

数理解析レクチャー・ノート 1.

孤 立 特 異 点 と $\bar{\partial}_b$

倉 西 正 武 講

1976年6月

数理解析レクチャー・ノート刊行会

はしき

倉西正武教授が1975年6月から12月にかけて、日本を訪れ、京大数理研に滞在された。この機会に倉西氏から組織的な講義を伺いたいと思い、数理研共同利用事業として一つの集会を実現してもらった。会は75年10月に、一週間にわたって行われ、倉西氏の講義のべ約10時間のほか、何人かの方の講演をもらった。

その際、倉西氏の講義をノートにして講義録に作り、講義に出席されなかった人々にも見てもらえるようにしたいと思って、赤堀(京大)、倉本(東大)、辻下(東大、現在は阪大)の三氏にノート作りをお願いした。予め分担部分をきめたので、後の方に当たった方ほど御苦労であったことと思う。この形にできたのは、これらの方々の御努力のおかげである。ここに厚くお礼申上げる。

赤堀氏は微分幾何的部分の formulation を見直して、スッキリしたものにしてくれたので、倉西氏のもとの形からは離れるがその方を採った。函数論的部分については、これも数理研を訪街中の Yum-Tong Siu (蕭蔭堂) 教授に解説していただくことができたので、それに従って説明を加えた。分担者がちがうために起った記述のギャップを調整するのは、中野の仕事であったが、十分調整できない所も残った。途

中調整のつもりで間違いをほこってしまった。ともあつつか
と、慶れもする。倉田氏の原論文自身から1973年にはプレ
プリントで出ているのに) プレプリントのままであり。しか
それに關する多くの研究が発表されている状態なので、この
方面に近づこうとする研究者にとって、この記録が何かの役
に立てば幸いである。

原稿の浄書に尽力された、数理研祕書諸姉にお礼を申し上げ
る。

1976年5月

中野茂男

目次

§1	Introduction	1
§2	Integrability Condition	5
§3	T' -valued form に対する $\bar{\partial}_b$	14
§4	Strongly pseudoconvex case	24
§5	A priori estimate for $\bar{\partial}_b^q$ and $\bar{\partial}_b^{*q}$	35
§6	Operators ρ^q and N^q	45
§7	逆函数定理	59
§8	Induced pseudo complex structures	68
§9	Universal families	86
	文献	99

§ 1 Introduction

この話は Kuranishi [4] の内容をのべるもので、その主眼点には、複素解析空間の孤立特異点の変形問題を、解析的方法によって考察することである。解析的方法というのは、偏微分方程式（ $\bar{\partial}$ -方程式）の考察を意味する。もっと具体的にいうと、つぎのようになる：

$\mathbb{C}^N$ 内での原点の近傍に、解析的集合 N ($\dim_{\mathbb{C}} N = n$) があって、原点 0 がその孤立特異点であるとする。 0 を中心とする十分小さな球面 S を考えると

$$M = N \cap S$$

は、実 $(2n-1)$ 次元の compact C^∞ -manifold である。

その complexified tangent bundle $\mathbb{C}TM$ 上には

$$(1.1) \quad {}^0T'' = \mathbb{C}TM \cap T^{0,1}(N)|_M$$

という C^∞ -subbundle がある。ここに $T^{0,1}(N)$ は 型 $(0,1)$ の N の接バンドルである。この subbundle の意味は次のとおりである：

U を N 上の開集合とし、 $U \cap M$ 上での ${}^0T''$ の任意の cross section X をとる。 $U \cap M$ 上の函数 h に対し上の正則函数 f の restriction ならば

$$(1.2) \quad Xh = 0$$

が成立つ。方程式 (1.2) を tangential Cauchy-Riemann

方程式という。

$\mathcal{O}T''$ の性質として 次の二つを挙げる：

$$(1.3) \quad \mathcal{O}T'' \cap \mathcal{O}\bar{T}'' = \{0\}, \quad \dim_{\mathbb{C}}(\text{fibre } \mathcal{O}T'') = n-1.$$

$$(1.4) \quad X, Y \text{ が } (M \text{ の同一点での }) \mathcal{O}T'' \text{ の } C^\infty \text{ cross section の元なら, } [X, Y] \text{ も } \mathcal{O}T'' \text{ である。}$$

そこで

定義 1.1 $(2n-1)$ 次元 compact orientable C^∞ -manifold M について $\mathbb{C}TM$ の complex vector subbundle E'' が、 $[\mathcal{O}T''$ の代りに E'' に代りて述べられた] 条件 (1.3) を満すとき E'' は M に概 C.R. 構造を与えるといい。さらに (1.4) も成立つときこの構造は C.R. 構造であるという。(C.R. 構造はまた pseudocomplex 構造ともよぶ。)

我々は、解析空間の孤立特異点の近傍 N の境界 M に、 N の複素構造からひきおこされる C.R. 構造 $\mathcal{O}T''$ から出発し、これに近い C.R. 構造を考える。それには

(I) $\mathcal{O}T''$ に近い概 C.R. 構造 E'' を適当な bundle homomorphism φ で記述し ($E'' = \mathcal{O}T''$ と表わす), それが C.R. 構造である条件を求める。

(II) 最初の N が strongly pseudoconvex な近傍であるとき、 $\mathcal{O}T''$ に十分近い C.R. 構造 $\mathcal{O}T''$ に対し、境界をもつ複素多様体 N_0 があって、 M はその境界の一つの連結成分。

$\mathcal{Y}_T$ は複素構造 N_f から $(1,1)$ に従って $\mathcal{Y}$ がこされた $C.R.$ 構造となる。さらに正規なスライク空間 N_f が $\mathcal{Y}$ の中に存在して N_f は N_f の開部分の標体であり、 N_f の境界が $\mathcal{Y}$ により M になる。以上のことを示す。

つぎの問題は、 $C.R.$ 構造の全体の中から、互に同値でないものを一つずつ含みうる $family$ をとり出すことである。それは複素構造の変形論で、積分可能な複素構造の $family$ を探したのと同じ考え方であるが、その場合とちがって考えるべき微分方程式は *elliptic* でなく、*subelliptic* であるにちままる。それで

(III) *subelliptic operators* の族 ($C.R.$ 構造 $\mathcal{Y}$ によってパラメトライズされる族) に関する、解の評価を確立する。

(IV) さらに Banach 空間の開の写像における逆函数定理に代って用いるべき Nach-Moser の逆函数定理を確立する。

(V) 以上の準備に加えて、 $C.R.$ 構造の同値性を適当に定式化した上で、 $C.R.$ 構造の $family$ を見出し、(孤立特異点の) 変形の *versal family* を構成する。

以上が大体的なプランである。(I) は微分幾何学的部分で §2, §3 で扱われる。この部分の記述は倉西代のものやリ方によらず、赤坂の *reformulation* に従って紹介する。(II) は函数論的部分で、その方面の解説を補充した。§4 で記述

4

する。§5, §6で subelliptic operatorに関する評価,
即ち(III)を述べる。これは偏微分方程式論の部分といえよう。
§7で扱う(IV)の部分すなわち函数解析的部分をへて, §8,
§9では(V)の問題に立向う。

§2 Integrability condition

$(2n-1)$ 次元 C^∞ -多様体 M に CR 構造 ${}^0T''$ が与えられているとする。すなわち ${}^0T''$ は CTM の subbundle で、ファイバーの次元が C 上 $n-1$ であり、 ${}^0T'' \cap {}^0\bar{T}'' = \{0\}$ 、さらに ${}^0T''$ の cross section 2つのブラケットがまた ${}^0T''$ の cross section だとする。

${}^0T'' \oplus {}^0\bar{T}''$ は、複素 vector bundle でそのファイバーは C 上 $(2n-2)$ 次元、しかも複素共役に関して不変だから、ファイバーが実 $(2n-2)$ 次元の bundle (TM の subbundle) の複素化になっている。従って、 TM の line subbundle の複素化である CTM の subbundle F があって

$$(2.1) \quad CTM = {}^0T'' \oplus {}^0\bar{T}'' \oplus F$$

と書き表わしうる。今後この分解を固定して考える。

$$(2.2) \quad T' = {}^0\bar{T}'' \oplus F$$

とおく。 $(T'^0(N)|_M)$ の意味で、倉西氏は $T'N|_M$ と書かれるが、記号を簡単にするため T' とおく。) $\Gamma({}^0T'')$, $\Gamma(T')$ 等で、(明示しないがある一つの関集合での。) ${}^0T''$, T' 等の C^∞ cross sections の全体を表わす。直積 line bundle の場合は $\Gamma(C)$ とあらわす。分解 $CTM = {}^0T'' \oplus T'$ に対応して CT^*M も $({}^0T'')^* \oplus (T')^*$ と分解する。 $\Gamma(CTM)$ の元 X の、 $\Gamma(T')$

