

Ginzburg-Landau 方程式について

都 桑 俊 夫 (阪大理)

(12月5日受理)

1° Ginzburg-Landau の現象論的方程式⁽¹⁾は、静磁場中におかれた超電導体の振舞をよく記述することは、最近ますます明らかになって来た。この方程式の微視的理論による導出は、Gor'kov⁽²⁾によりなされ、今では Ginzburg-Landau-Gor'kov 方程式と呼ばれていることは、よく知られている。しかしながら、この方程式の適用領域は、転移温度の近くに限られている。従つて、この方程式を低温領域に拡張することは、重要な問題である。この試みは、色々な人々によりなされようとしたが、彼らは、Gor'kov と同様、高温から即ち、正常状態の側からの、或る種の近似による方法を用いている。今のところ、この方向での拡張の満足な結果はないと思う。

2° これは当然のことと思われる。実際、金属に静磁場をかけたとき、正常状態では、電子は平均の速度が零であるように運動量に変化するが、超電導状態では平均の運動量が零であるように応答する。転移温度のすぐ近くの温度領域では、ほとんどの電子は正常状態にあるので、Gor'kov のように、「正常近似」をすることは承認されるが、彼の立場に立つて、低温まで拡張しようとする、超電導金属の本質を、見誤ってしまう。このことは、著者⁽³⁾ (有限温度)及び Nambu-Tuan⁽⁴⁾ (絶対零度)の磁場によるエネルギー・ギャップの減少の計算でも実際に示されている。

従つて、G-L 方程式の拡張は、Gor'kov とは違つた立場から、いわば「低温近似」でなされなければならないと思う。

3° この報告では、著者の計算⁽³⁾をもとにして、すべての温度領域に使用出来るように、G-L 方程式を拡張する。まず必要な式を書いておく。

$$D(\vec{l}) \Delta_2(\vec{l}) = \sum_{\vec{q}} \sum_{ij}^{xyz} r_{ij}(\vec{l}, \vec{q}) A_i(\vec{q}) A_j(\vec{l} - \vec{q}), \quad (1)$$

$$r_{ij}(\vec{l}, \vec{q}) = \frac{e^2}{m^2} g T \sum_{\vec{p}} \left\{ \delta_{ij} G_{0\omega}(\vec{p}_+) F_{0\omega}(\vec{p}_-) \right. \\ \left. + \frac{1}{m} p_{+i} p_{-j} \left\{ G_{0\omega}(\vec{p}_+ - \vec{q}) (F_{0\omega}(\vec{p}_+) G_{0\omega}(\vec{p}_-) + G_{0\omega}(\vec{p}_+) F_{0-\omega}(\vec{p}_-)) \right. \right. \\ \left. \left. - F_{0\omega}(\vec{p}_+ - \vec{q}) (G_{0\omega}(\vec{p}_+) G_{0-\omega}(\vec{p}_-) - F_{0\omega}(\vec{p}_+) F_{0\omega}(\vec{p}_-)) \right\} \right\}, \quad (2)$$

$$D(\vec{l}) = 1 - g T \sum_{\vec{p}} \left\{ G_{0-\omega}(\vec{p}_+) G_{0\omega}(\vec{p}_-) - F_{0-\omega}(\vec{p}_+) F_{0\omega}(\vec{p}_-) \right\} \quad (3)$$

ここで、 $\Delta_2(l)$ は、磁場を摂動として取扱つたときのエネルギー・ギップ函数の二次変化である。一次の変化は、クーロンゲージ $\vec{q} \cdot \vec{A}(\vec{q}) = 0$ のため零となる。

