

流体力学における差分法の応用

千葉大学工学部 河村 哲也 (Tetuya Kawamura)

1. はじめに

偏微分方程式の近似解法で現在実用上の目的で多用されている方法には大別して差分法（有限体積法も含む）、有限要素法、境界要素法がある。そのなかでどの方法が一番すぐれているかは、それぞれ一長一短がありいちがいには言えない。取り扱う問題に応じて、それぞれの方法の長所が最も生かされる方法を用いるべきであろう。

さて、流体力学の諸問題を支配方程式を数値的に解くことによって数値的に調べる数値流体力学が、電子計算機の進歩と共にこの20年来長足の進歩をとげてきた。初期には取り扱う問題も簡単なポテンシャル問題や簡単な幾何学形状の領域での遅い流れの解析であったが、現在では複雑な領域での乱流や化学反応を含んだ燃焼流れ、気泡を含んだ混相流なども取り扱われるようになってきた。このような数値流体力学の発達なかで、近似解法という意味で主役を演じてきたのは差分法である。それは差分法が単純で素朴な方法であるため、どのような複雑な方程式にも適用でき、一応の解が得られるからである。解くべき方程式が複雑になればなるほど、まず差分法で試してみるというのが、多くの数値流体力学の研究者がとる常套手段である。その上で差分ではうまくいかない場合には別の方法を考える。差分法はまた多くの場合その計算速度が速くまたメモリも節約できる。最終的には計算結果の良し悪しは格子（要素）数に左右されるため、限られた計算機資源では効率の良い差分法が好まれる。

本小論では、はじめに差分法を流体力学の問題に適用したときに現れるいくつかの問題点を指摘する。次に差分法の流体力学への応用例として筆者が最近行った計算を一例紹介する。

2. 流体力学における差分法

数値流体力学的な見地から流体力学の基礎方程式をみたとき、縮まない流体（非圧縮性流体）の流れの解析と縮む流体（圧縮性流体）の流れの解析とでは取り扱い方が異なる。現実の流体には多い少ないは別として必ず圧縮性があるため、圧縮性の解法があれば十分であるように思われる。しかしながら、圧縮性流体の標準的な数値解法は非圧縮に近づくにつれ効率が悪くなるという事情があるため、非圧縮性流れの数値解法が別に考えられている。

2. 1 非圧縮性流れの数値解法

液体の流れでは大部分、また気体の流れでも流速が音速の2、3割以下の場合には流れは非圧縮性と見なせる。すなわちわれわれが経験する流れのほとんどが非圧縮性流れである。非圧縮性流れの基礎方程式は外力がない（無視できる）場合、

次式で表される。

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

$$\partial \mathbf{V} / \partial t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \Delta \mathbf{V} / \text{Re} \quad (2)$$

ここで $\mathbf{V}$ は流速ベクトル、 p は圧力で、すべて無次元化されている。Re は方程式の無次元化のとき現れる無次元のパラメータであり、レイノルズ数と呼ばれている。(1) は流体の質量保存則を表す連続の式、(2) は運動量の保存を表すナビエ・ストークス方程式 (NS 方程式) である。計算機的能力が低い時代はいろいろな仮定をもうけて方程式をより簡単化した上で解かれたこともあるが、現在は (1)、(2) を直接解くことが多い。この方程式系の特徴として

(i) 非線形である。

(ii) 二階の偏微分方程式であり、しかも最高階の係数にパラメータを含む。

(iii) 速度 $\mathbf{V}$ に対して時間発展系であるが圧力 p に対して時間発展系でない。

などが挙げられる。(i), (ii) は圧縮性の場合にも共通であるが、(iii) は非圧縮性独自の特徴である。そしてこの性質 (iii) のため、非圧縮性 NS 方程式の数値的取り扱いが圧縮性 NS 方程式に比べ困難になっている。すなわち、非圧縮性の場合、連続の式を満足するように圧力を決めながら速度を時間発展させる必要がある。

代表的な解法を大別すると (a) 新しい変数を導入して圧力を消去する方法、および (b) 圧力を残す方法がある。3 次元の流れや自由表面を含んだ流れなどに自然に適用できるのは後者である。後者の代表例に MAC 法があり、(2) の div をとって圧力に関するポアソン方程式

$$\Delta p = -\nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + (\text{補正項}) \quad (3)$$