$\wedge$ の射影を $X_{T'}$ のように書き表わす。

M の概 CR 構造 E'' が、 CR 構造 ${}^0T''$ から有限距離にある (at a finite distance, 以下 $afd.$ と表わす) とは、

$$E'' \hookrightarrow \mathbb{C}TM = {}^0T'' \oplus T' \rightarrow {}^0T''$$

という合成写像によって、 E'' と ${}^0T''$ とが同型になっていることである。

E'' が $afd.$ であるとき、 ${}^0T''$ のベクトル X に対し、これに対応する E'' のベクトルは、 $X - \varphi(X)$, $\varphi(X) \in T'$ と、一意的に表わされる。そして、 φ は $\Gamma(M, \text{Hom}({}^0T'', T'))$ の元を表わす。(後出 §8 の挿入部分のように、 $T' = {}^0T'' \oplus F$ と、 $\mathbb{C}TM / {}^0T'' = T'N|_M$ とは、厳密には区別すべきものであろう。ここではその同型対応をきめて同一視している。)

$T' = {}^0T'' \oplus F$ であるから、 φ は次のように表わされる：
 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_1 \in \Gamma(M, \text{Hom}({}^0T'', {}^0T'')), \varphi_2 \in \Gamma(M, \text{Hom}({}^0T'', F))$ 。

Proposition 2.1

$afd.$ 概 CR 構造 E'' の全体は、 $\Gamma(M, \text{Hom}({}^0T'', T'))$ の部分集合

$$\{\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \mid \forall Y \in {}^0T'', Y \neq 0 \text{ に対して } (\varphi_1(\overline{\varphi_1(Y)}) \neq \overline{Y} \text{ 或 } \varphi_2(\overline{\varphi_1(Y)}) \neq \overline{\varphi_2(Y)})\}$$

と、

$$(2.3) \quad E'' = \{X - \varphi(X) \mid X \in {}^0T''\}$$

なる関係によって、一対一に対応する。

記号 (2.3) で与えられる E'' を $\mathcal{P}T''$ によって表わす。

(証明) 概CR構造の条件 $E'' \cap \overline{E''} = \{0\}$ を書き表わせばよい。 $\exists Y \in {}^0T'', Y \neq 0$ で $\varphi_1(\overline{\varphi_1(Y)}) = \overline{Y}$ かつ $\varphi_2(\overline{\varphi_1(Y)}) = -\overline{\varphi_2(Y)}$ ならば (B. $X = -\overline{\varphi_1(Y)} \in {}^0T''$ に対して)

$$E'' \ni X - \varphi_1(X) - \varphi_2(X) = \overline{Y - \varphi_1(Y) - \varphi_2(Y)} \in \overline{E''} \text{ となる。}$$

逆に $E'' \cap \overline{E''} \neq \{0\}$ ならば, $\exists X, Y \neq 0$ で

$$X - \varphi_1(X) - \varphi_2(X) = \overline{Y - \varphi_1(Y) - \varphi_2(Y)} = -\overline{\varphi_1(Y)} + \overline{Y - \varphi_2(Y)}$$

となる。2つの比較から $X = -\overline{\varphi_1(Y)}$, $-\varphi_1(X) = \overline{Y}$ および $\varphi_2(X) = \overline{\varphi_2(Y)}$ がえられて、命題の条件が成立たない。

以上を準備として、af d 概CR構造 $\mathcal{P}T''$ の積分可能条件を書き表わす。

Proposition 2.2 $\mathcal{P}T''$ が CR 構造であるための必要十分条件は、

$$(2.4) \quad \forall X, Y \in \Gamma({}^0T''), \\ [X - \varphi(X), Y - \varphi(Y)]_{T'} = -\varphi([X - \varphi(X), Y - \varphi(Y)]_{{}^0T''})$$

が成立つことである。

(証明) $\mathcal{P}T''$ の積分可能条件は、 $\forall X', Y' \in \Gamma(\mathcal{P}T'')$, $[X', Y'] \in \Gamma(\mathcal{P}T'')$ である。 $X' = X - \varphi(X)$, $Y' = Y - \varphi(Y)$ with $X, Y \in \Gamma({}^0T'')$ と表わせることに注意すれば、

$[X', Y'] = [X - \varphi(X), Y - \varphi(Y)] = [X - \varphi(X), Y - \varphi(Y)]_{o_{T''}} + [X - \varphi(X), Y - \varphi(Y)]_{T'}$
 これは $\varphi_{T''}$ の cross section である ために 17.

$$[X - \varphi(X), Y - \varphi(Y)]_{T'} = -\varphi([X - \varphi(X), Y - \varphi(Y)]_{o_{T''}})$$

が必要かつ十分である。

記号 17

$$(2.5) \quad P(\varphi)(X, Y) = [X - \varphi(X), Y - \varphi(Y)]_{T'} \\ + \varphi([X - \varphi(X), Y - \varphi(Y)]_{o_{T''}})$$

とあらわす。 $P(\varphi)$ は $\Gamma(\tilde{\Lambda}^0 T'')$ から $\Gamma(T)$ への写像であって、 φ について 17 3 次の多項式になっている。 $P(\varphi)(X, Y)$ を φ について 齊次の部分に分ければ、

$$0 \text{ 次項} = 0$$

$$1 \text{ 次項} = -[X, \varphi(Y)]_{T'} - [\varphi(X), Y]_{T'} + \varphi([X, Y]) \\ = -(\bar{\omega}_{T'}^{(1)} \varphi)(X, Y)$$

$$2 \text{ 次項} = [\varphi(X), \varphi(Y)]_{T'} - \varphi([X, \varphi(Y)]_{o_{T''}} + [\varphi(X), Y]_{o_{T''}}) \\ (= R_2(\varphi)(X, Y) \text{ とおく})$$

$$3 \text{ 次項} = +\varphi([\varphi(X), \varphi(Y)]_{o_{T''}}) \\ (= R_3(\varphi)(X, Y) \text{ とおく})$$

つまり、 $-\bar{\omega}_{T'}^{(1)} \varphi, R_2(\varphi), R_3(\varphi)$ それぞれが $T(\tilde{\Lambda}^0 T'') \rightarrow \Gamma(T)$ の写像である。

Theorem 2.1 概CR構造 $\varphi_{T''}$ が積分可能である ために

は $P(\varphi) = 0$ が必要かつ十分である。

C.R.構造 $\mathcal{O}_T$ に対しては, 外微分 $\bar{\partial}_\mathcal{O}: \Gamma(\mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_T^*)^*$ を

$$(2.6) \quad u \in \Gamma(\mathcal{O}) \text{ に対して } \bar{\partial}_\mathcal{O} u(X) = Xu \text{ for } X \in \Gamma(\mathcal{O}_T^*)$$

によって定め. これを

$$(2.7) \quad \bar{\partial}_\mathcal{O}^{(p)}: \Gamma(\wedge^p(\mathcal{O}_T^*)^*) \rightarrow \Gamma(\wedge^{p+1}(\mathcal{O}_T^*)^*)$$

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_\mathcal{O}^{(p)} \psi(X_1, \dots, X_{p+1}) &= \sum_i (-1)^{i-1} X_i \psi(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1}) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \psi([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1}). \end{aligned}$$

によって p -forms に拡張すると,

$$0 \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}) \xrightarrow{\bar{\partial}_\mathcal{O}} \Gamma(\mathcal{O}_T^*)^* \xrightarrow{\bar{\partial}_\mathcal{O}^{(1)}} \Gamma(\wedge^2(\mathcal{O}_T^*)^*) \rightarrow \dots$$

は complex となる。この際

$$X(fu) = (Xf) \cdot u + f(Xu), \quad [X, Y]u = X(Yu) - Y(Xu)$$

が成立することは、使っている。

概C.R.構造 $\mathcal{P}_T$ に対して $\bar{\partial}_{\mathcal{P}_T}$ を定義し、 $\mathcal{P}_T$ が積分可能
なときは、(2.6)(2.7) によるものが本来の $\bar{\partial}$ と一致するよう
にしたい。そのために (2.6)(2.7) に相当して

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma(\mathcal{O}) \ni u \mapsto (\bar{\partial}_{\mathcal{P}_T} u)(X') = X'u \text{ for } X' \in \Gamma(\mathcal{P}_T^*), \\ \bar{\partial}_{\mathcal{P}_T}^{(p)}: \Gamma(\wedge^p(\mathcal{P}_T^*)^*) \rightarrow \Gamma(\wedge^{p+1}(\mathcal{P}_T^*)^*) \\ (\bar{\partial}_{\mathcal{P}_T} \psi)(X'_1, \dots, X'_{p+1}) = \sum_i (-1)^{i-1} X'_i \psi(X'_1, \dots, \hat{X}'_i, \dots, X'_{p+1}) \\ \quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \psi([X'_i, X'_j]_{\mathcal{P}_T}, X'_1, \dots, \hat{X}'_i, \dots, \hat{X}'_j, \dots, X'_{p+1}) \end{array} \right.$$