超電導体は London 型であるとしよう。従つて $q \xi_0 \ll 1$ である。ここで ξ_0 はコヒーレンスの距離である。又磁場は十分弱くて、 Δ も十分ゆつくり空間的に変化するとする。即ち、 $\xi_0 l \ll 1$ とする。この条件のもとで、 $D(\vec{l})$ 及び $r_{ij}(\vec{l}, \vec{q})$ を l 及び q について展開し、 q^2 、 ql 、 l^2 まで取る。この際、簡単のため、 $\vec{q}$ 及び $\vec{l}$ は z 成分のみ、 $\vec{A}$ は $A_z = 0$ ととる。計算の結果は

$$r_{xx}(l, q) = r_{yy}(l, q) \\ = - \frac{e^2 v_F^3 \Delta_0^2 g m^2}{5\pi} S_{3/2} \left\{ \left(1 - \frac{3}{2} \Delta_0^2 I_{5/2} \right) - \frac{v_F^2}{20} \left(I_{5/2} - \frac{5}{2} I_{1/2} \right) \right. \\ \left. \times \left\{ (l - q)^2 + q(l - q) + q^2 \right\} \right\}, \quad (4)$$

$$D(l) = \frac{m^2 v_F g \Delta_0^2}{\pi} S_{3/2} \left\{ 1 + \frac{v_F^2 l^2}{12 \Delta_0^2} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \Delta_0^2 I_{5/2} \right\} \right\} \quad (5)$$

となる。ここで、 Δ_0 は温度 T での BCS エネルギーギャップである。又

$$S_n = T \sum_{\omega > 0} \frac{1}{[\omega^2 + \Delta_0^2]^n} \quad (6)$$

$$I_n = S_n / S_{3/2} \quad (7)$$

である。(4)(5)を(1)に代入し、逆変換して、空間表示に直すと

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \{ \nabla^2 \Delta_2(r) - (2e)^2 A^2(r) \Delta_0 \} \frac{3}{\epsilon_F} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{2} \Delta_0^2 I_{5/2}} \Delta_0^2 \Delta_2(r) \\ - \frac{e^2 \epsilon_F}{5m^2} \cdot \frac{I_{5/2} - \frac{5}{2} \Delta_0^2 I_{7/2}}{1 - \frac{3}{2} \Delta_0^2 I_{5/2}} \{ (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 + 2\vec{A} \cdot (\nabla^2 \vec{A}) \} \Delta_0 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

となる。ここで、Ginzburg⁽¹⁾やBardeen⁽⁵⁾に従って、G.L. 方程式を

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{2m} (\vec{\nabla} - 2ie\vec{A})^2 + f(\Delta) - \frac{e^2 \epsilon_F}{5m^2} \cdot \frac{I_{5/2} - \frac{5}{2} \Delta^2 I_{7/2}}{1 - \frac{3}{2} \Delta^2 I_{5/2}} \right. \\ \left. \times \{ (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 + 2\vec{A} \cdot (\nabla^2 \vec{A}) \} \right\} \Delta(r) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

ととる。 $f(\Delta)$ はいわゆるGinzburg項である。 $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, $\Delta_1(r) = 0$ を考りよして、(8)と(9)を対応づけると

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \Delta} [\Delta f(\Delta)] \right\}_{\Delta=\Delta_0} = - \frac{3}{\epsilon_F} \cdot \frac{\Delta_0^2}{1 - \frac{3}{2} \Delta_0^2 I_{5/2}} \quad (10)$$

となる。ところで、 $A=0$ のときには、 Δ はBCSの Δ_0 になり従って

$$f(\Delta_0) = 0 \quad (11)$$

である。(11)を用いれば,(10)は

$$f(\Delta) = -\frac{3}{\epsilon_F} \int_{\Delta_0}^{\Delta} \frac{\Delta' d\Delta'}{1 - \frac{3}{2} \Delta'^2 I_{5/2}(\Delta')} \quad (12)$$

となる。これが, Ginzburg 項の決定方程式である。

一方電流密度は

$$\begin{aligned} \vec{J}(\vec{r}) = & 2 \left\{ \frac{ie}{2m} T \sum_{\omega} \{ (\vec{\nabla}' - \vec{\nabla}) G_{\omega}(\vec{r}, \vec{r}') \} \right\}_{r' \rightarrow r} \\ & - \frac{e^2}{m} \vec{A}(\vec{r}) T \sum_{\omega} G_{\omega}(\vec{r}, \vec{r}) \} \end{aligned} \quad (13)$$