を導きそれを解く。境界条件が速度で与えられる場合、圧力の境界条件は速度の境界条件を NS 方程式に代入して決める。この場合、境界で圧力の勾配が指定されるので、ポアソン方程式の境界条件はノイマン条件になる。他の方法でも非圧縮性の場合しばしばポアソン方程式を解く必要がおこる。したがって、いかにポアソン方程式 (特にノイマン条件の場合) を効率的に解くかが非圧縮性解析の大きなポイントであり、いろいろな方法が研究されている。

ポアソン方程式は差分近似されると連立一次方程式となり、通常 SOR 法など反復法で解かれるが、収束を加速する方法として注目されている方法に多重格子法がある。これは、反復法では格子幅程度の波数成分をもつ誤差は有効に減衰されるが、特に低波数成分の誤差は減衰されにくいという性質に着目した方法であるといえる。すなわちこの方法では計算領域を分割するときに粗い格子と細かい格子を何段階か用意して反復計算の途中で使い分ける。

次に圧力が定まれば、(2) 式から速度を時間発展させる。このとき (2) 式は非線形項 (移流項) と拡散項からできていることに着目する。このうち拡散方程式の部分は解をなめらかにする部分であり、差分スキームの選びかたなどにあまり注意しなくても解が求まる。ただし陽解法ではレイノルズ数が小さい場合には安定性の制限から時間刻みを小さくとり必要があり、そのような場合には陰解法が用いられることもある。

非圧縮性流れの解析でポアソン方程式の解法と同様に問題になるのは非線形項の取り扱いである。これは拡散項の平滑化作用があまり期待できない大きなレイノルズ数の場合に顕著となる。

非線形項

$$u \partial u / \partial x \quad (4)$$

によって速度成分

$$u = \cos(kx) \quad (5)$$

がどのように変化するかを調べる。(5)は速度をフーリエ展開した場合の一つの波数成分と考えてもよく、また外部からの攪乱と考えてもよい。(5)を(4)に代入すれば

$$- (1/2)k \cos(2kx)$$

となるが、ここで重要なことは非線形項により高波数成分（この場合は2倍の波数）がつくられるということである。流体力学的な解釈では、非線形項により大きな渦が変形を受け小さな渦が生成されることを意味している。差分法では格子幅で決まるある波数の成分までしか分解できず、それより大きな波数の成分は小さな波数成分と見なされる。これをエリアシングと呼び、エリアシングが原因で起こる計算の不安定性を非線形不安定性と呼ぶ。（これは陰解法を用いても改善されない。）レイノルズ数が小さい場合には拡散作用によりもともと高波数成分は存在しないため問題はないが、レイノルズ数が大きい場合に計算を安定に進めるには、いかに格子の分解能以上の高波数成分をとり除くかが重要な問題となる。そのために差分スキームに陽に人工的な粘性を加えたり、陰に数値粘性を含んだスキームを用いる。ただしその場合注意が必要で、レイノルズ数の大きい流れの（意味のある）計算を行うためには、数値粘性がレイノルズ数に影響を与えてはいけな。実際の粘性は2階微分で表されるため、数値粘性にはしばしば4階微分で表される粘性が用いられる。より高階の数値粘性の利用も考えられるが、その場合差分近似に多くの格子点を必要とするため、特に境界付近での取り扱いに問題が生じる。

2. 2 圧縮性流れの数値解法

圧縮性流れの基礎方程式は2次元非粘性の場合、次式で表される

$$\partial q / \partial t + \partial E / \partial x + \partial F / \partial y = 0 \quad (6)$$

ただし、 q 、 E 、 F は4成分のベクトルで

$$\begin{aligned} q &= (\rho, \rho u, \rho v, e) \\ E &= (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, u(e + p)) \\ F &= (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, v(e + p)) \end{aligned} \quad (7)$$

で定義される。ここで ρ は密度、 u 、 v は速度の x 、 y 成分、 e は単位体積当たりの全エネルギー、 p は圧力で、状態方程式

$$p = (\gamma - 1) (e - 1/2 \rho (u^2 + v^2))$$

が成り立つ。(γ は比熱比で通常 1.4 である。)

