は交商式。

$$\text{乾}^2 \times \text{地}^2 + \{-2\text{乾}(\text{外} - \text{内})\text{地}^2 - 2\text{乾} \times \text{坤} \times \text{地} + 2\text{乾}(\text{外} - \text{内})\text{矢} \times \text{地}\} \text{人}$$



$$+ \{ (外 + 内)^2 地^2 + 乾^2 - 2 乾 (外 - 内) 地 \} 人^2 = 0$$

$$[- 乾 \times 地 + \{ (外 - 内) 地 + 坤 - (外 - 内) 矢 \} 天]^2$$

$$- \{ 4 内 \times 外 (矢 + 地) (矢 - 地) - 4 内 \times 外 (外 - 内) (矢 - 地) \} = 0$$

$$右位 = \sqrt{4 内 \times 外 (矢 + 地) (矢 - 地) - 4 内 \times 外 (外 - 内) (矢 - 地)}$$

$$- 乾 \times 地 + \{ (外 - 内) 地 + 坤 - (外 - 内) 矢 - (右位) \} 天 = 0$$

$$- 乾 \times 地 + \{ (外 - 内) 地 + 坤 - (外 - 内) 矢 + (右位) \} 人 = 0$$

$$- 乾 \times 地 \times 人 + \{ - 乾 \times 地 + 2 (外 - 内) 地 \times 人 + 2 坤 \times 人 - 2 (外 - 内) 矢 \times 人 \} 天 = 0$$

地を甲に、天を乙に換える。

$$乾 = 外 \times 内 + 外 \times 矢 - 内 \times 矢 - 矢^2 = (外 - 矢)(矢 + 内) = 寄位$$

$$坤 = 内 \times 外 + 矢^2 \quad 内 \times 外 - 矢 (外 - 内) + 矢^2 = 内 \times 外 - 寄位$$

$$左式 = - 寄位 \times 甲 + \{ (外 - 内) 甲 + 2 内 \times 外 - 寄位 \} 乙 \quad 再位$$

$$右位 = \sqrt{4 (甲 + 矢) (矢 - 甲) 内 \times 外 - 4 (外 - 内) (矢 - 甲) 内 \times 外}$$

$$- 寄位 \times 甲 + (再位 - 右位) 乙 = 0$$

丙を求める式

$$- 寄位 \times 甲 \times 乙 + \{ - 寄位 \times 乙 + 2 (外 - 内) 甲 \times 乙 + 2 坤 \times 甲 - 2 (外 - 内) 矢 \times 甲 \} 丙 = 0$$

$$- 甲 + \left\{ -1 + \frac{2 (外 - 内) 甲}{寄位} + \frac{4 内 \times 外 \times 甲}{寄位 \times 乙} - \frac{2 甲}{乙} \right\} 丙 = 0$$

$$丙率 = \frac{甲}{丙} \quad 甲率 = 1 \quad 乙率 = \frac{甲}{乙} \quad 因法 = \frac{4 内 \times 外}{寄位} - 2 \quad 増率 = \frac{2 (外 - 内) 甲}{寄位}$$

$$- 甲 + \{ - 甲率 + 増率 + 乙率 \times 因法 \} 丙 = 0$$

$$丙率 = 乙率 \times 因法 + 増率 - 甲率 \quad 丙 = \frac{甲}{丙率}$$

参考文献

- [1] 平山締・松岡元久編『安島直円全集』富士短期大学出版部 昭和 41 年
- [2] 加藤平左工門著『和算ノ研究 雑論Ⅱ』日本学術振興会 昭和 29 年
- [3] 平山締・内藤淳編集『松永良弼』松永良弼刊行会 東京法令 昭和 62 年
- [4] 米光丁・藤井康生著『拾璣算法』平成 11 年