

非可換トーラス入門

大阪教育大学 綿谷安男 (Yasuo Watafani)

§0. はじめに

位相的な2次元トーラス  (T^2 とか) はその上にいろんな構造を入れて各種の立場から考察できる。例えば向きづけ可能な実2次元コンパクト微分可能多様体の構造が入る。その de Rham cohomology $H^p(T^2, \mathbb{R})$ は T^2 上の微分形式のつくる空間 (の同値類) で、次のように計算される。

$$H^0(T^2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \quad (\text{生成元は恒等的に1の関数})$$

$$H^1(T^2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2 \quad (\text{生成元は } d\theta_1 \text{ と } d\theta_2)$$

$$H^2(T^2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \quad (\text{生成元は } d\theta_1 \wedge d\theta_2)$$

他にも複素多様体の構造を入れ閉リーマン面とみたり、代数多様体とみると楕円曲線になる。またリーマン計量を使って微分幾何学的考察をしたりできる。しかしこれらはすべて、可換な幾何学の中の種々の階層の違いからくる立場の違いである。それは、その上の (適切な) 関数のつくる環の違い

に反映してくるが、その環は可換である：

可 換 の 世 界			非可換の世界
(研究分野)	(幾何的空間 M)	(M 上の関数の $\mathcal{F}$ (環))	非可換環
測度論	測度空間	可測関数 $L^p(M)$	Von Neumann 環
位相幾何	位相空間	連続関数 $C(M)$	C^* -環
微分位相幾何	微分可能多様体	微分可能関数 $C^p(M)$	?
代数幾何	代数多様体	多項式関数 $P(M)$	?

非可換トーラスの住んでいる世界は、左側の可換の世界、つまり通常の(種々の)幾何、ではなく、右側の特に C^* -環の世界なのである。非可換トーラスは、 $\theta \in [0, 1]$ をパラメータにもつ C^* -環の family A_θ , およびその中の dense な subalgebras A_θ^∞ 達のことをいう。そして $\theta \rightarrow 0$ とした時 $A_\theta \rightarrow A_0 = C(\mathbb{T}^2)$ とトーラス $\mathbb{T}^2$ 上の連続関数環になるように “deform” されたものと思えばよい。これは “ θ -アタロフ” の理論で $\theta \rightarrow 1$ とした時に一般化される前の量が回復されているのと類比的である。“ θ -アタロフ” の理論では、2項定理の θ -アタロフを一般化し Ramujan の恒等式を得、それを特殊化するとテータ関数の積表示が出る、というおもしろい手品のような話がある。しかし非可換トーラスの場合には、そんなおもしろいことがあるかしら? とつい思ってしまうことは慎みましょう。

このノートは非可換トーラスの話をも全く知らない非専門化向けの入門的解説です。それ故作用素環を研究している人たちは、私のこのノート以外の所へすぐにお進みください。

さて非専門化の人達のために極く初歩的な所から始めます。非可換化するとは、量子化しなさい、ということ、この場合は、ヒルベルト空間上の作用素のことばを使って定式化しなさい、となります。

Def ヒルベルト空間 H 上の有界作用素全体のつくる環を $B(H)$ とする。 $B(H)$ の $*$ 部分環で 1 に 4 からくる位相により閉じているものを C^* 環 という。もちろん抽象的にも定義できる: C^* 環とは Banach $*$ 環で $\|x^*x\| = \|x\|^2$ という条件を満たすものである。■

なぜ非可換の環の中で特に C^* 環を選ぶのか? というと、次のよく知られた定理により、 C^* 環とは非可換な(局所)コンパクト空間とすることができからです。

定理 I (Gelfand-Naimark) 可換な C^* 環 A は局所コンパクト T_0 -空間 M 上の無限遠で 0 になる関数全体のつくる環 $C_0(M)$ と同型である: $A \cong C_0(M)$ 。特に A が単位元をもつことと、 M がコンパクトであることは同値である。■

このように幾何学的空間 M のことばを使わずに環とその上の module 等のことばだけで全ての幾何が構成できる

はずいあるという思いこみのことを「pointless geometry」といいます。この立場で、例えば非可換トーラス A_θ 上で微分幾何を、展開しようというのが目的です。

§1. 非可換トーラス A_θ の定義

非可換トーラスは別名「無理数回転環」とよばれる。その定義の仕方はざっと数えても次にあげた位、色々ある

① 生成元とその交換関係

② $\mathbb{Z}^2$ の射影表現のつくる C^* -環

③ 接合積 $C(\mathbb{T}) \rtimes \mathbb{Z}$

④ リー群 $\mathbb{T}^2$ からの ergodic action をもつ C^* -環

⑤ Kronecker foliation からつくる C^* -環

⑥ ある種の群 (例えば Heisenberg 群) G の $C^*(G)$ の primitive ideal

⋮

① 生成元とその交換関係

$\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ として $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ は $x, y \in \mathbb{R} \pmod{1}$ と思う。トーラス $\mathbb{T}^2$ 上の連続関数環 $C(\mathbb{T}^2)$ の生成元は次の絶対値1の値をもとる関数 u と $v \in C(\mathbb{T}^2)$ である:

