

直交関数系展開による Hopf 方程式の解法

東大 理学部 物理 桑 原 真 二

§ 1. Burgers モデル

我々はこゝで流体力学の方程式を簡単化した Burgers モデル：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \bar{\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

について統計流体力学の初期値問題を論ずることにする。この方程式は現実の流体の運動を表わしていないが、一次元の速度 $u(x, t)$ (x, t は座標と時間) だけについての方程式で三次元乱流を論ずるよりずっと簡単であるが、数学的特性は十分保存しているものである。 $\bar{\nu}$ は Reynolds 数の逆数で、上の方程式は無次元形で書かれている。

$u(x, t)$ の Fourier 変換

$$v(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k x} u(x, t) dx \quad (1.2)$$

で表わせば、(1.1) は

$$\frac{\partial v(k)}{\partial t} + 2\pi i \int k' v(k-k') v(k') dk' = -4\pi^2 \bar{\nu} k^2 v(k) \quad (1.3)$$

となる。

§ 2. Hopf 方程式

統計流体力学は、連続無限次元自由度の力学系の統計力学であるから、位相空間は必然的に関

数空間となり，統計分布は分布汎関数で表わされる。すなわち $v(k)$ - 空間が位相空間となり

$$P = P[v(k); t] \quad (2.1)$$

のような分布汎関数を導入しなければならない。分布汎関数の Fourier 変換：

$$\phi[z(k); t] = \int \dots \int e^{i(z, v)} P[v(k); t] \delta v \quad (2.2 a)$$

$$(z, v) = \int z v^* dk \quad (2.2 b)$$

は特性汎関数とよばれる。 $z(k)$ は

$$z(-k) = z^*(k) \quad (2.3 a)$$

$$|k| \rightarrow \infty \text{ に対して } z(k) = 0 \quad (2.3 b)$$

を満足しているものとする。

特性汎関数に対していわゆる Hopf 方程式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = & \int \int k z(k+k') \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z dk \partial z' dk'} dk dk' \\ & - 4\pi^2 \bar{\nu} \int k^2 z \frac{\partial \Phi}{\partial z dk} dk \end{aligned} \quad (2.4)$$

が成立することが証明できる。この方程式は副条件：

$$\Phi[0] = 1 \quad (2.5 a)$$

$$|\Phi[z]| \leq 1 \quad (2.5 b)$$

および一様性の条件：

$$\Phi[e^{2\pi i k a} z(k)] = \Phi[z] \quad a = \text{任意} \quad (2.6)$$

の下に解かれねばならない。ここで $\partial \Phi / \partial z dk$ は汎関数微分である。すなわち， $z(k)$ を $z(k) +$

$\delta z(k)$ だけ変えると Φ が $\Phi + \delta \Phi$ だけ変る時, $\delta \Phi$ が

$$\delta \Phi = \int A(k) \delta z(k) dk + O((\delta z)^2) \quad (2.7)$$

で表わされるならば, 汎関数微分は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z dk} = A(k) \quad (2.8)$$

によって定義される。

§ 3. 直交関数展開による解法

今 $z(k)$ を適当な直交関数系 $\varphi_n(k)$:

$$\varphi_n(-k) = \varphi_n^*(k) \quad (3.1 a)$$

$$\int \varphi_\ell^*(k) \varphi_m(k) dk = \delta_{\ell m} \quad (3.1 b)$$

で展開したものとする:

$$z(k) = a_n \varphi_n(k) \quad (3.2)$$

$\Phi[z]$ が z の汎関数ということは無限個の係数 a_n の関数であるということと同等である:

$$\Phi[z; t] = \Phi(a_0, a_1, \dots; t) \quad (3.3)$$

そうすると, 汎関数微分は無次元個の a_n による微分の和

$$\frac{\partial}{\partial z dk} = \varphi_\ell^*(k) \frac{\partial}{\partial a_\ell} \quad (3.4)$$

となることが証明される。

(3.4) を用いて H o p f 方程式 (2.4) を書きかえると

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{i} A_{\ell m n} a_n \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a_\ell \partial a_n} - \bar{\nu} A_{\ell m} a_m \frac{\partial \Psi}{\partial a_\ell} \quad (3.5)$$

$$A_{\ell m n} = i \int \int \varphi_{\ell}^{*(k)k'} \varphi_m(k') \varphi_n(k+k') dk dk' \quad (3.6 a)$$

$$A_{\ell m} = 4 \pi^2 \int k^2 \varphi_{\ell}^{*(k)} \varphi_m(k) dk \quad (3.6 b)$$

となる。

§ 4. 初期値問題

初期において，特性汎関数が Gauss 形：

$$\Phi_0 = \Phi(z, 0) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int E(k) z z^* dk \right\} \quad (4.1)$$