だから, $\vec{J} = \vec{J}_0 + \vec{J}_1 + \vec{J}_2 + \dots$ と展開すると, $\vec{J}_0 = 0$ で, $\vec{J}_1(\vec{r})$ のフーリエ成分は, よく知られているように, London 領域で

$$\vec{J}_1(\vec{l}) = -\frac{ne^2}{m} \cdot 2\pi \Delta_0^2 S_{3/2} \vec{A}(\vec{l}) \quad (14)$$

となる。又 $\vec{J}_2(\vec{r})$ のフーリエ成分は

$$\begin{aligned} \vec{J}_2(\vec{l}) = & \frac{2e}{m} T \sum_{\omega} \sum_{\vec{p}} \vec{p} G_{2\omega}(\vec{p}_+, \vec{p}_-) \\ & - \frac{2e^2}{m} \sum_q \vec{A}(\vec{q}) T \sum_{\omega} \sum_{\vec{p}} G_{1\omega}(\vec{p}_+ - \vec{q}, \vec{p}_-) \end{aligned} \quad (15)$$

$$G_{1\omega}(\vec{p}_+ - \vec{q}, \vec{p}_-) = -\frac{e}{m} \vec{A}(\vec{l} - \vec{q}) \cdot \vec{p}_- \{ G_{0\omega}(\vec{p}_+ - \vec{q}) G_{0\omega}(\vec{p}_-) + F_{0\omega}(\vec{p}_+ - \vec{q}) F_{0\omega}(\vec{p}_-) \} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} G_{2\omega}(\vec{p}_+, \vec{p}_-) = & -\Delta_2(\vec{l}) G_{0\omega}(\vec{p}_+) F_{0\omega}(\vec{p}_-) - \Delta_2^*(-\vec{l}) G_{0\omega}(\vec{p}_-) F_{0\omega}(\vec{p}_+) \\ & + \frac{e^2}{2m} \sum_q \vec{A}(\vec{q}) \cdot \vec{A}(\vec{l} - \vec{q}) \{ G_{0\omega}(\vec{p}_+) G_{0\omega}(\vec{p}_-) - F_{0\omega}(\vec{p}_+) F_{0\omega}(\vec{p}_-) \} \\ & + \frac{e^2}{2m^2} \sum_q \vec{p}_+ \cdot \vec{A}(\vec{q}) \vec{p}_- \cdot \vec{A}(\vec{l} - \vec{q}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \{ G_{0\omega}(\vec{p}_+ - \vec{q}) \{ G_{0\omega}(\vec{p}_+) G_{0\omega}(\vec{p}_-) - F_{0\omega}(\vec{p}_+) F_{0\omega}(\vec{p}_-) \} \\ & + F_{0\omega}(\vec{p}_+ - \vec{q}) \{ G_{0\omega}(\vec{p}_+) F_{0\omega}(\vec{p}_-) + G_{0\omega}(\vec{p}_-) F_{0\omega}(\vec{p}_+) \} \} \end{aligned} \quad (17)$$

となる。すぐ分るように，我々の geometry では

$$\begin{aligned} \vec{J}_2(\vec{l}) &= -\frac{2e}{m} T \sum_{\omega p} \{ \Delta_2(\vec{l}) + \Delta_2^*(-\vec{l}) \} \vec{p} G_{0\omega}(\vec{p}_+) F_{0\omega}(\vec{p}_-) \\ &= \frac{\pi n e}{2m} \{ \Delta_0 \vec{l} \Delta_2(\vec{l}) - \Delta_0 \vec{l} \Delta_2^*(-\vec{l}) \} S_{3/2} \end{aligned} \quad (18)$$

となる。従つて，全電流は

$$\begin{aligned} \vec{J}(\vec{l}) &= \frac{\pi n}{2} S_{3/2} \left\{ \frac{2e}{2m} \{ \Delta_0 \vec{l} \Delta_2(\vec{l}) - \Delta_0 \vec{l} \Delta_2^*(-\vec{l}) \} \right. \\ & \quad \left. - \frac{(2e)^2}{m} \vec{A}(\vec{l}) \Delta_0^2 \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