非圧縮性の場合と比べ式は複雑になってはいるが、数値的に見た場合、未知関数がすべて時間発展型になっており取り扱い易い形になっている。すなわち、解法の効率を考えなければ、各式を適当に差分化した上で初期・境界条件を与えれば時間発展的に次々と解が求まる形をしている。

さて非圧縮性の場合と同様に圧縮性の場合でも非線形項(移流項)の取り扱いが最大の問題となる。ただし圧縮性流れでは、非線形性による高波数成分の生成という問題以上に、衝撃波の伝播などの波動現象がいかにより正確に取り扱えるという点がまず問題となる。そこで圧縮性のスキームをテストする際、まず調べなければならないことは、そのスキームが波動方程式をいかによりよく近似できるかという点であり、特に 1 次元の場合には初期値問題

$$\partial u / \partial t + c \partial u / \partial x = 0 \quad (c > 0) \quad (8)$$

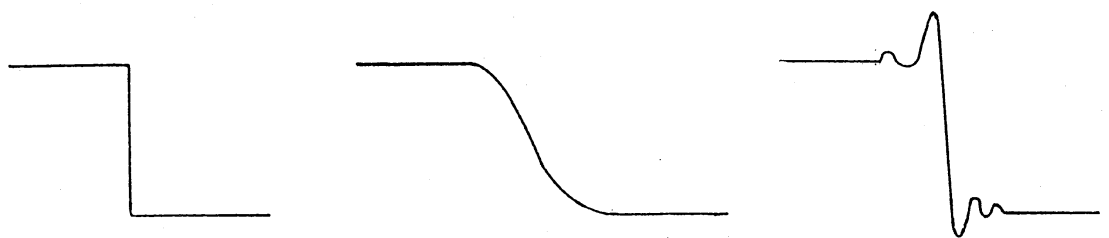
$$u = 1 \quad (x < 0); \quad u = 0 \quad (x \geq 0) \quad (9)$$

あるいは NS 方程式の場合には一次元の衝撃波管問題がしばしばテスト問題として用いられる。

(8), (9) の厳密解は、(9) で表される階段状の不連続が形を変えずに速度 c で右方向に伝播する。それを例えば

$$u_{i,n+1} = C_{i-1} u_{i-1,n} + C_i u_{i,n} + C_{i+1} u_{i+1,n}$$

(スキームは線形、すなわち係数 C は u によらないとする。) で近似した場合の典型的な解の様子を模式図を図 1 に示す。



(a) 厳密解 (b) 一次上流差分 (c) Lax-Wendroff 法
図 1 波動方程式の厳密解および差分近似解の例(模式図)

(a) は厳密解である。また(b) は一次精度上流差分法 ($C_{i-1} = \mu$ 、 $C_i = 1 - \mu$ 、 $C_{i+1} = 0$; $\mu = c \Delta t / \Delta x \cdots$ クーラン数) を用いた場合であり、解は振動はしないが、不連続線はなだらかになる。すなわち流体のことはばで表現すると衝撃波はぼやけることになる。(c) は Lax-Wendroff のスキーム ($C_{i-1} = 1/2 \mu (1 + \mu)$ 、 $C_i = (1 - \mu)(1 + \mu)$ 、 $C_{i+1} = -1/2 \mu (1 - \mu)$) を用いた場合であり、(b) に比べ

ば不連続線は急峻であるが、不連続線近くで振動を起こしている。化学反応をともしなう流れなど解析する場合、この種の振動のため実際には起こらない反応が起こり、それが原因となって別の反応が起こるなど、流れに大きく影響を及ぼすことがある。そこでスキームとして、不連続はなるべくシャープに捕らえることができ、しかも振動をおこさないものが望まれる。振動をおこさないということは、初期に単調であった解が時間をすすめても単調性が維持できるということであるが、実は線形のスキームを用いる限り、単調性が維持できるのは一次精度上流差分だけであることが知られている（Godunovの定理）。そこで精度がよく、振動をおさえることができるスキームはどうしても非線形のものとなる。このようなスキームを得るためには u に依存する形の人工粘性を線形のスキームに付け加えるという方法も考えられるが、経験によらない合理的な方法を用いて振動をおさえるように高精度、高解像度のスキームを構成する方法もある。このようにして得られる一連のスキームはTVDスキーム[1]とよばれ、現在は圧縮性流体解析の標準的方法になっている。