生成元	交換関係
$\begin{cases} u(x, y) \overline{u} e^{2\pi i x} \\ v(x, y) \overline{v} e^{2\pi i y} \end{cases}$	$\begin{aligned} & \textcircled{1} (u=v) \quad u^*u = uu^* = 1 \\ & \textcircled{2} (u \neq v) \quad v^*v = vv^* = 1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & \textcircled{1} (u=v) \quad u^*u = uu^* = 1 \\ & \textcircled{2} (u \neq v) \quad v^*v = vv^* = 1 \end{aligned}} \right) \text{(絶対値1という)} \\ & \textcircled{3} (\text{可換}) \quad uv = vu$

以下では簡単のため、特に断わらない限り、 $\theta \in [0, 1]$ は無理数とする。

[Def] 非可換トラス $\equiv$ 無理数回転環 A_θ とは 2つの unitary u, v (ie $u^*u = uu^* = 1, v^*v = vv^* = 1$) から生成された C^* -環 A_θ で交換関係 $uv = e^{2\pi i \theta} vu$ をもつもの。

■ A_θ の簡単な性質

⑦ $\ll A_\theta = C^*(u, v)$ の元は Fourier 展開できる $\gg$

$$\forall a \in A_\theta \quad a = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} a_{n,m} u^n v^m \quad \text{と一意に表れる。}$$

(ただし収束は L^2 の意味であることに注意)

⑧ $\ll A_\theta = C^*(u, v)$ は生成元のとり方によらず一意的に定まる $\gg$

他に u', v' という unitary で $u'v' = e^{2\pi i \theta} v'u'$ を満たすものをもつとき $\exists \varphi: C^*(u, v) \rightarrow C^*(u', v')$: *同型で $\varphi(u) = u', \varphi(v) = v'$ となる。

⑨ $\ll A_\theta$ は simple だ $\gg$

もし ideal $J \triangleleft A_\theta$ があるとして $J = 0$ をいえないように、quotient map $\pi: A_\theta \rightarrow A_\theta/J$ を考える。

$$uv = e^{2\pi i \theta} vu \Rightarrow \pi(u)\pi(v) = e^{2\pi i \theta} \pi(v)\pi(u)$$

ここで⑧を適用して π は同型となり、 $J = \ker \pi = 0$

⑩ $\ll A_\theta$ 上には trace $\tau: A_\theta \rightarrow \mathbb{C}$ が一意的に存在する $\gg$

ここで τ が trace とは正規化された ($\tau(1) = 1$)、正値 ($\forall a \in A_\theta \quad a \geq 0 \Rightarrow \tau(a) \geq 0$) functional で $\tau(xy) = \tau(yx)$ となるもの。

(存在) $a = \sum_{n,m} a_{n,m} u^n v^m \in A_\theta$ と Fourier 展開してよい

$$\tau(a) = a_{0,0} \quad \text{と定数項 } a_{0,0} \text{ をとればよい}$$

可換の場合はちょうど $f \in C(T^1)$ に対する積分 $\int f(x) dx$ に当たる

(一意性) 他に trace $\tau': A_\theta \rightarrow \mathbb{C}$ があったとしよう。

$\tau'(a) = a_{0,0}$ を示せばよい。 $n \neq 0$ か $m \neq 0$ なら $\tau(u^n v^m) = 0$ を示せばよい。例えば $m \neq 0$ としよう。

$$\begin{aligned} u(u^n v^m)u^* &= u^n(uv^m)u^* = u^n(e^{2\pi i m \theta} v^m u)u^* = e^{2\pi i m \theta} u^n v^m \\ \text{よって } \tau'(u u^n v^m u^*) &= e^{2\pi i m \theta} \tau'(u^n v^m) \quad \text{— 才 } \tau' \text{ が trace} \\ \text{であることより } \tau'(u u^n v^m u^*) &= \tau'(u^n v^m u^* u) = \tau'(u^n v^m) \\ \text{この2式より } (e^{2\pi i m \theta} - 1) \tau'(u^n v^m) &= 0. \quad \theta \text{ が無理数なので} \\ e^{2\pi i m \theta} &\neq 1 \text{ より } \tau'(u^n v^m) = 0 \end{aligned}$$

● $A_\theta = C^*(u, v)$ の1つの具体的構成例

Hilbert 空間 $H = L^2(T)$ 上に2つの unitary u, v をつづ(る):

$$\begin{cases} (u\zeta)(x) = e^{2\pi i x} \zeta(x), & (e^{2\pi i x} \text{ のかけ算作用素}) \\ (v\zeta)(x) = \zeta(x - \theta), & (\theta \text{ のずらし}) \end{cases}$$

ここで $\zeta \in L^2(T)$ かつ $\lambda, \theta \in \mathbb{R} \pmod{1}$ かつ $T = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の元とすると

$$(uv\zeta)(x) = e^{2\pi i x} (v\zeta)(x) = e^{2\pi i x} \zeta(x - \theta)$$

$$(vu\zeta)(x) = (u\zeta)(x - \theta) = e^{2\pi i(x - \theta)} \zeta(x - \theta)$$