と定める。ここに $x'_i \in \Gamma(\varphi T)$ であり $[x'_i, x'_j]_{\varphi T}$ は $[x'_i, x'_j]$ の φT への射影である。それ故、 φT が積分可能ならばこの定義は本来の $\bar{\omega}$ と一致し、 $(\sum_p \Gamma(\wedge^p(\varphi T)^*), \bar{\omega}_{\varphi T})$ は complex をなす。

変形の問題を論ずるには、 $\bar{\omega}_{\varphi T}$ に相当する作用素を $\Gamma(\wedge^p(\varphi T)^*)$ において考えなければならぬ。そのために

$$\lambda_\varphi: \varphi T \ni x \mapsto x - \varphi(x) \in \varphi T$$

からわかる。こゝれる、 $\Gamma(\wedge^p(\varphi T)^*) \rightarrow \Gamma(\wedge^p(\varphi T)^*)$ の同型対応を $\lambda_\varphi^{(p)}$ で表わし、

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_\varphi^{(p)}: \Gamma(\wedge^p(\varphi T)^*) &\rightarrow \Gamma(\wedge^{p+1}(\varphi T)^*) \quad \text{を,} \\ \Gamma(\wedge^p(\varphi T)^*) &\xrightarrow{\bar{\omega}_\varphi^{(p)}} \Gamma(\wedge^{p+1}(\varphi T)^*) \\ (2.9) \quad \uparrow \wr \lambda_\varphi^{(p)} & \qquad \qquad \lambda_\varphi^{(p+1)} \uparrow \wr \quad (\text{可換}) \\ \Gamma(\wedge^p(\varphi T)^*) &\xrightarrow{\bar{\omega}_{\varphi T}^{(p)}} \Gamma(\wedge^{p+1}(\varphi T)^*) \end{aligned}$$

によって、定義する。

Theorem 2.2 $f \in \Gamma$ に対して $\bar{\omega}_\varphi^{(p)} \bar{\omega}_\varphi^{(p)} f = df \wedge p(\varphi)$

である。ここに π は、 $df \in \Gamma(\mathcal{C}TM)^*$ と $p(\varphi) \in \Gamma(T \otimes \wedge^2(\varphi T)^*)$ との contraction を表わす。

(証明) $x, y \in \varphi T$ に対して $\bar{\omega}_\varphi^{(p)} \bar{\omega}_\varphi^{(p)} f(x, y) = df \wedge p(\varphi)(x, y)$ をいう。 $\Gamma(\mathcal{C}TM)^* \ni \theta$ に対して

$$\begin{aligned}
(\bar{\partial}_\varphi^\varphi \theta)(X, Y) &= (\lambda_\varphi^{(2)} \bar{\partial}_{\varphi_T''}^{(1)} (\lambda_\varphi^{(1)})^{-1} \theta)(X, Y) \\
&= (\bar{\partial}_{\varphi_T''}^{(1)} (\lambda_\varphi^{(1)})^{-1} \theta)(X - \varphi(X), Y - \varphi(Y)) \\
(2.10) \quad &= (X - \varphi(X)) [(\lambda_\varphi^{(1)})^{-1} \theta(Y - \varphi(Y))] - \\
&\quad (Y - \varphi(Y)) [(\lambda_\varphi^{(1)})^{-1} \theta(X - \varphi(X))] - \\
&\quad (\lambda_\varphi^{(1)})^{-1} \theta([X - \varphi(X), Y - \varphi(Y)]_{\varphi_T''}). \\
&= (X - \varphi(X)) \theta(Y) - (Y - \varphi(Y)) \theta(X) \\
&\quad - \theta([X - \varphi(X), Y - \varphi(Y)]_{\varphi_T''})^{*})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \bar{\partial}_\varphi^\varphi (\bar{\partial}_\varphi^\varphi f)(X, Y) &= (X - \varphi(X)) \bar{\partial}_\varphi^\varphi f(Y) - (Y - \varphi(Y)) \bar{\partial}_\varphi^\varphi f(X) \\
&\quad - \bar{\partial}_\varphi^\varphi f([X - \varphi(X), Y - \varphi(Y)]_{\varphi_T''})
\end{aligned}$$

そこで

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_\varphi^\varphi f(z) &= \lambda_\varphi^{(1)} (\bar{\partial}_{\varphi_T''} f)(z) = \bar{\partial}_{\varphi_T''} f(z - \varphi(z)) \\
&= (z - \varphi(z)) f \quad \text{for } z \in {}^0 T''
\end{aligned}$$

) $\forall z \in \Gamma(\mathbb{C}TM^) \mid \exists t \mid \lambda_\varphi(z_{\varphi_T''}) = z_{\varphi_T''}$
 である。

を使えば、上式は

$$\begin{aligned} (\bar{\partial}_x^f \bar{\partial}_x^g f)(x, Y) &= (x - \varphi(x))(Y - \varphi(Y))f - (Y - \varphi(Y))(x - \varphi(x))f \\ &\quad - \{[x - \varphi(x), Y - \varphi(Y)]_{\circ T''} - \varphi([x - \varphi(x), \\ &\quad Y - \varphi(Y)]_{\circ T''})\} f \\ &= [P(\varphi)(x, Y)]f = [df \wedge P(\varphi)](x, Y). \end{aligned}$$

Q. E. D.

これから、既に示したことを結びつけて、つぎの結果がえら
れる。

Proposition 2.3 つぎの 1) ~ 3) は互に同値である。

1) ${}^{\circ}T''$ が積分可能

2) $\bar{\partial}_{PT''}^{(P)} \circ \bar{\partial}_{PT''}^{(P-1)} = 0$

3) $\bar{\partial}_x^f \circ \bar{\partial}_x^g = 0$

今一つの結果は、つぎのものである：

Proposition 2.4 $f \in \Gamma(\mathbb{C})$ が holomorphic (i.e. $x \in \Gamma({}^{\circ}T'')$

に對し $x \cdot f = 0$) であるとき、 $-\bar{\partial}_x^f(df \wedge \varphi) = df \wedge P(\varphi)$ である。

(証明) $x, Y \in \Gamma({}^{\circ}T'')$ に對して $(df \wedge \varphi)(x) = \varphi(x)f$,

$(df \wedge P(\varphi))(x, Y) = [P(\varphi)(x, Y)]f$ である。さして

$$\begin{aligned} -[\bar{\partial}_x^f(df \wedge \varphi)](x, Y) &= -(x - \varphi(x))[df \wedge \varphi(Y)] + (Y - \varphi(Y))[df \wedge \varphi(x)] \\ &\quad + (df \wedge \varphi)([x - \varphi(x), Y - \varphi(Y)]_{\circ T''}) \end{aligned}$$

$$= -(x - \varphi(x))(\varphi(Y)f) + (Y - \varphi(Y))(\varphi(x)f) \\ + \varphi([x - \varphi(x), Y - \varphi(Y)]_{o_T})f.$$

$$xf = 0, Yf = 0 \quad T = 0 \text{ ならば } \quad \geq 0 \text{ である.}$$

$$= (x - \varphi(x))(Y - \varphi(Y))f - (Y - \varphi(Y))(x - \varphi(x))f \\ - [x - \varphi(x), Y - \varphi(Y)]_{o_T}f + \varphi([x - \varphi(x), \\ Y - \varphi(Y)]_{o_T})f \\ = [P(\varphi)(x, Y)]f \quad \text{とある。} \quad \text{Q. E. D.}$$

§3 T' -valued form に対する $\bar{\partial}_T^p$

我々は、 $\mathbb{C}TM = {}^0T'' \oplus T'$, (ここに $T' = {}^0T'' \oplus F$) という直和分解を固定して考え、いる。しかも $af d$ 概 CR 構造 ${}^pT''$ を考える限り、 $\mathbb{C}TM = {}^pT'' \oplus T'$ という直和分解が成立している。

$X \in \Gamma({}^0T'')$, $u \in \Gamma(T')$ に対して、 $[X, u]_{T'} = Xu$ と書き表わすことにすると、Lemma 3.1 に示すように Xu は (函数係数で) X の linear function で、値は $\Gamma(T')$ に入る。それ故これによって $\Gamma(T') \rightarrow \Gamma(T' \otimes ({}^0T'')^*)$ の微分作用素 $\bar{\partial}_{T'}$ が定まる:

$$(3.1) \quad Xu = [X, u]_{T'} = [X, u] - [X, u]_{\circ T''}$$

$$(3.2) \quad \bar{\partial}_{T'} : \Gamma(T') \rightarrow \Gamma(T' \otimes ({}^0T'')^*)$$

$$(\bar{\partial}_{T'}, u)(X) = Xu \quad \text{for } X \in \Gamma({}^0T'').$$

Lemma 3.1 $f \in \Gamma(\mathbb{C})$ に対して $(fX)u = f(Xu)$

(証明) $[fX, u] = f[X, u] - u(f) \cdot X$ である。 $X \in \Gamma({}^0T'')$ のため $\Gamma(T')$ への射影をとれば、 $[fX, u]_{T'} = f[X, u]_{T'}$