差分法の利点のひとつとして、TVD法を構成するときのように、解くべき方程式の性質に則した細かいスキームの調整が比較的容易にできる点が挙げられる。

2. 3 複雑な領域の取り扱い

有限要素法の大きな利点として、領域形状が複雑な場合でも近似解が得られるという点が挙げられる。しかし差分法でもそれは可能である。差分法を、微分商を差分商に置き換えて解く方法と解釈した場合、領域が格子に分割されていなくても、点が領域内に適当に配置されていれば、（ある点の微分商は近くの点での値を用いて差分商で表現できるため、）差分法で近似できる（グリッドレスの方法）。しかしながら、プログラムの容易さや、結果として得られる連立方程式の解き易さからは、そのような点がある種の格子の交点であることの長所は大きい。そこで差分法では多くの場合、数値的な座標変換を行って複雑な領域を簡単な領域に写像した上で、その領域を格子に分割して計算を行うことが多い。これはもとの領域では曲線格子をつくって計算していることに対応しており、格子生成法とよばれている。格子生成法には、補間法や変換関数を組み合わせて行う代数的な方法と偏微分方程式の解を利用する方法がある。

差分法では、格子生成を行って解を求める方法は標準的になっており、かなり複雑な領域でも精度よく計算できるようになっている。さらに複雑な領域で、全体として格子生成が難しい場合は、領域をいくつかの小部分に分割してそれぞれに格子生成を行なって方程式を解き、それぞれの解を適当な方法でつなぎあわせる方法もある。さらに解くべき方程式の解の中間情報を利用することにより、解に適した格子を生成しながら（解適合格子）、解を求める方法もある。

3. 差分法による計算例

差分法による流体解析の例として、流体による砂の移動の数値シミュレーションについて述べる。このシミュレーションは現実問題として、砂丘が風によりど

のように変形し、移動するののかという問題や橋脚付近で川底がどのように変化するのかなどの問題に応用できる。このシミュレーションは自由境界問題のように変形する境界を含んでいたり、場合によっては乱流モデルの検討や3次元計算を行う必要があるため、取り扱いが困難である。そこでまず差分法を適用するのがよいと考えられる。

3. 1 基礎方程式

流れによる砂の移動の計算を行うため、次の三段階の計算を行う。

- ① 砂の表面上の流れの計算。
- ② 砂の表面上に働く摩擦応力によって移動される砂の量の計算
- ③ 砂の移動による砂の表面形状の変化の計算

最後のステップにより領域形状が変化しそのために流れが変化するので、実際の計算では初期状態から始めて、上述の各ステップを必要な時間まで順次繰り返すことになる。以下各ステップについて簡単な説明を行う。

(a) 流れの計算

支配方程式は連続の式およびNS方程式であり、下添字を添字に関する微分（以下同様）として

$$u_x + v_y = 0 \quad (10)$$

$$D u / D t = -p_x / \rho + (\nu u_x)_x + (\nu u_y)_y \quad (11)$$

$$D v / D t = -p_y / \rho + (\nu v_x)_x + (\nu v_y)_y \quad (12)$$

$$(D / D t = \partial / \partial t + u \partial / \partial x + v \partial / \partial y) \quad (13)$$

と表される。 ν は動粘性係数であり、層流計算の場合は定数とし、乱流計算の場合は簡単のため混合距離モデル

$$\nu = \rho (\iota^2) |U_y| \quad (14)$$

ただし

$$\iota = 0.4 Y (1 - \exp(-Y U \tau / 26 \nu_0)), \quad U \tau = \nu (U_y)^{1/2} \quad (15)$$

を用いた。ただし U は砂表面に沿った方向の速度、 Y は砂表面からの垂直距離で、 Y に関する微分は砂表面に垂直方向に行うものとする。また ν_0 は動粘性係数である。