よって $uv = e^{2\pi i \theta} vu$ という交換関係が示せた。

u, v は明らかに unitary なので $C^*(u, v) \cong A_\theta$ 。

Heisenberg の交換関係の discrete 版となっている。

- 市原氏は, A_θ は実は 1 コの non-normal operator から生成されることを示していて興味深い.
- 《高次元化》 2 コの unitaries の代わりに n コの unitaries $u_1, u_2, \dots, u_n$ とその間の交換関係 $u_i u_j = e^{2\pi i \theta_{ij}} u_j u_i$ を与えて C^* -環 $C^*(u_1, \dots, u_n)$ をつくる

② $\mathbb{Z}^2$ の射影表現のつくる C^* -環

Def G を局所コンパクト可換群とする. Hilbert 空間 H 上の unitary 作用素全体を $U(H)$ とかく. 写像 $W: G \rightarrow U(H)$ が unitary 表現 とは $W_g W_h = W_{gh}$ ($g, h \in G$) となることであつた. 射影表現 とは, それが群の準同型より絶対値 1 のスカラー π の分だけ違つてもよいことを許したものをいう.

$$W_g W_h = b(g, h) W_{gh} \quad (g, h \in G)$$

ここで $b(g, h) \in \mathbb{T}$. すると b は 2-cocycle $\mathbb{Z}^2(G, \mathbb{T})$ の元となる:

$$b(g, h) b(gh, k) = b(g, hk) b(h, k)$$

b のことを G 上の multiplier ともいう.

例 $A_\theta = C^*(u, v)$ としておく

$$G = \mathbb{Z}^2 \ni g = (n, m) \text{ とかき}$$

$$W_g = W_{(n, m)} = u^n v^m \text{ とおく.}$$

この時 W は $b(g_1, g_2) = b((n_1, m_1), (n_2, m_2)) = e^{-2\pi i \theta m_1 n_2}$

を multiplier にもつ射影表現になっており $A_\theta = C^*(u, v)$ は $\{W(g) \mid g \in G = \mathbb{Z}^2\}$ で生成されている. 実際

$$\begin{aligned}
W_{g_1} W_{g_2} &= W_{(n_1, m_1)} W_{(n_2, m_2)} \\
&= u^{n_1} v^{m_1} u^{n_2} v^{m_2} \\
&= e^{-2\pi i \theta m_1 n_2} u^{n_1} u^{n_2} v^{m_1} v^{m_2} \\
&= e^{-2\pi i \theta m_1 n_2} u^{n_1+n_2} v^{m_1+m_2} \\
&= b(g_1, g_2) W_{g_1+g_2}
\end{aligned}$$

$$\text{さて } W_{g_1} W_{g_2} = b(g_1, g_2) W_{g_1+g_2}$$

$$W_{g_2} W_{g_1} = b(g_2, g_1) W_{g_2+g_1} = b(g_2, g_1) W_{g_1+g_2}$$

より交換関係 $W_{g_1} W_{g_2} = b(g_1, g_2) \overline{b(g_2, g_1)} W_{g_2} W_{g_1}$ が成り立つ

よって $\beta(g_1, g_2) \stackrel{\text{put}}{=} b(g_1, g_2) \overline{b(g_2, g_1)}$ とおくと $\beta: G \times G \rightarrow \mathbb{T}$ は anti-symmetric bicharacter になる。

例 $G = \mathbb{Z}^2$ の時

$$\beta(g_1, g_2) = \beta((n_1, m_1), (n_2, m_2)) = e^{2\pi i \theta (n_1 m_2 - m_1 n_2)} = e^{2\pi i \theta g_1 \wedge g_2}$$

定理 2 (Stern) $W: G \rightarrow \mathcal{U}(H)$: 射影表現とし、それより

導かれる anti-symmetric bicharacter β が non-degenerate と仮定する

(i.e. $(\forall g \in G \ \beta(g, h) = 1) \Rightarrow h = 1$)

$\Rightarrow \{W_g \mid g \in G\}$ により生成された C^* -環は一意に定まる。■

例 $G = \mathbb{Z}^2$ の時

θ が無理数 $\Rightarrow \beta$: non-degenerate

これより A_θ が生成元のとり方に依らずに決まることを示す

《一般化》 (Elliot) G は torsion free discrete abelian group,

β は non-degenerate antisymmetric bicharacter とし A_β を考える

③ 接合積 $C(\mathbb{T}) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z} \cong A_0$



$\alpha \in \text{Homeo}(\mathbb{T})$ を角度 θ だけの回転とする
 $\alpha(x) = x - \theta \pmod{1}$

θ が無理数だと α は ergodic な action でありその orbit space $\mathbb{T}/\sim$ は smooth にならぬ。そこで $C(\mathbb{T}/\sim)$ を考える代わりに接合積 $C(\mathbb{T}) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ を考え、その代用品とする。 $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(C(\mathbb{T}))$ による

Def 接合積 $C(\mathbb{T}) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ とは C^* -環 $B = C(\mathbb{T})$ を係数にもつ群 $G = \mathbb{Z}$ の群環 $B[G]$ の $\mathbb{C}$ による完備化 (たもの) action α により、ひねった積がいらしている:

$$\begin{cases} B \rtimes_{\alpha} G = \overline{B[G]} \supset B[G] \ni b = \sum_{g \in G} b_g \lambda_g \\ \text{共変関係 } \boxed{\lambda_g b \lambda_g^{-1} = \alpha_g(b)} \text{ が成り立つように積をいれる:} \\ (b \lambda_g)(c \lambda_h) = b \lambda_g c \lambda_g^{-1} \lambda_g \lambda_h \stackrel{\text{def}}{=} b \alpha_g(c) \lambda_{gh} \quad \blacksquare \end{cases}$$