Lemma 3.2 $X, Y \in \Gamma({}^0T'')$, $u \in \Gamma(T')$, $f \in \Gamma(\mathbb{C})$ に対して
つぎの公式が成立つ

$$(3.3) \quad X(fu) = (Xf)u + f(Xu)$$

$$(3.4) \quad [X, Y]u = X(Yu) - Y(Xu)$$

(証明) 等式 $[X, fu] = (Xf)u + f[X, u]$ の両辺を, $\Gamma(T')$ に射影すれば (3.3) がえられる。また Jacobi の恒等式

$$[[X, Y], u] = [X, [Y, u]] - [Y, [X, u]]$$

の両辺を $\Gamma(T')$ に射影すれば

$$\begin{aligned} [X, Y]u &= [X, [Y, u]]_{T'} - [Y, [X, u]]_{T'} \\ &= [X, [Y, u]_{\circ T''}]_{T'} + [X, [Y, u]_{T'}]_{T'} - [Y, [X, u]_{\circ T''}]_{T'} \\ &\quad - [Y, [X, u]_{T'}]_{T'} \end{aligned}$$

$[\Gamma(\circ T''), \Gamma(\circ T'')] \subset \Gamma(\circ T'')$ だから、最後の辺の $\circ$ は、 $\circ$ 三項は 0 である。

Lemma 3.3 $\bar{\partial}_{T'}^{(p)} : \Gamma(T' \otimes \wedge^p(\circ T'')^*) \rightarrow \Gamma(T' \otimes \wedge^{p+1}(\circ T'')^*)$ は,

$$(\bar{\partial}_{T'}^{(p)} \psi)(X_1, \dots, X_{p+1}) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} X_i \psi(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1})$$

$$(3.5) \quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \psi([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1})$$

$$\text{for } X_1, \dots, X_{p+1} \in T(\circ T'')$$

により定義される。

$$(3.6) \quad 0 \rightarrow \Gamma(T') \xrightarrow{\bar{\partial}_{T'}} \Gamma(T' \otimes (\circ T'')^*) \xrightarrow{\bar{\partial}_{T'}^{(1)}} \Gamma(T' \otimes \wedge^2(\circ T'')^*) \rightarrow \dots$$

は Complex になる。

証明の主要な与は、(3.5) が X について (函数係数で) multi-linear であることである。

$$\begin{aligned} (\bar{\omega}_T^{(p)}, \psi)(fX_1, X_2, \dots, X_{p+1}) &= fX_1 \cdot \psi(X_2, \dots, X_{p+1}) + \sum_{i=2}^{p+1} (-1)^{i-1} X_i \psi(fX_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1}) \\ &\quad + \sum_{j=2}^{p+1} (-1)^{1+j} \psi([fX_1, X_j], X_2, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1}) \\ &\quad + \sum_{1 < i < j} (-1)^{i+j} \psi([X_i, X_j], fX_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1}) \end{aligned}$$

ここで $[fX_1, X_j] = f[X_1, X_j] - X_j(f)X_1$ のため右辺オニの和から $(-1)^j X_j(f) \psi(X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1})$ という項が現われるが、これはオニの和から式 (3.3) に従って現れる $(-1)^{j-1} X_j(f) \cdot \psi(X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1})$ とけし合せて、全体として $f(\bar{\omega}_T^{(p)}, \psi)(X_1, \dots, X_{p+1})$ がえられる。

特に $\bar{\omega}_T^{(1)}$ の具体的表式が

$$(3.5') \quad (\bar{\omega}_T^{(1)}, \theta)(X, Y) = [X, \theta(Y)]_T - [Y, \theta(X)]_T - \theta([X, Y])$$

であることを、つけ加えておく。

以上の考察を、canonicalでない要素 F を排除した形で表現しようとする。CR構造に対する Tanaka (田中 昇) の正則接バンドルの話になる。すなわち、

$\hat{T}(M) = \mathbb{C}TM / \mathcal{O}_T$ とおき (以下これを $\hat{T}$ と略記する)、

$\mathbb{C}TM \rightarrow \hat{T}$ の canonical projection を ω で表す。

$\bar{\omega}_{\hat{T}} : \Gamma(\hat{T}) \rightarrow \Gamma(\hat{T} \otimes (\mathcal{O}_T^*)^*)$ を、 $(\bar{\omega}_{\hat{T}} u)(X) = \omega([X, Z])$

for $X \in \Gamma(^0T'')$ によって定まる. ここに Z は $\Gamma(\mathcal{C}TM)$ の元で $\omega(Z) = u$ となっているものとする. $^0T''$ が積分可能なため, $(\bar{\omega}_{T''} u)(X)$ は Z のとり方によらずに決まるのである. $\mathcal{C}R$ 構造 $^pT''$ に対し, $^pT' = \mathcal{C}TM / ^pT''$ において, 上と同様のことを行おうとしても, $\bar{\omega}_{T''}$ に相当する定義がでない. それで $^pT''$ が $\mathcal{C}R$ であることを用い, $\bar{\omega}_{T'}$ に相当する微分作用素 $\bar{\omega}_{T'}^p$ を構成する.

$\mathcal{C}R$ 構造 $^pT''$ に対しては, $\mathcal{C}TM = ^pT'' \oplus T'$ なる直和分解が成立している. そこで

$$\bar{\omega}_{T'}^p : \Gamma(T') \rightarrow \Gamma(T' \otimes (^pT'')^*) \quad \text{を,}$$

$$(\bar{\omega}_{T'}^p u)(Z') = [Z', u]_{T'} \quad \text{for } u \in \Gamma(T'), Z' \in \Gamma(^pT'')$$

と定義する. (射影 $[]_{T'}$ の意味は, φ によってちがってくる.) Lemma 3.1 と式 (3.3) とは, $^0T''$ の代りに $^pT''$ を使っても成立つ. もちろん (3.3) で Xu の意味は変ってくる:

$$(3.1)_\varphi \quad \text{構造 } ^pT'' \text{ に対しては } Xu = [X', u] - [X', u]_{^pT''}$$

Lemma 3.4

$\Gamma(T' \oplus \bigwedge^p (^pT'')^*) \ni \psi, I(^pT'') \ni X_1, \dots, X_{p+1}$ に対して

$$(3.7) \quad \bar{\omega}_{T'}^{p(p)} \psi(X'_1, \dots, X'_{p+1}) = \sum_j (-1)^{j-1} X'_j \psi(X'_1, \dots, \hat{X}'_j, \dots, X'_{p+1}) \\ + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \psi([X'_i, X'_j]_{^pT''}, X'_1, \dots, \hat{X}'_i, \dots, \hat{X}'_j, \dots, X'_{p+1})$$

と定めると、これは $x'_1, \dots, x'_{p+1}$ について skew symmetric
かつ函数係数で multilinear である。従つて微分作用素
 $\bar{\partial}_{T'}^{p(p)} : \Gamma(T' \otimes \wedge^p(\varphi_T'')^*) \rightarrow \Gamma(T' \otimes \wedge^{p+1}(\varphi_T'')^*)$ を定める。

証明は Lemma 3.3 にあけるのと同様である。

§ 2 にあけると同様に、同型対応 $\lambda_\varphi : {}^0T'' \ni X \rightarrow X - \varphi(X) \in \varphi_T''$
によつて与えられる写像 $\lambda_\varphi^{(p)} : \Gamma(T' \otimes \wedge^p(\varphi_T'')^*) \rightarrow \Gamma(T' \otimes \wedge^p({}^0T'')^*)$
を使つて、微分作用素 $\bar{\partial}_\varphi^p$ を、

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma(T' \otimes \wedge^p({}^0T'')^*) & \xrightarrow{\bar{\partial}_\varphi^p} & \Gamma(T' \otimes \wedge^{p+1}({}^0T'')^*) \\
 \uparrow \lambda_\varphi^{(p)} & & \uparrow \lambda_\varphi^{(p+1)} \quad (\text{可換}) \\
 \Gamma(T' \otimes \wedge^p(\varphi_T'')^*) & \xrightarrow{\bar{\partial}_{T'}^{p(p)}} & \Gamma(T' \otimes \wedge^{p+1}(\varphi_T'')^*)
 \end{array}
 \quad (3.8)$$

によつて、定義する。

Theorem 3.1 つぎの各条件は 互に同値である：

(1) φ_T'' は積分可能

(2) $(\sum_p \Gamma(T' \otimes \wedge^p(\varphi_T'')^*), \bar{\partial}_{T'}^p)$ は complex