(b) 砂の輸送

摩擦速度 $U \tau$ から砂の輸送量 q ($g / cm \cdot sec$)を見積る公式は、実験や簡単なモデルに関する考察からいくつかの関係式が提案されている。それらは、二次元の場合、砂が移動しはじめるのに必要な摩擦速度を U_0 とすると、 A 、 B を適当な係数として

$$q = A U \tau ((U \tau)^2 - (U_0)^2) \quad (16)$$

$$q = B(U\tau)^2(U\tau - U_0) \quad (17)$$

の形をしている[2][3]。いずれにせよ $U\tau \gg U_0$ のとき

$$q = A(U\tau)^3 \quad (18)$$

となるので、本研究では C を適当な定数として、

$$q_x = C(U\tau)^3, \quad q_y = C(V\tau)^3 \quad (19)$$

を採用した。

(c) 地形の変化

地表面に沿う方向を s とし、 h を地表面に垂直な方向に測った距離とする。地表面に沿って微小区間をとって考えると、 h の時間変化は区間の両端での q の変化によりもたらされる。すなわち ρ_0 を砂の密度とすると

$$\rho_0 (dh/dt) = -div \quad q \quad (20)$$

が成り立つ。この式を用いることにより h を決定することができる。

砂は表面の傾斜が大きくなるとすべり落ちるため、表面の傾斜には最大値がある（安息角とよばれおおよそ 32° ）。したがって上式を用いて表面を決定したのち傾斜が安息角をこえた場合には、砂の質量が保存されるように考慮しながら傾斜が安息角になるように人工的に表面形状を変化させる必要がある。

3. 2 計算方法

二次元計算については、連続の式が厳密に満足される流れ関数（ ϕ ）－渦度（ ω ）法を用いた。すなわち、 x 方向、 y 方向の運動方程式をそれぞれ y 、 x で微分して差をとり式を多少変形すると渦度 $\omega = u_y - v_x$ の輸送方程式

$$\begin{aligned} \omega_t + (\phi_y - 2\nu_x)\omega_x - (\phi_x + 2\nu_y)\omega_y \\ = \nu\Delta\omega - (\nu_{xx}\phi_{xx} + 2\nu_{xy}\phi_{xy} + \nu_{yy}\phi_{yy}) \end{aligned} \quad (21)$$

が得られる。ここで ω と ϕ の間には

$$\omega = -\Delta\phi \quad (u = \phi_y, \quad v = \phi_x) \quad (22)$$

の関係がある。なお砂表面に沿った座標を用いるのが便利であるので一般座標変換

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta) \quad (23)$$

を用いて基礎方程式を書換えた上で差分計算を行う。

差分格子は砂表面と直交するのが望ましい。一方、境界形状は各時間ステップごとに変化するため、各時間ステップごとに格子生成を行う必要がある。そこで本研究では、直交格子が少なくとも砂表面近くで比較的短時間で生成できる代数型の格子生成を行った。

本研究では以下の順で計算を行った。はじめに初期の地形のデータを用いて、地形を変形させずに3.1、3.2でのべた基礎方程式を座標変換した式を十分長い時間ステップ（定常解がある場合には定常解がもとまるまで）計算する。乱流粘性は ν に関する陰的な方程式にであるため、Newton法を用いて求める。なおこの計算での初期条件は一様流とし、流入側の境界条件は一様流の条件、地表面では粘着条件（速度0）を課す。ただし、これらの条件を ϕ 、 ω で表現する必要がある。その他の遠方境界では ϕ と ω は外挿から決めた。次に得られた解を初期条件として同じ境界条件のもとで3.1でのべた方程式を用いて境界形状を変化させながら基礎方程式を解いた。その際、前述のとおり格子は各時間ステップごとに生成しなおした。

三次元計算には標準的なMAC法を用いた。すなわち、速度場は運動方程式を時間発展させて求め、圧力場は運動方程式の発散をとった式に連続の式を考慮して得られる圧力のポアソン方程式

$$\Delta P = - \left((u_x)^2 + (v_y)^2 + (w_z)^2 + 2(u_y v_x) + 2(v_z w_y) + 2(w_x u_z) \right) + (u_x + v_y + w_z) / \delta t \quad (24)$$

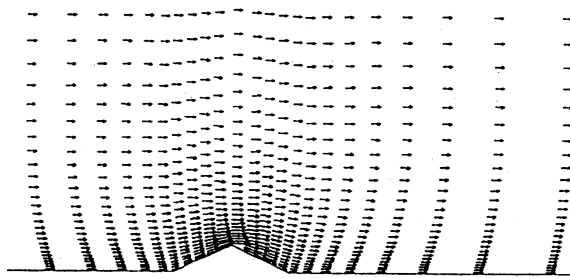
を解いて求める。なお現在はテスト計算の段階であるため、三次元の場合は層流計算のみを行っている。格子についても境界と直交させていない。