今は特に $G = \mathbb{Z}$ なのだから

$$C(\mathbb{T}) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z} \ni f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \lambda^n, \quad f_n \in C(\mathbb{T})$$

と展開できる。この時

- trace τ は $\tau(f) = \tau(\sum_n f_n \lambda^n) = \int_{\mathbb{T}} f_0(x) dx$ である
- $C(\mathbb{T}) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ は実は非可換トラス A_0 と同型になる

$$\left(\begin{array}{l} v(x) = e^{2\pi i x} \text{ とおくと } v \in C(\mathbb{T}) \text{ は } C(\mathbb{T}) \text{ の生成元} \\ \text{共変関係 } u v u^{-1} = \alpha(v) = e^{2\pi i \theta} v \text{ あり} \\ u v = e^{2\pi i \theta} v u \end{array} \right)$$

- $A_0 \cong C(\mathbb{T}) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ が simple であることは action α が minimal (各 orbit が dense) であることからも示せる。

④ 1)-群 $\mathbb{T}^2$ からの ergodic action をもつ C^* -環は A_θ

非可換トーラス A_θ 上の 1)-群 $\mathbb{T}^2$ からの action $\gamma: \mathbb{T}^2 \rightarrow \text{Aut } A_\theta$ で $\gamma_{(e^{2\pi i d}, e^{2\pi i p})}(u^n v^m) = e^{2\pi i n d} e^{2\pi i m p} u^n v^m$ となるものがある. Fourier 展開してみるとすぐわかるようにこの action は ergodic である (i.e. fixed point algebra $A_\theta^\gamma = \mathbb{C}$). さらに Olsen - Pedersen - Takesaki により, この逆も成立することかわかる: 1)-群 $\mathbb{T}^2$ からの ergodic action をもつ C^* -環は A_θ に等しい. 宋・片山によつてこれは co action の場合にも一般化されている.

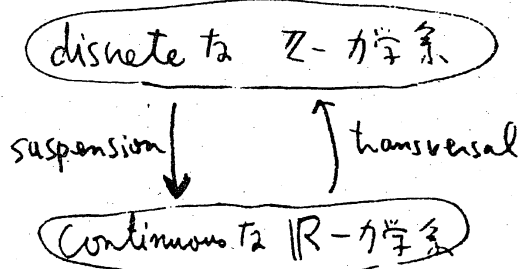
● A_θ 上の trace τ は $\boxed{\tau(a) = \int_{\mathbb{T}^2} \gamma_t(a) dt}$ $a \in A_\theta$ としておける

● 1)-群 $\mathbb{T}^2$ から 2つの canonical な derivation δ_1, δ_2 が導かれる

$$\begin{cases} \delta_1(u^n v^m) = (2\pi i n) u^n v^m \\ \delta_2(u^n v^m) = (2\pi i m) u^n v^m \end{cases}$$

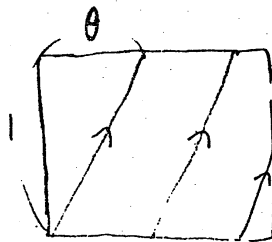
A_θ 上の微分構造として δ_1 と δ_2 を与えることとみなす (後述)

⑤ Kronecker foliation $\mathcal{F}_\theta$ からつくられた C^* -環 A_θ



$$\alpha: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}: \theta \text{ 回転}$$

$$\phi_t: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2: \text{Kronecker flow}$$



2次元トーラス $\mathbb{T}^2$ 上に

$$dx = \theta dy$$

↑ Kronecker foliation $\mathcal{F}_\theta$ が与えられる

一般に $\alpha: X \rightarrow X$: homeomorphism の suspension $\phi_t: M \rightarrow M$ は:

• $M = (X \times \mathbb{R}) / \sim$

• $(\alpha^n(x), t) \sim (x, t+n)$ ($n \in \mathbb{Z}$, $x \in X$)

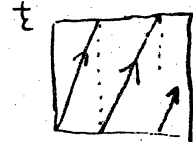
• flow ϕ_t は $\phi_t[(x, s)] = [(x, t+s)]$ で与えられる

特に $\alpha: X = \mathbb{T} \rightarrow X = \mathbb{T}$: θ -回転

$\Rightarrow M = (\mathbb{T} \times \mathbb{R}) / \sim \cong \mathbb{T}^2$

$(x+\theta, t) \sim (x, t+1)$ より

ϕ_t は Kronecker flow と同視できる



と見られる

この時

$C(\mathbb{T}) \rtimes \mathbb{Z} \cong C(\mathbb{T}^2) \rtimes \mathbb{R}$

π
 A_θ

stable

π

foliation $\mathcal{F}_\theta$ から
 $C^*(\mathbb{T}^2, \mathcal{F}_\theta)$ として C^* -環

($\cong$ stable 同型とは compact K を除いた同型のこと)