(3) $(\sum_p \Gamma(T' \otimes \wedge^p({}^0T'')^*), \bar{\partial}_\varphi^p)$ は complex

(証明) (1) $\Rightarrow$ (2) および (2) $\Leftrightarrow$ (3) は明らかである。(2) $\Rightarrow$ (1) を証明
するに、 $\bar{\partial}_{T'}^{p(1)} \circ \bar{\partial}_{T'}^p = 0$ から φ が積分可能であることを
示せばよい。

$x', y' \in \Gamma(\varphi_T'')$, $u \in \Gamma(T)$, $f \in \Gamma(\mathcal{C})$ に対して、条件

$$(\bar{\partial}_{T'}^{p(1)} \circ \bar{\partial}_{T'}^p u)(x', y') = 0$$

$$(\bar{\partial}_{T'}^{p(1)} \circ \bar{\partial}_{T'}^f \cdot f u)(X', Y') = 0$$

を書き上げてみると、 σ -式から

$$\begin{aligned} 0 &= X'[(\bar{\partial}_{T'}^f u)(Y')] - Y'[(\bar{\partial}_{T'}^f u)(X')] - (\bar{\partial}_{T'}^f u)([X', Y']_{\mathcal{P}_T''}) \\ &= (X' \cdot Y' - Y' \cdot X' - [X', Y']_{\mathcal{P}_T''})u. \end{aligned}$$

σ -式からいへば、上式で u の代りに $f u$ とおいた等式が成り立つ。

よって

$$Y'(f u) = (Y' f)u + f \cdot Y' u,$$

$$X' Y'(f u) = (X' Y' f)u + (Y' f)(X' u) + (X' f)(Y' u) + f(X' Y' u),$$

$$[X', Y']_{\mathcal{P}_T''}(f u) = ([X', Y']_{\mathcal{P}_T''} f)u + f \cdot ([X', Y']_{\mathcal{P}_T''} u)$$

だから、

$$(X' Y' - Y' X' - [X', Y']_{\mathcal{P}_T''})f u + f(X' Y' - Y' X' - [X', Y']_{\mathcal{P}_T''})u = 0$$

がえられる。両方を併せ、 u が任意であることを使えば

$$(X' Y' - Y' X' - [X', Y']_{\mathcal{P}_T''})f = 0 \quad \text{for } \forall f \in \Gamma(\mathbb{C}), \forall X', Y' \in \Gamma(\mathcal{P}_T'').$$

これは $\mathcal{P}_T''$ が積分可能であることを示す。

積分可能とは限らない概 $\mathbb{C}K$ 構造 $\mathcal{P}_T''$ に関して、フビニ定理が成立つ：

Theorem 3.2

$$\theta \in \Gamma(T' \otimes \bigwedge^p (\mathcal{P}_T'')^*) \quad (p \geq 2) \text{ に対して}$$

$$\begin{aligned} (3.9) \quad & (\bar{\partial}_{T'}^{p(p+1)} \circ \bar{\partial}_{T'}^{p(\phi)} \theta)(X'_1, \dots, X'_{p+2}) \\ &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} \{ (X'_i X'_j - X'_j X'_i - [X'_i X'_j]_{\mathcal{P}_T''}) \theta \} (X'_1, \dots, \hat{X}'_i, \dots, \hat{X}'_j, \dots, X'_{p+2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i < j < k} (-1)^{i+j+k+1} \{ \theta([P(\varphi)(x_j, x_k), x_i']_{\varphi_T''}, x_i', \dots) \\
& \quad + \theta([P(\varphi)(x_k, x_i), x_j']_{\varphi_T''}, x_i', \dots) \\
& \quad + \theta([P(\varphi)(x_i, x_j), x_k']_{\varphi_T''}, x_i', \dots) \}
\end{aligned}$$

$u \in \Gamma(T')$ に対し

$$(3.10) \quad (\bar{\partial}_T^{(1)} \bar{\partial}_T^{(1)} u)(x', y') = (x' y' - y' x' - [x', y']_{\varphi_T''}) u$$

(3.9) 式右辺が二項で、 θ の変数 $x_i', \dots$ とは、 $x_1' \dots x_{p+2}'$ から x_i', x_j', x_k' を除いたものを意味し、 x_i は $x_i' = x_i - \varphi(x_i)$ ($x_i \in \Gamma(T'')$) により定められる元 (i.e. $x_i' = \lambda_{\varphi}(x_i)$)

(証明) (3.10) は既に述べた (3.9) を、 $p=1$ の場合について確かめておく。

$$\begin{aligned}
(\bar{\partial}_T^{(2)} \bar{\partial}_T^{(1)} \theta)(x', y', z') &= x' (\bar{\partial}_T^{(1)} \theta)(y', z') - x' (\bar{\partial}_T^{(1)} \theta)(x', z') \\
&\quad + z' (\bar{\partial}_T^{(1)} \theta)(x', y') - (\bar{\partial}_T^{(1)} \theta)([x', y']_{\varphi_T''}, z') \\
&\quad + (\bar{\partial}_T^{(1)} \theta)([x', z']_{\varphi_T''}, y') - (\bar{\partial}_T^{(1)} \theta)([y', z']_{\varphi_T''}, x')
\end{aligned}$$

とあるので

$$(\bar{\partial}_T^{(1)} \theta)(y', z') = y' \theta(z') - z' \theta(y') - \theta([y', z']_{\varphi_T''})$$

$$(\bar{\partial}_T^{(1)} \theta)([x', y']_{\varphi_T''}, z')$$

$$= [x', y']_{\varphi_T''} \theta(z') - z' \theta([x', y']_{\varphi_T''}) - \theta([x', y']_{\varphi_T''}, z']_{\varphi_T''})$$

等であるから、これを代入すると

$$(\bar{\partial}_T^{(2)} \bar{\partial}_T^{(1)} \theta)(x', y', z')$$

$$= (x' y' - y' x' - [x', y']_{\varphi_T''}) \theta(z') + (y' z' - z' y' - [y', z']_{\varphi_T''}) \theta(x')$$

$$- (x' z' - z' x' - [x', z']_{\varphi_T''}) \theta(y') + \theta([x', y']_{\varphi_T''}, z']_{\varphi_T''})$$

$$-\theta([X', Z']_{\mathcal{F}_T''}, Y')_{\mathcal{F}_T''}) + \theta([Y', Z']_{\mathcal{F}_T''}, X')_{\mathcal{F}_T''}).$$

$$[X', Y']_{\mathcal{F}_T''}, Z']_{\mathcal{F}_T''} = -[X', Y'] - [X', Y']_{\mathcal{F}_T''}, Z']_{\mathcal{F}_T''} + [X', Y', Z']_{\mathcal{F}_T''}$$

$$A = [X', Y'] - [X', Y']_{\mathcal{F}_T''} \in \Gamma(T) \text{ と } \bar{A} \prec. \quad - \bar{\varphi} \quad X' = X - \varphi(X),$$

$$Y' = Y - \varphi(Y), \text{ 故 } [X', Y']_{\mathcal{F}_T''} = B - \varphi(B) \text{ と表わされるから}$$

(つぎの式では $[]_T$ は $\mathcal{O}_T$ -構造に依りてゐる)

$$\begin{aligned} P(\varphi)(X, Y) &= [X - \varphi(X), Y - \varphi(Y)]_T + \varphi([X - \varphi(X), Y - \varphi(Y)]_{\mathcal{O}_T''}) \\ &= A - \varphi(B) + \varphi(B) = A, \end{aligned}$$

得られる

$$(3.11) \quad P(\varphi)(X, Y) = [X', Y'] - [X', Y']_{\mathcal{F}_T''}$$

となる。これを上の式に入れ、Jacobi 恒等式を使えば、

$$(\bar{\omega}_T^{(2)} \bar{\omega}_T^{(1)} \theta)(X', Y', Z')$$

$$= (X'Y' - Y'X' - [X', Y']_{\mathcal{F}_T''})\theta(Z') + (Y'Z' - Z'Y' - [Y', Z']_{\mathcal{F}_T''})\theta(X')$$

$$- (X'Z' - Z'X' - [X', Z']_{\mathcal{F}_T''})\theta(Y') - \theta([P(\varphi)(X, Y), Z']_{\mathcal{F}_T''})$$

$$+ \theta([P(\varphi)(X, Z), Y']_{\mathcal{F}_T''}) - \theta([P(\varphi)(Y, Z), X']_{\mathcal{F}_T''})$$

となる。

Theorem 3.3 $\bar{\omega}_\ell^\varphi P(\varphi) = 0$ である。

(証明) $\bar{\omega}_\ell^\varphi P(\varphi) = \lambda_\varphi^{(3)} \bar{\omega}_T^{(2)} \lambda_\varphi^{(2)-1} P(\varphi)$ だから、 $P' = \lambda_\varphi^{(2)-1} P(\varphi)$

