

符号 $(p, n-p)$ の Siegel 半空間上の Eisenstein 級数

立教大学理学部 佐藤文広

1. 序。このノートでは、次の空間

$$\mathcal{H}^{(p, n-p)} = \left\{ Z = X + iY \in M(n; \mathbb{C}) \mid {}^t Z = Z, \operatorname{Im} Z = Y \text{ は } \right. \\ \left. \text{符号 } (p, n-p) \text{ の非退化実対称行列} \right\}$$

で、符号 $(p, n-p)$ の Siegel 半空間と呼ぶことにする。 $n=p$ の場合、すなわち、 $\mathcal{H}^{(n,0)}$ が通常、Siegel 上半平面である。 Siegel 上半平面 $\mathcal{H}^{(n,0)}$ においては、実解析的 Eisenstein 級数 と呼ばれる n -複素変数の ($\mathcal{H}^{(n,0)}$ の点 z に λ - η とする) Dirichlet 級数が定義されて、 $Sp_n(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H}^{(n,0)}$ 上の調和解析で 重要な役割を果たすことは、良く知られているとよりである。 以下、 $p \neq 0, n$ の場合にも、 $\mathcal{H}^{(p, n-p)}$ 上に実解析的 Eisenstein 級数の類似物を構成することを目指し、 $Sp_n(\mathbb{R})$ の Weyl 群の作用の下にある関数等式を満足することを目指す。この ようにして構成された "Eisenstein 級数" がどのような意味 を持っているかは、今のところ、はっきりしていないが、少 くとも形式的には、 $\mathcal{H}^{(n,0)}$ 上の Eisenstein 級数の極めて自然な

拡張である。

2. Siegel 上半平面の場合。まず、 $\mathcal{H}^{(n,0)}$ の場合の結果を復習する。

$$G = Sp_n(\mathbb{R}) = \left\{ g \in M(2n; \mathbb{R}) ; gJ^T g = J \right\},$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = Sp_n(\mathbb{Z}) = Sp_n(\mathbb{R}) \cap M(2n; \mathbb{Z}),$$

$$\Gamma_\infty = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_n & * \\ \hline 0 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}_n \end{array} \right) \in Sp_n(\mathbb{Z}) \right\}$$

と置く。 $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G$ は、 $Z \in \mathcal{H}^{(n,0)}$ に次のようにして作用する：

$$g \cdot Z = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}.$$

ここで $\det(CZ + D)$ は決して零に等しくないことに注意する。

任意の $A \in M(n; \mathbb{R})$ に対して、 A の右上の $i \times i$ 小行列の行列式を $d_i(A)$ で表わすことにする：

$$d_i(A) = \det A_i, \quad A = \begin{pmatrix} \overbrace{A_i}^i & * \\ * & \overbrace{\quad}^{n-i} \end{pmatrix}_{n-i}.$$

$Z \in \mathcal{H}^{(n,0)}$ について、

$$E(Z; s) = \sum_{\sigma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \prod_{i=1}^n |d_i(Y_\sigma^{-1})|^{-s_i}, \quad s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n$$

で定義される Dirichlet 級数と考へる。ここで、 $\gamma_\sigma = \Gamma_\sigma \cdot Z$
 $(\sigma \in \Gamma)$ である。これが $\mathcal{H}^{(n)}$ 上の $(Sp_n(\mathbb{Z}))$ に属する) 実解
 析的 Eisenstein 級数である。 $E(Z; s)$ の関数等式と記述する
 ためには、変数 $s \in$

$$\begin{cases} s_1 = \lambda_2 - \lambda_1 + 1/2 \\ s_2 = \lambda_3 - \lambda_2 + 1/2 \\ \dots\dots\dots \\ s_{n-1} = \lambda_n - \lambda_{n-1} + 1/2 \\ s_n = -\lambda_n + 1/2 \end{cases}$$

で定まる変数 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ に変換しておくと便利である。
 次に、

$$\Lambda(Z; \lambda) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \eta(2\lambda_i - 2\lambda_j) \eta(2\lambda_i + 2\lambda_j) \cdot \prod_{i=1}^n \eta(2\lambda_i) \cdot E(Z; s),$$

$$\eta(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) \quad (\zeta(s) = \eta\text{-マングローブ関数})$$

とおく。

$\mathfrak{S}_n$ を n 次対称群として、 $\mathfrak{S}_n$ の $\{\pm 1\}^n$ の置換としての
 自然な作用を考へ、 $\{\pm 1\}^n$ と $\mathfrak{S}_n$ の半直積を W で表わす。
 群 W における積は、

$$(\mu, \sigma) \cdot (\nu, \tau) = (\mu \cdot \sigma^{-1} \nu, \sigma \tau) \quad (\mu, \nu \in \{\pm 1\}^n, \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n)$$