• foliation からつくられた C^* -環についてもよくわかったことはこの講義録の高井さんの解説をぜひご覧ください。

⑥ 群 C^* -環の primitive quotient $\cong A_\theta$

これは梶原さんに教えてもらったこと: D. Poguntke という人が、例えば ^{connected Lie 群} 2-step nilpotent 群の、群 C^* -環の primitive quotient に simple な非可換 C^* -環 A_θ を除いて現れるということを調べている。ここで primitive quotient というのは群 G のある既約表現 π に対し $C^*(G)/\ker \pi$ であり、既約表現の Image のつくる C^* -環のこと。詳しいことは梶原さん

に御教示を願うことにして、ここでは最も典型的な例を
一つだけあげておく。

例 Discrete Heisenberg group H

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & h_1 & h_3 \\ 0 & 1 & h_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid h_i \in \mathbb{Z} \right\} \text{ is discrete Heisenberg group etc.}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C \stackrel{\text{def}}{=} aba^{-1}b^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \langle\langle a, b \mid ac = ca, bc = cb \rangle\rangle \text{ と表すことができる.}$$

C は H の center の元であり, H は a と b の 2 元で生成される
と π を H の 既約表現とせよ. $\pi(C)$ は $\pi(C^*(H))$ の
center に属するが $\pi(C^*(H))$ は primitive なのだから center は $\mathbb{C}$.
よって $\pi(C) = \lambda \cdot 1 = e^{2\pi i \theta} \in \mathbb{T}$ とおく

$$C = aba^{-1}b^{-1} \text{ より}$$

$$\pi(C) = \pi(a)\pi(b)\pi(a)^{-1}\pi(b)^{-1}$$

$$\text{よって } u = \pi(a), \quad v = \pi(b) \text{ とおくと } u \text{ と } v \text{ は unitary である}$$

$$uvu^{-1}v^{-1} = e^{2\pi i \theta} \text{ であり, } uv = e^{2\pi i \theta} vu$$

$$\text{よって primitive quotient } C^*(H)/\ker \pi \cong \pi(C^*(H)) \cong A_\theta \quad \blacksquare$$

⑦ A_θ が物理にあがられる

discrete Mathieu model や 量子 Hall 効果の $\mathbb{R}^2$ に非可
換トラス A_θ は現われるのだが, それらは一切 Bellissard に
任せてここでは省略する

⑧ Rieffel による非可換トラスの一般化 (市原士郎が詳(1))

M を局所コンパクト可換群

$$G = M \times \hat{M} \ni x = (m, s), y = (n, t)$$

β : Heisenberg cocycle on G :

$$\beta((m, s), (n, t)) = \langle m, t \rangle \quad \begin{matrix} m, n \in M \\ s, t \in \hat{M} \end{matrix}$$

ここで $\langle m, t \rangle$ は M と $\hat{M}$ の duality を示す

β から自然に定まる anti-symmetric bi-character ρ を与える:

$$\rho(x, y) = \rho((m, s), (n, t)) = \overline{\beta(y, x)} = \langle m, t \rangle \overline{\langle n, s \rangle}$$

$D \subset G$: lattice を与える (D : discrete $\cap G/D$: compact)

$$D^\perp = \{y \in G \mid \forall x \in D, \rho(x, y) = 1\} \subset G: \text{lattice を与える}$$

この時

$$C^*(D, \beta) \underset{\text{Morita eq}}{\cong} C^*(D^\perp, \bar{\beta})$$

τ の imprimitive bimodule τ は M 上の Schwartz space

$S(M)$ の completion V が与えられる

例) $M = \mathbb{R}$

$$G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$D = \mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z}$$

$$D^\perp = (\theta^{-1}\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z})$$

$$\begin{cases} \beta((m, s), (n, t)) = e^{imt} \\ \rho((m, s), (n, t)) = e^{i(mt - ns)} \end{cases}$$

(?) (2πの重みはこれでいいのか?)

各自でcheck して欲しい

$$C^*(D, \beta) \cong A_\theta$$

$$C^*(D^\perp, \bar{\beta}) \cong A_{\theta^{-1}}$$

§2. 非可換微分幾何.

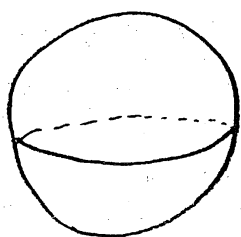
Yang-Mills 理論 を初めとして 非可換微分幾何のことはこの講義録では中神さんの解説に詳しいので、ここでは簡単な所のみとりあげます.

微分幾何で 素晴らしい定理の1つとしてあげられるのは Gauss-Bonnet である。これは多様体上で微分幾何学的に定義されるものが、実は位相幾何学的に定まる量の Euler 標数に一致するというものである。

定理3 (Gauss-Bonnet) M を向きづけ可能なコンパクトな 2次元リーマン多様体とし、 K をそのガウス曲率とし、 $\chi(M)$ を Euler 標数とする。 dA を volume element とする

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_M K dA = \chi(M) \quad \blacksquare$$

例 ① 球 (半径 r)

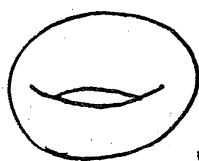


• ガウス曲率 $K = \frac{1}{r^2} > 0$ より

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K dA = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 2$$