基礎方程式の差分化は、時間に関する微分には前進差分を、空間に関する微分は中心差分を用いた。またポアソン方程式はSOR法を用いて解いた。

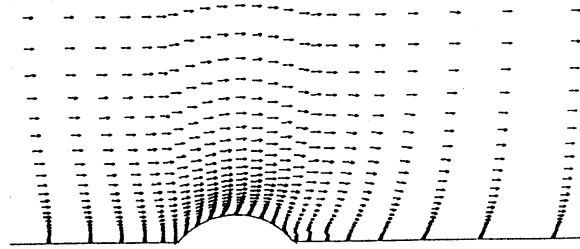
3. 3 計算例

二次元計算の例として、二等辺三角形および円（一部分）の断面をもった砂丘が風によってどのように移動するかを調べた結果を図2、3に示す。それぞれの図において(a)は砂丘を固定した場合の流れ（速度場）を、(b)は(a)の結果を初期条件に用いて砂丘を適当な時間ステップ移動させたあとの計算結果である。なお図はレイノルズ数200の層流計算の結果である。

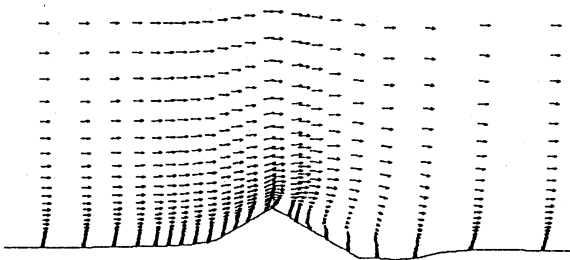
三次元計算の例として、砂面上に種々の角度で立てられた円柱まわりの流れの計算例を図4に示す。左遠方で底面に平行な流れが入ってきているとして(a)は円柱が下流に向かって底面と60°の角度で立っている場合、(b)は垂直の場合、(c)は上流に向かって底面と60°の角度で立っている場合の計算結果である。円柱前面（円柱の左下）の砂が掘られること、およびその様子が円柱の傾斜角により差があることが見られる。原因は円柱前面の砂に接した部分に馬蹄形渦と呼ばれる渦ができるためと考えられる。なおこの場合も層流の計算で、レイノルズ数は1000である。



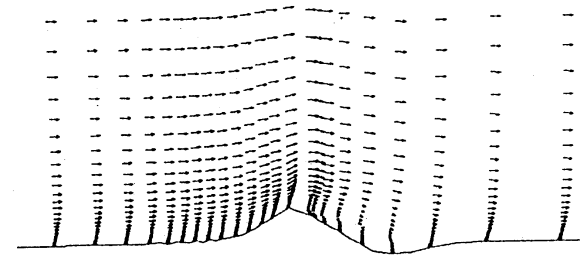
(a) 砂の移動前



(a) 砂の移動前



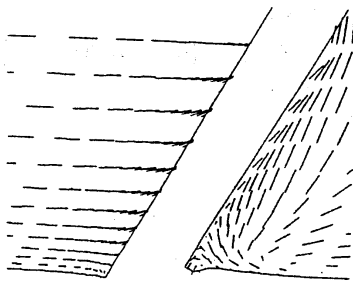
(b) 砂の移動後



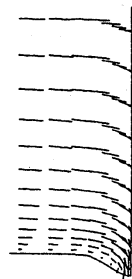
(b) 砂の移動後

図2 三角形断面の砂丘上の流れ

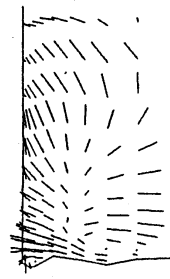
図3 部分円断面の砂丘上の流れ



(a) 下流側に30°傾斜



(b) 傾斜なし



(c) 上流側に30°傾斜

図4 砂面上に種々の角度で立てられた円柱まわりの流れ（速度場）

参考文献

- [1] Harten, A.: On a class of high resolution total-variation-stable finite difference schemes, SIAM Numer. Anal., 21 (1984) pp.1-23
- [2] 土屋: 漂砂量則について、水工学シリーズ86-B-4 (1986) pp303-307
- [3] Fryberger, S.G.: Dune forms and wind regime, A study of global sand seas, NASA Geological survey professional paper 1052 (1979) pp1-19.