で与えられている。 W は $Sp_n(\mathbb{R})$ の Weyl 群 (と同型な群)
 である。群 W は、変数 λ に次のようにして作用する：

$(\mu, \sigma) \cdot \lambda = (\mu_1 \lambda_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \mu_n \lambda_{\sigma^{-1}(n)})$, $\mu \in \{\pm 1\}^n$, $\sigma \in S_n$.
 以上の準備の下で, Eisenstein 級数 $E(Z; s)$ の主要性質は、
 次のように述べられる。

定理. (1) $E(Z; s)$ は、 $\operatorname{Re} s_1, \dots, \operatorname{Re} s_n > 1$ で絶対収束し、 s の有理型関数として $\mathbb{C}^n$ 上に解析接続される。

(2) 任意の $w \in W$ に対し、恒等式

$$\Lambda(Z; w\lambda) = \Lambda(Z; \lambda)$$

を満たす。

$$(3) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i - 1/2)(\lambda_j + \lambda_i + 1/2) \prod_{i=1}^n (\lambda_i + 1/2)$$

$$\times \prod_{1 \leq i < j \leq n} \{ (2\lambda_j - 2\lambda_i + 1) \} \{ (-2\lambda_j - 2\lambda_i + 1) \}$$

$$\times \prod_{i=1}^n \{ (-2\lambda_i + 1) \} \cdot E(Z; s)$$

は、整数である。

この定理は、

R.P. Langlands, Lect. notes in Math. 544, Springer, 1976.

の一般論に含まれるが、初等的証明が、

R.P. Langlands, *ibid.* Appendix 1, pp. 236-268.

及び.

B. Diehl, J. Reine und Angew. Math. 317 (1980), 40-73
 において与えられている。

3. 符号 $(p, n-p)$ ($p \neq 0, n$) の場合への拡張。 $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G$, $z \in \mathcal{H}^{(p, n-p)}$ とすると, Siegel 上半平面 $\mathcal{H}$ のときと異な
 って, $\det(Cz+D) = 0$ となることがある。そこで, $\det$
 $(Cz+D) \neq 0$ のときに限って, $g.z = (Az+B)(Cz+D)^{-1}$
 と定義する。^{注1)}

$z \in \mathcal{H}^{(p, n-p)}$ について,

$$G_z = \{ g \in G ; Az+B = z \cdot (Cz+D) \}$$

と置く。 $g \in G_z$ ならば, 自動的に $\det(Cz+D) \neq 0$ となり, G_z
 は, z における G の isotropy subgroup とみとせよ。又, 任
 意の z に対して $G_z \cong U(p, n-p)$ (符号 $(p, n-p)$ の不定符
 号のエルミート形式のユニタリ-群) である。 $\Gamma_z = \Gamma \cap G_z$

注1) $\mathcal{H}^{(p, n-p)}$ は, $p \neq 0, n$ のときには, $G = Sp_n(\mathbb{R})$ の等値空間であるが,
 等値空間 $Sp_n(\mathbb{R})/U(p, n-p)$ の商集合とみとられる。 $g.z$ がこの商集合をばすれ
 る場合には, $g.z$ を上の形で定義してよい。従って G の作用の点からみ
 れば不自然なため, Siegel 上半平面の analogy を考慮し, 2) のような
 定式化を行った。

と置く。

$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$ について, ε_i 座のうちで $+1$ に等しいものの数が p 個, -1 に等しいものの数が $n-p$ 個あるときに $\text{sgn } \varepsilon = (p, n-p)$ と書くことにする。

$\mathcal{G}_\varepsilon^{(p, n-p)} = \{Z \in \mathcal{G}^{(p, n-p)}; \text{sgn } d_i(Y^{-1}) = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_i \ (1 \leq i \leq n)\}$ と置く。 $\mathcal{G}_\varepsilon^{(p, n-p)} \neq \emptyset$ とする必要十分条件は, $\text{sgn } \varepsilon = (p, n-p)$ である。

いま, 虚二次体 K を一つとって固定しておく。そして, $\mathcal{G}_\mathbb{Q}^{(p, n-p)} = \mathcal{G}^{(p, n-p)} \cap M(n; K)$ と置くことにより, $\mathcal{G}_\mathbb{Q}^{(p, n-p)}$ の $\mathbb{Q}$ -structure を定める。 $Z \in \mathcal{G}_\mathbb{Q}^{(p, n-p)}$ として,

$$\Gamma(Z, \varepsilon) = \left\{ \sigma \in \Gamma; \sigma \cdot Z \in \mathcal{G}_\varepsilon^{(p, n-p)} \right\}$$

と置く。 $\Gamma(Z, \varepsilon)$ は, 右から Γ_Z の, 左から Γ_∞ の元をかけることによって閉じている。さて, $\mathcal{G}^{(p, n-p)}$ 上の Eisenstein 級数 E

$$E(Z, \varepsilon, S) = \sum_{\sigma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma(Z, \varepsilon) / \Gamma_Z} \prod_{i=1}^n |d_i(Y_\sigma^{-1})|^{-S_i}$$