• 一方 $\chi(M) = 2$

② 2次元トーラス



• ガウス曲率 K は 外側では正で内側では負

$$\text{よって } K \text{ が打ち消されて } \frac{1}{2\pi} \int_M K dA = 0$$

• 一方 $\chi(M) = 0$

ここでさらに注意すべきことは、左辺のさしあたり実数値をとる量がこの Gauss-Bonnet の定理より Euler 標数という 整数値 に限定されることがみてとれることである。

以上のことを典型例として非可換微分幾何においてもよく似たことをやってみることにしよう。

smooth な非可換トーラス A_θ の元全体を A_θ^∞ とかく。 $\mathcal{E}^\infty$ を A_θ^∞ 上の有限生成射影加群とする (これは smooth な vector bundle の代わり)。§1 の ④ にあるようにリー環 $\mathcal{D}^2$ の action は $\mathbb{R}^2$ からの action (もしくは2つの derivation δ_1, δ_2) を導く。それを使って connection ∇ を定義する。この connection の curvature Θ_∇ の trace $\text{Tr}_\mathbb{C}$ による値をがらす曲率の積分の代わりだと思おう

$$C_1(\mathcal{E}) = \frac{1}{2\pi i} \text{Tr}_\mathbb{C}(\Theta_\nabla)$$

今 $\mathcal{E}^\infty = e A_\theta^\infty$ と A_θ^∞ の projection e を使ってかき直すとこの時次が成立する

$$C_1(e) = \frac{1}{2\pi i} \text{Tr} (e(\delta_1(e)\delta_2(e) - \delta_2(e)\delta_1(e)))$$

右辺はちょうど cyclic homology と K_0 との pairing とみれる。この値が 整数値 になることを以下でみてみよう。(これは量子 Hall 効果の説明する)。

まず、通常の(=可換の)微分幾何と非可換微分幾何を比較対照してみよう。

通常の微分幾何	非可換微分幾何
多様体 M の位相構造	C^* -環 A
多様体 M の微分構造	$A^\infty \subset A$: dense $*$ -環 (1)-群 G 或は 11-環 L からの action)
(連続な) vector bundle	A 上の有限生成射影加群 $\mathcal{E}$
(smoothな) vector bundle	A^∞ 上の有限生成射影加群 $\mathcal{E}^\infty$
$K^0(M)$	$K_0(A)$
Hermit 計量	Hilbert A (或は A^∞) - module $\mathcal{E}$ 上の A 値 (或は A^∞) 値内積 $\langle \cdot \cdot \rangle$
Connection	$\nabla : \mathcal{E}^\infty \longrightarrow \mathcal{E}^\infty \otimes L^* : \text{linear}$ $\nabla_x(\zeta \cdot a) = (\nabla_x \zeta) a + \zeta \cdot \delta_x(a)$ ($\zeta = \tau$ $\delta : L \longrightarrow \text{Der}(A^\infty) : \text{Lie 環の action}$) $x \in L, \zeta \in \mathcal{E}^\infty, a \in A^\infty$
Connection が compatible	$\delta_x(\langle \zeta \eta \rangle) = \langle \nabla_x \zeta \eta \rangle + \langle \zeta \nabla_x \eta \rangle$
Connection の curvature	$\Theta_\nabla : L \times L \longrightarrow \text{End}_A(\mathcal{E}^\infty)$ $\Theta_\nabla(x, y) \overline{\partial}_\zeta \nabla_x \nabla_y - \nabla_y \nabla_x - \nabla_{[x, y]}$
De Rham homology	cyclic cohomology $H^*_\lambda(A^\infty)$
Chern character	$K_0(A) \hookrightarrow H^{\text{even}}_\lambda(A^\infty)$ との pairing

微分構造

C^{∞} 環 A 上に微分構造を入れるとはどういうことかについて現在固まった考え方はまだない。ここではリー群 G からの action $\gamma: G \rightarrow \text{Aut } A$ の無限小生成元をつくることにより G の Lie 環 L からの action $\delta: L \rightarrow \text{Der}(A^{\infty})$ によって微分構造を与えるものと一たしておく。ここで $A^{\infty} = \{a \in A \mid G \ni t \mapsto \gamma_t(a) \in A^{\infty} \text{ は } C^{\infty}\}$ は C^{∞} -ベクトル全体のつくる A の稠密な部分環である。この時

$$\delta_X(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma_{\exp(tX)}(a) - a}{t} \quad \left(\begin{array}{l} a \in A^{\infty} \\ X \in L \end{array} \right)$$

例 $A = A_0$: 非可換トラス とす $A_0 = C^* \{u, v\}$

$G = \mathbb{T}^2$, $L = \text{Lie alg}(G) = \mathbb{R}^2$ の base e_1, e_2 とす

$\gamma: \mathbb{T}^2 \rightarrow \text{Aut } A_0$ は §1 の④で決めたもの:

$$\gamma(e^{2\pi i \alpha}, e^{2\pi i \beta})(u^n v^m) = e^{2\pi i \alpha n} e^{2\pi i \beta m} u^n v^m$$

この時 $A_0^{\infty} = \{a = \sum a_{n,m} u^n v^m \in A_0 \mid \forall k, k' \mid n^k m^{k'} a_{n,m} \rightarrow 0 \text{ (} n, m \rightarrow \infty)\}$