だから

$$\begin{aligned} \vec{J}(\vec{r}) &= \frac{\pi n}{2} S_{3/2} \left\{ -\frac{2ei}{2m} \{ \Delta^*(\vec{r}) \vec{\nabla} \Delta(\vec{r}) - \Delta(\vec{r}) \vec{\nabla} \Delta^*(\vec{r}) \} \right. \\ & \quad \left. - \frac{(2e)^2}{m} \vec{A}(\vec{r}) |\Delta(\vec{r})|^2 \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

となる。Ginzburg-Landau の波動関数を

$$\psi(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\pi n}{2} S_{3/2}} \Delta(\vec{r}) \quad (21)$$

と定義すれば，(9)，(20)は

$$\left\{ \frac{1}{2m} \{ \vec{\nabla} - 2ie\vec{A}(\vec{r}) \}^2 + f(\psi) - \frac{\pi \Delta_0^2}{40n} \left(\frac{\xi_0}{\lambda_L} \right)^2 \frac{I_{5/2} - \frac{5}{2} \Delta^2 I_{7/2}}{1 - \frac{3}{2} \Delta^2 I_{5/2}} \right\}$$

$$\times \{ (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 + 2\vec{A} \cdot (\nabla^2 \vec{A}) \} \} \psi(\vec{r}) = 0 \quad (22)$$

$$\vec{J}(\vec{r}) = \frac{2e}{2mi} \{ \psi^*(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) - \psi(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi^*(\vec{r}) \} \\ - \frac{(2e)^2}{m} A(\vec{r}) |\psi(\vec{r})|^2 \quad (23)$$

となる。これらが一般化された G-L 方程式である。(22) には新しい項が加わっていることに注意しよう。

4° (22) は $T \sim T_c$ では, GLG 方程式と完全に一致することを示そう。この場合には, (22) の最後の項は, 少ししか寄与しないので無視する。 Δ は十分小さいので, (12) を Δ' で展開し, 初項のみを収ると

$$f(\psi) = \frac{3}{\pi n \epsilon_F S_{3/2}} \{ \psi_0^2 - |\psi|^2 \} \quad (24)$$

となる。又

$$S_{3/2} \simeq \frac{1}{\pi^3 T_c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} = \frac{7\zeta(3)}{8\pi^3 T_c^2}$$

となる。 ζ はリーマンの ζ 函数である。従つて,

$$\psi(r) = \sqrt{\frac{7\zeta(3)n}{4\pi T_c}} \Delta(r) \quad (25)$$

となる。又

$$\psi_0^2 = \frac{7\zeta(3)n}{(4\pi T_c)^2} \Delta_0^2 = \frac{n}{2} \cdot \frac{T-T_c}{T_c}$$

だから, GLG が定義したパラメーター

$$\lambda = \frac{7\zeta(3)\epsilon_F}{12(\pi T_c)^2}$$

を用いると, (22) は

$$\left\{ \frac{1}{2m} \{ \vec{\nabla} - 2ie\vec{A}(\vec{r}) \}^2 + \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{T_c - T}{T_c} - \frac{2}{n} |\psi|^2 \right\} \right\} \psi(\vec{r}) = 0 \quad (26)$$

となる。(25), (26) は GLG と完全に一致する。

5° T が T_c からだんだんさがるにつれて, 磁気エネルギー項が重要になってくる。 $T \ll T_c$ で, (22) を解こう。著者の論文⁽⁶⁾で示されるように, $T \ll T_c$ では

$$S_{3/2} \simeq \frac{1}{2\pi\Delta^2} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{2\pi\Delta}{T}} e^{-\Delta/T} \right\}$$

$$I_{5/2} \simeq \frac{2}{3\Delta^3} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi\Delta^3}{T^3}} e^{-\Delta/T} \right\}$$

$$I_{7/2} \simeq \frac{8}{15\Delta^4} \left\{ 1 - \frac{1}{8} \sqrt{\frac{2\pi\Delta^5}{T^5}} e^{-\Delta/T} \right\}$$