であったとする。ここで $E(k)$ は初期のエネルギー・スペクトルであり，我々は

$$1) \quad E(k) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \exp(-k^2/2) \quad (4.2 a)$$

$$2) \quad E(k) = \frac{1}{2\sqrt{2}} k^2 \exp(-k^2/2) \quad (4.2 b)$$

を考える。第一のスペクトルはつりがね形，第二のスペクトルは二重つりがね形である。

まず，初期条件 (4.1) と副条件 (2.5) をにらみ合わせて

$$\Phi = \exp \{ -Z(z; t) \} \quad (4.3)$$

の形におく。 $Z(z)$ は z について Taylor 展開できて

$$Z(z) = Z(0) + \int \frac{\partial Z}{\partial z dk} \Big|_{z=0} z dk + \frac{1}{2!} \iint \frac{\partial^2 Z}{\partial z dk \partial z' dk'} \Big|_{z=z'=0} z z' dk dk'$$

$$+ \frac{1}{3!} \int \frac{\partial^3 Z}{\partial z dk \partial z' dk' \partial z'' dk''} \Big|_{z=z'=z''=0} z z' z'' dk dk' dk'' + \dots \quad (4.4)$$

一様性の条件 (2.6) を考慮すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial z dk} \Big|_{z=0} &= 0 \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial z dk \partial z' dk'} \Big|_{z=z'=0} &= A(k, k', t) \delta(k+k') \\ \frac{\partial^3 Z}{\partial z dk \partial z' dk' \partial z'' dk''} \Big|_{z=z'=z''=0} &= B(k, k', k'', t) \delta(k+k'+k'') \text{ 等} \end{aligned} \quad (4.5)$$

となる。こゝで $A(k, k', t)$ 等を直交関数 φ_n で展開して

$$A(k, k', t) = c_{\ell m}^{(t)} \varphi_{\ell}^{(k)} \varphi_m^{(k')}$$

$$B(k, k', k'', t) = c_{\ell mn}^{(t)} \varphi_{\ell}^{(k)} \varphi_m^{(k')} \varphi_n^{(k'')} \text{ 等} \quad (4.6)$$

と書くと Z は

$$Z = \hat{c}_{qr}^a \varphi_q^a \varphi_r^a + \hat{c}_{qrs}^a \varphi_q^a \varphi_r^a \varphi_s^a + \hat{c}_{qrst}^a \varphi_q^a \varphi_r^a \varphi_s^a \varphi_t^a + \dots \quad (4.7)$$

$$\hat{c}_{qr}^a = \alpha_{qr} \ell_m^c \ell_m$$

$$\alpha_{qr} \ell_m = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_q^{(k)} \varphi_r^{*(k)} \varphi_{\ell}^{(k)} \varphi_m^{*(k)} dk \quad (4.8a)$$

$$\hat{c}_{qrs}^a = \alpha_{qrs} \ell_{mn}^c \ell_{mn}$$

$$\alpha_{qrs} \ell_{mn} = \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi_q^{(k)} \varphi_r^{(k')} \varphi_s^{*(k+k')} \varphi_{\ell}^{(k)} \varphi_m^{(k')} \varphi_n^{(k+k')} dk dk' \quad (4.8b)$$

$$\hat{c}_{qrst}^a = \alpha_{qrst} \ell_{mnp}^c \ell_{mnp}$$

$$\alpha_{qrst} \ell_{mnp} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \varphi_q^{(k)} \varphi_r^{(k')} \varphi_s^{(k'')} \varphi_t^{*(k+k'+k'')} dk dk' dk''$$

$$\varphi_{\ell}^{(k)} \varphi_m^{(k')} \varphi_n^{(k'')} \varphi_p^* (k+k'+k'') d k d k' d k'' \quad (4.8 c)$$

とかける。

今

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{\ell m} &= P_2 (\hat{c}_{\ell m}) = \hat{c}_{\ell m} + \hat{c}_{m \ell} \\ \tilde{c}_{\ell m n} &= P_3 (\hat{c}_{\ell m n}) = \hat{c}_{\ell m n} + \hat{c}_{m n \ell} + \hat{c}_{n \ell m} + \hat{c}_{n m \ell} + \hat{c}_{m \ell n} + \hat{c}_{\ell n m} \\ \tilde{c}_{\ell m n p} &= P_4 (\hat{c}_{\ell m n p}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

とおく。ここで P_n は始めの n ケのサブスクリプトについてのおきかえ (permutation)