と Fourier 展開 (この時の係数 $(a_{n,m})_{n,m}$ が急減少なもの達からなる。

また $\delta: L = \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Der}(A^{\infty})$ の生成元 $\delta_1 = \delta_{e_1}$, $\delta_2 = \delta_{e_2}$ は

$$\begin{cases} \delta_1(u^n v^m) = 2\pi i n u^n v^m \\ \delta_2(u^n v^m) = 2\pi i m u^n v^m \end{cases}$$

$$\text{特に } \begin{cases} \delta_1(u) = 2\pi i & \delta_1(v) = 0 \\ \delta_2(u) = 0 & \delta_2(v) = 2\pi i \end{cases}$$

さて非可換トラス上にはどれだけ異なる微分構造があるのだろうか？これには Sakai の問題を 高井さんが解いた後, Bratteli, Elliott, Jorgensen, Goodman ... 等の研究があり, どんな Lie 群が非可換トラス上に作用できるかできないか, いさゝか調べられているが, ここでは省略する

● 有限生成射影加群をすべて求める

connection ∇ をつくるために, それが作用する空間である A_0^∞ 上の有限生成射影加群 E_0^∞ をすべて求めることから始めよう。それは次の2段階で行なう

① $K_0(A_0^\infty) = K_0(A_0)$ を計算する

② cancellation theorem を証明して stable 同型な有限生成射影加群が実は本当に同型をい

● K -群を求める

C^* -環 A 上の有限生成射影加群 E は $A \otimes M_n$ のある projection e と $\boxed{E = e A^n}$ という関係で 1:1 に対応しているのだから後どちらも適当に使うことにする。

$$E_1 \underset{\text{stable}}{\cong} E_2 \iff \exists k \quad E_1 \oplus A^k \cong E_2 \oplus A^k$$

有限生成射影加群の stable 同型クラス全体 $\{[E]\}$ が直和でつくる semigroup を Grothendieck 化したものが $K_0(A)$ であった。もちろん $\{[E]\}$ の代わりに $\cup (A \otimes M_n \text{ の projection 達})$ に von Neumann equivalence (か unitary equivalence) を入れたものをやってもいい。

定理4 (Pimsner - Voiculescu - Rieffel)

$$\begin{cases} K_0(A_\theta) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ \hat{K}(A_\theta) = \mathbb{Z} + \theta \mathbb{Z} \end{cases} \quad (\text{ここで } \tau: A_\theta \rightarrow \mathbb{C} \text{ は trace})$$

証明: P-V の 6 項完全同式を使う

$$A_\theta = C(\mathbb{T}) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z} \text{ と 結合積にかける } \tau$$

$$K_0(C(\mathbb{T})) \xrightarrow{1-\alpha_*} K_0(C(\mathbb{T})) \xrightarrow{i_*} K_0(C(\mathbb{T}) \rtimes \mathbb{Z})$$

$$\begin{array}{ccccc} & \uparrow & & & \downarrow \\ K_1(C(\mathbb{T}) \rtimes \mathbb{Z}) & \xleftarrow{i_*} & K_1(C(\mathbb{T})) & \xleftarrow{1-\alpha_*} & K_1(C(\mathbb{T})) \end{array} \quad \text{exact}$$

これを計算に

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & K_0(A_\theta) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(A_\theta) & \longleftarrow & \mathbb{Z} & \xleftarrow{0} & \mathbb{Z} \end{array}$$

また $\tau(e) = \theta$ となる projection は具体的に求めた

$$e \in A_\theta = C(\mathbb{T}) \rtimes \mathbb{Z} \text{ として}$$

$$\boxed{e = v^* g + f + \theta v} \quad (f, g \in C(\mathbb{T}))$$

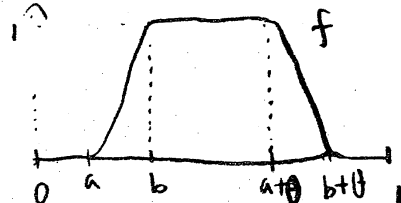
という形に (これを) さがす。

$$e \text{ が projection} \Leftrightarrow \begin{cases} e = e^* \\ e^2 = e \end{cases} \text{ として } f \text{ と } g \text{ に関する関数等式}$$

を得る。 f, g は実数値関数の中をさがすとそれは次の通り:

$$\begin{cases} f = f^2 + g^2 + \alpha^{-1} g^2 \\ g \cdot \alpha(g) = 0 \\ (f + \alpha(1 - 1))g = 0 \end{cases}$$

例として右図のような f をとて g を解く。



- Cancellation theorem は A_θ で成立す

Rieffel は A_θ の Bass stable rank が 2 より下であることなどを使ってこれを Warfield の algebraic K-theory における cancellation theorem を適用することによって示した。

- 有限生成射影加群の標準的モデル

以下では簡潔のため $\tau(e) = \theta$ とする projection に対応する A_θ^∞ 上の有限生成射影加群 $\mathcal{E}^\infty = e A_\theta^\infty$ を構成する

$$\mathcal{E}^\infty = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \equiv \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall p \forall h \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^h |D^p f(x)| = 0 \}$$