となり, 従つて

$$\begin{aligned} f(\Delta) &\simeq -\frac{6}{\epsilon_F} \int_{\Delta_0}^{\Delta} \Delta' \sqrt{\frac{T^3}{2\pi\Delta'^3}} e^{\Delta'/T} d\Delta' \\ &\simeq -\frac{6T^2}{\epsilon_F} \sqrt{\frac{T}{2\pi\Delta_0}} e^{\Delta_0/T} \left\{ 1 - e^{-(\Delta_0 - \Delta)/T} \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

となる。これらを用いると, (22) は

$$\left\{ \frac{1}{2m} \{ \vec{\nabla} - 2ie\vec{A}(\vec{r}) \}^2 + \frac{6T^2}{\epsilon_F} \sqrt{\frac{T}{2\pi\Delta_0}} e^{\Delta_0/T} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{2\Delta_0}{nT}(\psi_0 - \psi)\right) \right\} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\pi}{30n} \left(\frac{\xi_0}{\lambda_L} \right)^2 \sqrt{\frac{T^3}{2\pi\Delta_0^3}} e^{-\Delta_0/T} \left\{ 1 - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2\pi\Delta_0^5}{T^5}} e^{-\Delta_0/T} \right\} \\
& \times \{ (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 + 2\vec{A} \cdot (\nabla^2 \vec{A}) \} \} \psi(\vec{r}) = 0 \quad (28)
\end{aligned}$$

となる。運動エネルギーの項は，他の項に比して小さいので，簡単のため無視すれば，

$$\begin{aligned}
\psi(\vec{r}) = \psi_0 + \frac{\sqrt{n} T}{2\Delta_0} \ln \left\{ 1 + \frac{\pi \epsilon_F}{180 n \Delta_0 T} \left(\frac{\xi_0}{\lambda_L} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2\pi\Delta_0^5}{T^5}} e^{-\Delta_0/T} \right\} \right. \\
\left. \times \{ (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 + 2\vec{A} \cdot (\nabla^2 \vec{A}) \} \right\} \quad (29)
\end{aligned}$$

となる。磁場が十分弱いときには

$$\begin{aligned}
\psi(\vec{r}) = \psi_0 + \frac{\pi \epsilon_F}{180 n \Delta_0} \left(\frac{\xi_0}{\lambda_L} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2\pi\Delta_0^5}{T^5}} e^{-\Delta_0/T} \right\} \\
\times \{ (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 + 2\vec{A} \cdot (\nabla^2 \vec{A}) \} \quad (30)
\end{aligned}$$

となる。もとの Δ でかくと

$$\begin{aligned}
\Delta(\vec{r}) = \Delta_0 + \frac{\pi^2}{90} \cdot \frac{e^2 v_F^2}{\Delta_0} \xi_0^2 \left\{ 1 - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2\pi\Delta_0^5}{T^5}} \times e^{-\Delta_0/T} \right\} \\
\times \{ (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 + 2\vec{A} \cdot (\nabla^2 \vec{A}) \} \quad (31)
\end{aligned}$$

である。これは著者(3)及びNambu-Tuan(4)の結果と全く一致する。

6° 我々は摂動論から出発して，一般化されたGL方程式を導いた。それらは(21)，(22)，(21)及び(12)で与えられる。転移点の近くではGLG方程式と完全に一致する。しかし，低温では，全く新しい項が現われる。先に述べた理由により，この項は，Gor'kovのような「正常近似」では得られないものである。従つて，Gor'kovよりは，より一般的なGL方程式の微

視的証明とも云えるだろう。

今後の問題について云えば，磁場を摂動として取扱わないようなやり方で，導出を試みる必要があろう。数埋物理としても，面白い問題である。

終りに，色々御討論下さった，阪大教養部の西山教授に感謝します。

参 考 文 献

- (1) V.L. Ginzburg, L.D. Landau, ZETF 20 1064(1950)
- (2) L.P. Gor'kov, ZETF 36 1918(1959)
- (3) T. Tsuzuki, Progr. Theor. Phys. 30 569(1963)
- (4) Y. Nambu, S.F. Tuan, Phys. Rev. 128 2622(1962)
- (5) J. Bardeen, Encyclopedia of Physics, 15 274
- (6) T. Tsuzuki, Progr. Theor. Phys. to be published.