と置いて、 $\bar{\omega}_T^{(2)} P' = 0$ を示せばよい。

$$X', Y', Z' \in \Gamma(\mathcal{F}_T'') \text{ に } \bar{\omega} \text{ 対して}$$

$$(\bar{\omega}_T^{(2)} P')(X', Y', Z') = X'P'(Y, Z') - Y'P'(X', Z') + Z'P'(X', Y')$$

$$-P'([X', Y']_{\varphi_{T''}}, Z') + P'([X', Z']_{\varphi_{T''}}, Y') - P'([Y', Z']_{\varphi_{T''}}, X').$$

(3.11) が示すより $P'([Y', Z']) = [Y', Z'] - [Y', Z']_{\varphi_{T''}}$ である。

よって

$$\begin{aligned} X'P'([Y', Z']) &= [X', [Y', Z'] - [Y', Z']_{\varphi_{T''}}] - [X', [Y', Z'] - [Y', Z']_{\varphi_{T''}}]_{\varphi_{T''}} \\ &= [X', [Y', Z']] - [X', [Y', Z']]_{\varphi_{T''}} - [X', [Y', Z']]_{\varphi_{T''}} + [X', [Y', Z']]_{\varphi_{T''}}. \end{aligned}$$

一方上の式には $-P'([Y', Z']_{\varphi_{T''}}, X')$ が現われている。この項は

$$-P'([Y', Z']_{\varphi_{T''}}, X') = -[[Y', Z']_{\varphi_{T''}}, X'] + [[Y', Z']_{\varphi_{T''}}, X']_{\varphi_{T''}}$$

であって、 $X'P'([Y', Z'])$ の中に出てくる二項と消しあう。残りの項は、 X', Y', Z' を cyclic にかえて加えると消えてしまう。

Q.E.D.

Theorem 3.4 $P(\varphi + \theta) - P(\varphi) \equiv -\bar{\partial}_\varphi^\varphi \theta \pmod{\theta^2}$ である。

(証明) φ, θ は $\Gamma(T' \otimes ({}^0T'')^*)$ の元である。 $X, Y \in \Gamma({}^0T'')$ に対し

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_\varphi^\varphi \theta(X, Y) &= \lambda_\varphi^{(2)} \bar{\partial}_T^{(1)} (\lambda_\varphi^{(1)})^{-1} \theta(X, Y) \\ &= \bar{\partial}_T^{(1)} \cdot (\lambda_\varphi^{(1)})^{-1} \theta(X - \varphi(X), Y - \varphi(Y)) \\ &= (X - \varphi(X)) \cdot (\lambda_\varphi^{(1)})^{-1} \theta(Y - \varphi(Y)) - (Y - \varphi(Y)) \cdot (\lambda_\varphi^{(1)})^{-1} \theta(X - \varphi(X)) \\ &\quad - (\lambda_\varphi^{(1)})^{-1} \theta([X - \varphi(X), Y - \varphi(Y)]_{\varphi_{T''}}) \\ &= (X - \varphi(X)) \cdot \theta(Y) - (Y - \varphi(Y)) \cdot \theta(X) - \theta([X - \varphi(X), Y - \varphi(Y)]_{\varphi_{T''}}). \end{aligned}$$

である。一方

$$P(\varphi+\theta)(x, \gamma) = [x - (\varphi+\theta)(x), \gamma - (\varphi+\theta)(\gamma)] - [x - (\varphi+\theta)x, \gamma - (\varphi+\theta)\gamma]_{\varphi+\theta_T''}$$

$$P(\varphi)(x, \gamma) = [x - \varphi(x), \gamma - \varphi(\gamma)] - [x - \varphi(x), \gamma - \varphi(\gamma)]_{\varphi_T''}$$

次に θ の場合.

$$(P(\varphi+\theta) - P(\varphi))(x, \gamma)$$

$$= [x - \varphi(x) - \theta(x), \gamma - \varphi(\gamma) - \theta(\gamma)]_{T'} + (\varphi+\theta)([x - \varphi(x) - \theta(x), \gamma - \varphi(\gamma) - \theta(\gamma)]_{\theta_T''})$$

$$- [x - \varphi(x), \gamma - \varphi(\gamma)]_{T'} - \varphi([x - \varphi(x), \gamma - \varphi(\gamma)]_{\theta_T''})$$

$$\equiv -[\theta(x), \gamma - \varphi(\gamma)]_{T'} - [x - \varphi(x), \theta(\gamma)]_{T'}$$

$$- \varphi([x - \varphi(x), \theta(\gamma)]_{\theta_T''}) - [\theta(x), \gamma - \varphi(\gamma)]_{\theta_T''} + \theta([x - \varphi(x), \gamma - \varphi(\gamma)]_{\theta_T''})$$

$$\equiv -(x - \varphi(x)) \cdot \theta(\gamma) + (\gamma - \varphi(\gamma)) \cdot \theta(x) + \theta([x - \varphi(x), \gamma - \varphi(\gamma)]_{\theta_T''})$$

$$\equiv -\bar{\partial}^{\varphi} \theta(x, \gamma)$$

Q. E. D.

§4 Strongly pseudoconvex case

M は今もと同様に $(2m-1)$ 次の compact 連結な C^∞ 多様体で、 E'' は M 上の複素 C^∞ 構造であるとする:

$$CTM = E'' \oplus \bar{E}'' \oplus F \quad (F \text{ は実直線バンドルの積素に}).$$

M の開集合 U 上で、 E'' の C^∞ -cross sections $X_1, \dots, X_{n-1}$ で、各点で一次独立なものをとる。そうすれば $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_{n-1}$ は $\bar{E}''$ の cross section で、 U の各点でファイバーを生成する。 U 上で 0 にならない F の実 cross section T をとっておく。 U 上の函数 C_{jk} を、

$$(4.1) \quad \sqrt{-1} [X_j, \bar{X}_k] \equiv C_{jk} T \pmod{E'' \oplus \bar{E}''}$$

によって定義すれば、 (C_{jk}) は Hermite 行列である。

$$E''_x \ni X = \sum \xi^j X_j(x), \quad (x \in U) \text{ に対して}$$

$$(4.2) \quad L_x(X, X) = \sum C_{jk}(x) \xi^j \bar{\xi}^k$$

とおけば、この Hermite 形式 (E'' の Levi-form とよぶ) は基底 $\{X_j\}$ のとり方によらずに定まり、 T のとり方には、0 でない実因数だけの dependence をもつ。(基底 $\{X_j\}$ を函数係数でとりかえたと、 C_{jk} の一系はテンソルの成分の変換をうける。)

定義 4.1 E'' が strongly pseudoconvex であるとは、

T をえらんで $(c, \bar{h})$ が $(M$ の各点で) 正定値であるようにできることである。

最初のモデルとして採った場合、すなわち $\mathbb{C}^n$ で原点の近傍に解析的集合 N があり、原点を孤立特異点としてもっている場合を考へよう。 N 上に実数値 C^∞ 関数 h があり、原点で負の値をとり、

$$N' = \{x \in N \mid h(x) < 0\}, \quad M = \partial N' = \{x \in N \mid h(x) = 0\}$$

$$M \text{ の各点で } dh \neq 0$$

と仮定しているものとして、 $E'' = \mathbb{C}TM \cap T^{0,1}(N)|_M$ とおく。

$P \in M$ をとり、 P の近傍で $\alpha \cup \alpha$ の正則局所座標 $(z', \dots, z^n)$ を、 $\frac{\partial h}{\partial z^j}(P) = 0$ for $1 \leq j \leq n-1$, $\frac{\partial h}{\partial z^n}(P) = 1$ であるようにとる。すなわち判るよりに

$$X_j = \frac{\partial}{\partial z^j} - \left(\frac{\partial h}{\partial z^j} \right) / \left(\frac{\partial h}{\partial z^n} \right) \frac{\partial}{\partial z^n} \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{-1}} \left(\frac{\partial h}{\partial z^n} \cdot \frac{\partial}{\partial z^n} - \frac{\partial h}{\partial \bar{z}^n} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n} \right)$$

ととればよい。

$$\begin{aligned} \sqrt{-1}[X_j, X_k] &= \sqrt{-1} \left[\frac{\partial}{\partial z^j} - \left(\frac{\partial h}{\partial z^j} \right) / \left(\frac{\partial h}{\partial z^n} \right) \frac{\partial}{\partial z^n}, \frac{\partial}{\partial z^k} - \left(\frac{\partial h}{\partial z^k} \right) / \left(\frac{\partial h}{\partial z^n} \right) \frac{\partial}{\partial z^n} \right] \\ &= \sqrt{-1} \left[\frac{\partial}{\partial z^k} \left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial z^j} \right) / \left(\frac{\partial h}{\partial z^n} \right) \right\} - \left(\frac{\partial h}{\partial z^k} \right) / \left(\frac{\partial h}{\partial z^n} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial z^n} \left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial z^j} \right) / \left(\frac{\partial h}{\partial z^n} \right) \right\} \right] \frac{\partial}{\partial z^n} \\ &\quad - \sqrt{-1} \left[\frac{\partial}{\partial z^j} \left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial z^k} \right) / \left(\frac{\partial h}{\partial z^n} \right) \right\} - \left(\frac{\partial h}{\partial z^j} \right) / \left(\frac{\partial h}{\partial z^n} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial z^n} \left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial z^k} \right) / \left(\frac{\partial h}{\partial z^n} \right) \right\} \right] \frac{\partial}{\partial z^n} \end{aligned}$$