$(Z \in \mathcal{G}_\mathbb{Q}^{(p, n-p)}, \varepsilon \in \{\pm 1\}^n, \text{sgn } \varepsilon = (p, n-p), S \in \mathbb{C}^n)$ で定義する。ここで, $\mathbb{Q}$ -有理点 $Z \in \mathcal{G}_\mathbb{Q}^{(p, n-p)}$ に対してのみ, Eisenstein 級数が定義されていることに注意する。 $p = n$ のときと同様に,

$$\Lambda(z, \varepsilon; \lambda) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \gamma(2\lambda_i - 2\lambda_j) \gamma(2\lambda_i + 2\lambda_j) \prod_{i=1}^n \gamma(2\lambda_i) \times E(z, \varepsilon; S)$$

とおく。変数 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ と変数 $S = (S_1, \dots, S_n)$ との関係も前と同様である。このとき、次の定理が成立つのである。

定理. (1) $E(z, \varepsilon; S)$ ($z \in \mathcal{S}_\alpha^{(p, n-p)}$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}^n$, $\text{sgn } \varepsilon = (p, n-p)$) は、 $\text{Re } S_1, \dots, \text{Re } S_n > 1$ で絶対収束し、 S の有理型関数として $\mathbb{C}^n$ 上に解析接続される。

(2) 任意の $w \in W$ に対し、関数等式

$$\Lambda(z, \varepsilon; w\lambda) = \sum_{\text{sgn } \gamma = (p, n-p)} C_w(\varepsilon, \gamma; \lambda) \Lambda(z, \gamma; \lambda)$$

が成り立つ。ここで $C_w(\varepsilon, \gamma; \lambda)$ は、 $z \in \mathcal{S}_\alpha^{(p, n-p)}$ に無関係に λ の有理型関数であり、三角関数を用いて表わされる。

(3) Weyl 群 W の生成元として、

$$w_\alpha = (\alpha, \alpha+1) \in \mathfrak{S}_n \quad (1 \leq \alpha \leq n-1),$$

$$w_n = (1, \dots, 1, -1) \in \{\pm 1\}^n$$

をとると、これらの元に対して $C_w(\varepsilon, \gamma; \lambda)$ の具体的表示は、次のとおりである：

$$(i) \quad C_{w_n}(\varepsilon, \gamma; \lambda) = \begin{cases} 1 & \varepsilon = \gamma \\ 0 & \varepsilon \neq \gamma \end{cases}$$

(ii) $1 \leq \alpha \leq m-1$

$$C_{w_\alpha}(\varepsilon, \eta; \lambda) = \begin{cases} 0 & , \eta \neq \varepsilon, w_\alpha \varepsilon \\ 1 & , \eta = \varepsilon = w_\alpha \varepsilon \\ \sec \pi(\lambda_\alpha - \lambda_{\alpha+1}) & , \eta = \varepsilon \neq w_\alpha \varepsilon \\ \tan \pi(\lambda_\alpha - \lambda_{\alpha+1}) & , \eta = w_\alpha \varepsilon \neq \varepsilon . \end{cases}$$

$$(4). \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i - 1/2)^2 (\lambda_j + \lambda_i + 1/2)^2 \cdot \prod_{i=1}^n (\lambda_i + 1/2)^2$$

$$\times \prod_{1 \leq i < j \leq n} \{ (2\lambda_j - 2\lambda_i + 1) \} (-2\lambda_j - 2\lambda_i + 1)$$

$$\times \prod_{i=1}^n \{ (-2\lambda_i + 1) \} \times E(z, \varepsilon; s)$$

は、整数数である。

Remark 1. 11かたは虚二次体 K を持つときも、 $z \in \mathcal{O}_K^{(p, n, p)}$ とするときにも、 $E(z, \varepsilon; s)$ は形式的に考之ることとはできるが、 $p \neq 0$, n たらば、この Dirichlet 級数は一般には収束しない。

Remark 2. 定理の証明は、

F. Sato, Tohoku Math. J. 34 (1982), 437-483.

に述べられている方法 (既約でない概均値ベクトル空間の相対不変式の部分 Fourier 変換) を適当に修正してなされる。

$E(z, \varepsilon; s)$ は、概均値バクトル空間に付随する Zeta 関数として理解することはできないのだが、上記論文の方法をこの場合に適用するように変形することができるのである。

Remark 3. 上の定理は、Riemann 対称空間の族に納まらない半単純対称空間に対して Eisenstein 級数の類似物を構成する可能性を示唆している。 $SL(n; \mathbb{R})/SO(p, n-p)$ という空間に対しては、

F. Sato, Ann. of Math. 116 (1982), 177-212.

ですぐに実行されている。さらに、 $\mathbb{Q}$ 上 split する単連結半単純代数群について、 $Sp_n(\mathbb{R})/U(p, n-p)$, $SL(n; \mathbb{R})/SO(p, n-p)$ の両方を含む形の結果を得ることができ。