という Schwartz 空間をとればよい。

$\mathcal{E}^\infty$ 上の A_θ^∞ の右からの action は次で与える:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_\theta^\infty \text{ の生成元 } u, v \quad (uv = e^{2\pi i \theta} vu) \text{ の action をきめよう} \\ \left\{ \begin{array}{l} (f \cdot u)(x) = e^{2\pi i x} f(x) \\ (f \cdot v)(x) = f(x - \theta) \end{array} \right. \\ \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad f \cdot uv = e^{2\pi i x} f \cdot vu \text{ が check できて} \\ A_\theta^\infty \text{ からの action にあてはまる} \end{array} \right.$$

$\mathcal{E}^\infty = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上に Hermit 計量 (A_θ^∞ 値内積 $\langle | \rangle$) を次の式で与える。 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対し

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle f | g \rangle = \sum a_m u^m \in A_\theta \text{ と展開しておくと} \\ a_m(r) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{f(r-n)} g(r-n+m\theta), \\ \text{つまり } a_m \in C(\mathbb{T}), \quad r \in \mathbb{T}. \end{array} \right.$$

compacts $K(\mathcal{E}) \cong A_{\theta-1} \ni 1$ より $\mathcal{E}$ や $\mathcal{E}^\infty$ が有限生成射影加群

■ E^∞ 上に connection ∇ を構成する

$\nabla: E \rightarrow E \otimes L^*$ の代わりに $L = \mathbb{R}^2$ に対応して
2つの linear map $\nabla_1, \nabla_2: E \rightarrow E$ かつ $\forall a \in A_0^\infty$ に対し

$$(*) \quad \boxed{\nabla_i(f \cdot a) = \nabla_i(f) \cdot a + f \cdot (d_i(a))} \quad i=1,2$$

を満たすものをつければよい

$$\boxed{\text{Def}} \quad \begin{cases} (\nabla_1 f)(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) \\ (\nabla_2 f)(x) = \frac{2\pi i x}{\theta} f(x) \end{cases}$$

これが (*) を満たすことを示そう。例えば ∇_1 について調べよう
 $\forall a \in A_0^\infty$ の代わりに $\mathbb{R}$ の生成元である $a=u$ や $a=v$ の場合
にのみ調べれば十分。ここでは $a=u$ の場合をやってみよう

$$\begin{aligned} & \bullet \nabla_1(f \cdot u)(x) \\ &= \frac{d(f \cdot u)(x)}{dx} = \frac{d(e^{2\pi i x} f(x))}{dx} \\ &= 2\pi i e^{2\pi i x} f(x) + e^{2\pi i x} f'(x) \\ & \bullet (\nabla_1(f) \cdot u + f \cdot (d_1(u)))(x) \\ &= (f' \cdot u)(x) + (f \cdot (2\pi i u))(x) \\ &= e^{2\pi i x} f'(x) + 2\pi i e^{2\pi i x} f(x) \end{aligned}$$

$$\text{よって } \nabla_1(f \cdot u) = \nabla_1(f) \cdot u + f \cdot (d_1(u))$$

他も同様...

• Curvature $\Theta_D : L \times L \rightarrow \text{End}_{A_0}(\mathcal{E}^\infty)$ の計算

$X, Y \in L = \mathbb{R}^2$ に対し

[Def] Curvature $\Theta_D(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$

さて 1) - 環 $\mathbb{R}^2$ は abelian T_2 のため $[X, Y] = 0$. よって

$$\Theta_D(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X$$

Θ_D は交代 2 次形式 なのため $L = \mathbb{R}^2$ の base $\{e_1, e_2\}$ 上でのみ
評価すればよい

$$\Theta_D(e_i, e_i) = 0 \quad i=1, 2$$

$$\Theta_D(e_1, e_2) = \nabla_1 \nabla_2 - \nabla_2 \nabla_1 \in \text{End}_{A_0}(\mathcal{E}^\infty) \text{ を計算しよう}$$

$f \in \mathcal{E}^\infty = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ をとり

$$\begin{aligned} & (\nabla_1 \nabla_2 - \nabla_2 \nabla_1) f(x) \\ &= \frac{d(\nabla_2 f)(x)}{dx} - \frac{2\pi i x (\nabla_1 f)(x)}{\theta} \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{2\pi i x f(x)}{\theta} \right) - \frac{2\pi i x f'(x)}{\theta} \\ &= \frac{2\pi i f(x)}{\theta} + \frac{2\pi i x f'(x)}{\theta} - \frac{2\pi i x f'(x)}{\theta} \\ &= \frac{2\pi i}{\theta} \cdot f(x) \end{aligned}$$

従って $\Theta_D(e_1, e_2) = \frac{2\pi i}{\theta}$ (つまり ∇ は constant curvature である)

• $C_1(\mathcal{E}) = C_1(\mathcal{E}^\infty)$ は整数値

$$\begin{aligned} C_1(\mathcal{E}^\infty) &= \frac{1}{2\pi i} \text{Tr}_\mathcal{E}(\Theta_D(e_1, e_2)) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{2\pi i}{\theta} \text{Tr}_\mathcal{E}(1) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{2\pi i}{\theta} \cdot \text{Tr}(e) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{2\pi i}{\theta} \cdot \theta = 1 \quad (\text{整数!}) \end{aligned}$$

(ここで $\text{Tr}_\mathcal{E}$ は $-\text{Tr}_\mathcal{E}(1) = \text{Tr}(e)$ と正規化した $\text{End}_{A_0}(\mathcal{E})$ 上の trace) ■