と P で T

$$= \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} (p) T \quad \text{と なる。}$$

従って, N' が N 内で strongly pseudoconvex な領域なら, $M = \partial N'$ 上に U が $\bar{\partial}$ にされた CR 構造は, strongly pseudoconvex である。(M が Str. p. convex だということ)

逆に M とその上の積分可能な複素 CR 構造 E'' が与えられたと
き, 境界を含む複素多様体 N' があって, $M = \partial N'$ から E'' が
 $M \subset N'$ から U が $\bar{\partial}$ にされた構造になるかという, 一般的
にはわからない。あるいはそうでもない。あるいは CR 構造の積分可
能条件は, 実接バンドルの subbundle に対する積分可能な条件
の形式的類似であって, 必要条件であることが保証されない。
しかし幸いにも, strongly pseudoconvex な場合について
は, L. Boutet de Monvel [2] による以下の定理がある:

定理 4.1 M は compact connected な C^∞ 多様体で, 実
次元 $2n-1$ として $n \geq 3$ とする。 E'' が M 上の strongly
pseudoconvex な CR 構造であると,

(1) M 上の正則関数は, M の点を分離するほど沢山ある。

(2) $\forall P \in M$ に対して n 個の正則関数 $f^1, \dots, f^n$ があって,

$z \mapsto (f^1(z), \dots, f^n(z))$ によって P の近傍が $\mathbb{C}^n$ 内に

(strongly pseudoconvex な領域の境界として) immerse
される。

ここに f が正則函数であるとは、 $Xf=0$ for $X \in E''$ のことである。

この状態の下に、 $M = \cup U_\alpha$ を開集合 α 和として表わし、 U_α 上では正則函数 $(f'_\alpha, \dots, f''_\alpha)$ があって、

$$U_\alpha \ni z \xrightarrow{\phi_\alpha} f'_\alpha(z), \dots, f''_\alpha(z) \in \mathbb{C}^n$$

が C^∞ の embedding であり、 $\phi_\alpha(U_\alpha)$ は $\mathbb{C}^n$ 内の開集合 W_α α 中で、 $h_\alpha(z) = 0$ で定められ、複素数の組 (w_i) に対し

$$\sum \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} w_i \bar{w}_i = 0 \quad (w) \neq (0) \Rightarrow \sum \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} w_i \bar{w}_i > 0$$

と仮定しているものとしてよい。このことは、 $\mathbb{C}^n$ 内に開集合 W_α があって、 $\phi_\alpha(U_\alpha) \subset W_\alpha$ 、 W_α は $\phi_\alpha(U_\alpha)$ の各点で strongly pseudoconvex であることを意味する。 $E''|U_\alpha$ が、 ∂W_α 上に W_α から惹きおこされる CR 構造と一致することも見やすい。

ここで H. Lewy によるつぎの定理を引用する。(C3, 定理 2.6.13)

Lemma 4.1 $\mathbb{C}^n$ の点 (z_0) の近傍 W' で C^∞ 級の实数値函数 $h(z)$ があって $h(z_0) = 0$, $dh(z_0) \neq 0$ であるとする。さらにある n 次元 vector $(u', \dots, u'')$ に対し

$$(4.3) \quad \sum_{i, k} \frac{\partial^2 h}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} (z_0) u_i \bar{u}_k > 0, \quad \sum u_i \frac{\partial h}{\partial z_i} (z_0) = 0$$

が成立しているとする。このとき、 z_0 の近傍 W'' があって、

$$W = \{z \in W' \mid h(z) < 0\} \quad \text{と書くことし、} \quad \partial W \cap W' = \{z \in W' \mid h(z) = 0\}$$

上の (惹きおこされた CR 構造に因し) 正則な任意の f に対
 $1 \quad W' \cup (\partial W \cap W')$ で微分可能な F があって, $F|_{\partial W \cap W'} = f$,
 $\bar{\partial} F = 0$ on W となる。

今 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ とし, $\forall \alpha$ に対し $p \in \cdot$ とすると, $z_0 = \phi_\alpha(p)$,
 h_α と f_β^α ($\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 上の正則函数) に対し Lemma を適
 用して, W_α の開集合 $W'_{\alpha\beta}$ で, $\partial W'_{\alpha\beta} \supset \phi_\alpha(U_\alpha \cap V(p))$,
 $V(p)$ は p の近傍で $\subset U_\beta$, なるものとし, $\exists$ 正則函数 F_β^λ
 で, $\phi_\alpha(U_\alpha \cap V(p))$ 上で f_β^α に一致するものがある。 W_β で
 の座標を (z^λ) とおくと,

$$z^\lambda = F_\beta^\lambda(z)$$

は, $\phi_\alpha(U_\alpha \cap V(p))$ を境界の一部とする W_α の開集合から
 W_β 内への正則写像で, これは境界 $\phi_\alpha(U_\alpha \cap V(p))$ の近くでは
 双正則となる。

このようにして, $\phi_\alpha(U_\alpha), \phi_\beta(V(p)) \dots$ の片側同志が貼り
 合わされて, 複素多様体 N がえられ, M はその境界とみなさ
 れる。そして与えられた E'' は, N から惹きおこされた CR 構
 造となる。言いかえれば,

定理 4.2 compact connected 78 M ($2n-1$ 次元,
 $n > 2$) 上は, strongly pseudoconvex 78 CR 構造 E'' があ
 るとす, 境界をもった複素多様体 N' があって, $M = \partial N'$ かつ

E' は N' の惹きおこす $\mathbb{C}R$ 構造と一致する。 N' は M の各点で strongly pseudoconvex である。

強擬凸性から、 N' の開集合 X と X 上の強多重寄調和函数 $\rho: X \rightarrow (a, b) (\subset \mathbb{R})$ があって、 X は M を境界にもち、 $\forall c, d$ (with $a < c < d < b$) に対し

$$(4.4) \quad X_c^d = \{x \in X \mid c < \rho(x) < d\}$$

が X 内で相対コンパクトになる。以下 ρ の記号を用いる。

$$(4.5) \quad X_c = \{x \in X \mid c < \rho(x)\}, \quad X^d = \{x \in X \mid \rho(x) < d\}$$

そこで我々は、normal なスไตน์解析空間 Y で、 X を開部分多様体として含み、 $\forall d$ ($a < d < b$) に対し $(Y - X) \cup \bar{X}^d$ がコンパクトになるようなものを、求めたい。(以下 [1] に従って述べる)

X の構造層を $\mathcal{O}$ で表わす。また X 上の連接層 $\mathcal{F}$ を考える。

$\mathcal{F}$ の profondeur という概念があるが、ここでは次の性質を引用する: $\forall x \in X$ に対し、 x の近傍 $(\exists \mathbb{C}^m (m = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}(x)/\mathcal{M}(x)^2, \mathcal{M}(x) \text{ は } \mathcal{O}_x \text{ の極大イデアル)})$ における原点の近傍 W の解析的部分集合として実現できる。そこで $\mathcal{F}$ も W 上の連接層に延長しておく。その上で、 $\mathcal{F}$ の free resolution

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_W^{p_d} \rightarrow \mathcal{O}_W^{p_{d-1}} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{O}_W^{p_0} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

で、長さか最短なものを作る。近傍のとり方に関しても d の最小をとると、 $m - d = \text{prof}_x \mathcal{F}$ (x における $\mathcal{F}$ の profondeur)

$\text{prof } \mathcal{F} = \min_x \text{prof } \mathcal{F}_x$ と定めるのであった。Andreotti-Granetti の有限性定理の証明の経過から、つぎの Lemma がえられる：(A.G. の言い方で 1-convex な場合)

Lemma 4.2 X に開 1 上の条件があるとし $\mathcal{F}$ は X 上の連接層で、 $X^{a'}$ 上および $X^{b'}$ 上で $\text{prof } \mathcal{F} = r$ だとする。ここには $a < a' < b' < b$ 。このとき $a' < c < d < b'$ なら

$$(1) \quad H^r(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^r(X_c^d, \mathcal{F}) \text{ は}$$

$0 < r < r-1$ に対し bijective, r

$$(2) \quad H^r(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^r(X_c, \mathcal{F}) \text{ は}$$

$r < r-1$ に対し bijective, $r = r-1$ に対し injective.