をして和をとることを示す。 $\tilde{c}$ についての方程式は (3.5) より得られ

$$\frac{\partial \tilde{c}_{\ell m}}{\partial t} = \frac{1}{i} (A_{q r \ell} \tilde{c}_{q r m} + A_{q r m} \tilde{c}_{q r \ell}) - \bar{\nu} (A_{q \ell} \tilde{c}_{q m} + A_{q m} \tilde{c}_{q \ell}) \quad (4.10 a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{c}_{\ell m n}}{\partial t} &= \frac{1}{i} [A_{q r \ell} \tilde{c}_{q r m n} + A_{q r m} \tilde{c}_{q r n \ell} + A_{q r n} \tilde{c}_{q r \ell m} \\ &\quad - A_{q r \ell} (\tilde{c}_{q m} \tilde{c}_{r n} + \tilde{c}_{q n} \tilde{c}_{r m}) - A_{q r m} (\tilde{c}_{q r} \tilde{c}_{r \ell} + \tilde{c}_{q \ell} \tilde{c}_{r m}) \\ &\quad - A_{q r n} (\tilde{c}_{q \ell} \tilde{c}_{r m} + \tilde{c}_{q m} \tilde{c}_{r \ell})] - \bar{\nu} (A_{q \ell} \tilde{c}_{q m n} + A_{q m} \tilde{c}_{q n \ell} + A_{q n} \tilde{c}_{q \ell m}) ; \end{aligned} \quad (4.10 b)$$

等となる。

§ 5. Hermite 多項式による展開

(4.2) を初期値とする初期値問題において、我々は Hermite 多項式による直交関数系

$$\varphi_0(k) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4}} e^{-k^2/4}, \quad \varphi_1(k) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4}} i k e^{-k^2/4}$$

$$\varphi_2(k) = \frac{1}{\sqrt{2} (2\pi)^{1/4}} (k^2 - 1) e^{-k^2/4}$$

$$\varphi_3(k) = \frac{1}{\sqrt{3!} (2\pi)^{1/4}} i (k^3 - 3k) e^{-k^2/4} \quad \text{等} \quad (5.1)$$

をとる。これらは (3.1) の条件を満足している。

φ_0, φ_1 だけをのこし, 又, $A(k, k'), B(k, k', k'')$ までをのこす一番簡単な場合, すなわち $\tilde{c}_{00}, \tilde{c}_{11}, \tilde{c}_{001}$ 及び $\tilde{c}_{111}$ までをのこす近似において (4.10) は

$$\frac{\partial \tilde{c}_{00}}{\partial t} = \frac{8 (2\pi)^{1/4}}{i 3^{3/2}} \tilde{c}_{001} - 2 (2\pi)^2 \bar{\nu} \tilde{c}_{00} \quad (5.2 a)$$

$$\frac{\partial \tilde{c}_{11}}{\partial t} = - \frac{8 (2\pi)^{1/4}}{i 3^{3/2}} \tilde{c}_{001} - 6 (2\pi)^2 \bar{\nu} \tilde{c}_{11} \quad (5.2 b)$$

$$\frac{\partial \tilde{c}_{001}}{\partial t} = \frac{8 (2\pi)^{1/4}}{i 3^{3/2}} \tilde{c}_{00} (\tilde{c}_{00} - \tilde{c}_{11}) - 5 (2\pi)^2 \bar{\nu} \tilde{c}_{001} \quad (5.2 c)$$

$$\frac{\partial \tilde{c}_{111}}{\partial t} = - 9 (2\pi)^2 \bar{\nu} \tilde{c}_{111} \quad (5.2 d)$$

となり, 初期値はつりがね形 1), 二重つりがね形 2) 各々に対して

$$1) \quad \tilde{c}_{00} = 2\pi^{3/2}, \quad \tilde{c}_{11} = \pi^{3/2}, \quad \tilde{c}_{001} = \tilde{c}_{111} = 0 \quad (5.3 a)$$

$$2) \quad \tilde{c}_{00} = \pi^{3/2}, \quad \tilde{c}_{11} = \frac{3}{2} \pi^{3/2}, \quad \tilde{c}_{001} = \tilde{c}_{111} = 0 \quad (5.3 b)$$

である。

又, $\tilde{c}_{00}$ 等は $A(k, k'), B(k, k', k'')$ 等の展開係数 c_{00} 等に

$$c_{00} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (3 \tilde{c}_{00} - 2 \tilde{c}_{11}) \quad (5.4 \text{ a})$$

$$c_{\pi} = -\sqrt{\pi} (\tilde{c}_{00} - 2 \tilde{c}_{11}) \quad (5.5 \text{ b})$$

$$c_{001} = -\frac{\sqrt{3}\pi}{17} (15 \tilde{c}_{001} + \tilde{c}_{111}) \quad (5.5 \text{ c})$$

$$c_{111} = -\frac{3\sqrt{3}\pi}{17} (\tilde{c}_{001} - \tilde{c}_{111}) \quad (5.5 \text{ d})$$

で関係づけられる。これらからエネルギー・スペクトルおよびエネルギー・伝達関数が計算できる。

今，上記の数値計算を遂行中である。