この Lemma は、convex boundary や concave boundary にあつて (i.e. ρ の大きい部分や小さい部分について) 少し削つてお、コホモロジーが変わらないことを言っている。

$\mathcal{F}$ が locally free のときは $\text{prof } \mathcal{F} = \text{prof } \mathcal{O} = n$ ($\equiv \dim_{\mathbb{C}} X$, この n は X が non-singular だからで、Lemma 自身は解析空間に対しても成立つ) である。それで

$$n \geq 3 \text{ なら} \quad H^1(X, \mathcal{O}) \cong H^1(X_c^d, \mathcal{O})$$

$$n \geq 2 \text{ なら} \quad H^0(X, \mathcal{O}) \cong H^0(X_c, \mathcal{O})$$

が成立つ。

Proposition 4.1 $X, \mathcal{F}$ は上の Lemma のとおりとし、
 $\text{prof } \mathcal{F} \geq 3$ とする。 $\mathcal{J}$ がイテラルの連接層でその零点集合が $X^{a''}$ と交わらないものとする ($a < a'' < b$, なるある a' に対して)。
 このとき canonical map

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}/\mathcal{J}\mathcal{F})$$

は surjective である。

(証明) $a' = a''$ と考えてよい。完全列 $0 \rightarrow \mathcal{J}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{J}\mathcal{F} \rightarrow 0$ から

$$\begin{array}{ccccccc} \Gamma(X, \mathcal{F}) & \rightarrow & \Gamma(X, \mathcal{F}/\mathcal{J}\mathcal{F}) & \rightarrow & H'(X, \mathcal{J}\mathcal{F})^\beta & \rightarrow & H'(X, \mathcal{F}) \\ & & & & \downarrow \lambda & & \downarrow \mu \\ & & & & H'(X^{a'}, \mathcal{J}\mathcal{F}) & \xrightarrow{\sigma} & H'(X^{a'}, \mathcal{F}) \end{array}$$

なる完全・可換な図式をうる。ここで $X^{a'}$ 上では $\mathcal{J} = \mathcal{O}$, $\mathcal{J}\mathcal{F} = \mathcal{F}$ だから、そこで $\text{prof } \mathcal{J}\mathcal{F} \geq 3$ である。そこで Lemma 4.2 により λ, μ は bijective, σ は当然 bijective だから、 β が bijective になる。従って $\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}/\mathcal{J}\mathcal{F})$ は surjective である。

この命題を使って X 上に多くの正則関数が存在することを経証明できる：

Proposition 4.2 複素多様体 X 上に C^∞ 級の強多重微分調和関数 $\rho: X \rightarrow (a, b) \subset \mathbb{R}$ があって、 $a < \forall c < \forall d < b$

に対し X_c^d が相対コンパクトだとする。 $n = \dim X \geq 3$ だとする。このとき

(a) $\Gamma(X, \theta)$ は、 X の点を分離する

(b) X の任意の点で局所座標系が $\Gamma(X, \theta)$ からとれる。

(c) discrete な無限点列 $\{x_\nu\}$ で $\lim p(x_\nu) = b$ なるものに対し、 $\{x_\nu\}$ 上で有界でない $f \in \Gamma(X, \theta)$ がある。

(証明) 点 x のイテールの層を $\mathcal{M}(x)$ と表わすことにする。

$\mathcal{J} = \emptyset$ とし $x \neq y$ に対し $\mathcal{J} = \mathcal{M}(x) \cdot \mathcal{M}(y)$ をとって prop 4.1 を適用すれば、 $\Gamma(X, \theta) \rightarrow \Gamma(X, \theta/\mathcal{J}) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} : f \mapsto (f(x), f(y))$ が surjective である。すなわち (a) が成立つ。

$\mathcal{J} = \mathcal{M}(x)^2$, $\mathcal{J} = \prod \mathcal{M}(x_\nu)$ とおけば、(b), (c) がえられる。

この命題によつて適当な $f_1, \dots, f_N \in \Gamma(X, \theta)$ をえらぶと、 $X \ni x \mapsto \Phi(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x)) \in \mathbb{C}^N$ によつて X が $\mathbb{C}^N$ 内に解析的に写像され、 X_c^d 上では Φ は proper かつ双正則であるようにできることがわかる。そうすると、 X の閉部分多様体 X_1 で、 $X_c^{d'} \subset X_1 \subset X_c^d$ なるものが、 $P(r_1) - \overline{P(r_2)}$ の閉部分多様体として実現されることになる。ここに r_1, r_2 は multiradius $(r_1', \dots, r_1^N), (r_2', \dots, r_2^N)$ をあらわし $P(r_2) = \{z \in \mathbb{C}^N \mid z_i \in r_i^2\}$ である。

$G = P(r_1) - \overline{P(r_2)}$ は $\partial P(r_1)$ は強擬凸境界、 $\partial P(r_2)$ を強擬凹な境界として持つ。 X_1 のイテールの層を $\mathcal{J}$ とすると、

$$0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_G \rightarrow \mathcal{O}_{X_1} \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

$$\text{prof } \mathcal{O}_{X_1} \geq 3$$

のため、 $\text{prof } \mathcal{I} \geq 4$ である。そこで Prop. 4.2 と類似の方法で、(必要なら r_1, r_2 を s_1 かえて) X_1 上で

$$\mathcal{O}_G^{\otimes} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_G^P \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow 0 \quad (\varphi: \text{anal. hom.})$$

という完全列があると考える。 φ は G 上の正則函数を成分とする行列で与えられるが、それらの成分は $P(r_i)$ 全体の正則函数に一意的に延長される。従って $\varphi: \mathcal{O}_G^{\otimes} \rightarrow \mathcal{O}_G^P$ は $\tilde{\varphi}: \mathcal{O}_{P(r_i)}^{\otimes} \rightarrow \mathcal{O}_{P(r_i)}^P$ に延長され、その cokernel を $\mathcal{I}$ の $P(r_i)$ 上のイテール層 $\mathcal{I}_{P(r_i)}$ に延長される。これは、 X_1 が $\mathcal{O}(P_1)$ の局部分解析空間 $\tilde{X}_1$ に延長されることを意味する。 $\tilde{X}_1$ は次元が正である局部分空間をもたないから、 $\tilde{X}_1$ の特異点は孤立している。 $\tilde{X}_1$ の正規化 Y_1 と $X_{C'}$ とを、 X_1 で貼り合わせれば、正規な解析空間 N がえられる。

$N - X_d$ が N 内で相対コンパクトなことは、見やすい。この部分を除けば N は強多重調和函数で exhaust される。また N には次元が正である解析的部分空間はない。これから N がスタイン空間であることがわかる。

このような N が、作り方により自由に定まっていることを、論じねばならない。その論点: $\dim N \geq 3$ と正規性から、 $\text{prof } \mathcal{O}_N \geq 2$ が出てくること、 N は exhaust する強多重調和

調和函数 ψ を作ると、 $\varepsilon > 0$ に対し ε' をとり $N_\varepsilon = \{x \in N \mid \psi(x) > \varepsilon'\}$
 $\subset X_{\varepsilon'}$ とできること。この二者から

$$\Gamma(N, \mathcal{O}) \cong \Gamma(N_\varepsilon, \mathcal{O}) \cong \Gamma(X_{\varepsilon'}, \mathcal{O})$$

がえられる。スタイン解析空間 N は $\Gamma(N, \mathcal{O})$ によつて決まる
 から N は X によつて一意的に定まる。

これで、コンパクト $(2n-1)$ 次元多様体 M 上に、strongly
 pseudoconvex な CR 構造 E'' があるとき、それは M を境界と
 する正規スタイン空間 N によつて惹きおこされることか、判
 った。特異点の変形の問題を論ずるためには、 E'' がパラメー
 ターについて解析的に、または C^∞ に、変化するとき、 N の
 方も解析的または C^∞ な族を作りて作れるかを、論じなければ
 ならないか、今それを論ずることはできない。定理 4.1
 (その証明も、本稿ではより立ちなからたか) からして、こ
 の論点に適応した形にはなっていない。(穴のあいた多様体
 X の族があるとき、 N の族をうまく作ることはできているそ
 うである。穴を埋める話は X が解析空間のときにもできている。
 。

§ 5 Apriori estimate for $\bar{\partial}_b^\varphi$ and $\bar{\partial}_b^{*\varphi}$

まず集合 $\Gamma(M, T' \otimes \wedge^p({}^0T'')^*)$ に Sobolev k -norm を入れる。
 そのために少ばかり基礎的な所を復習しよう。

$C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ を、 $\mathbb{R}^m$ 上の support が compact である C^∞ -function 全体のなす集合とする。この集合には Sobolev s -norm が次のようにして入れることができる。すなわち

$$\|f\|_{(s)}^2 = \int_{\mathbb{R}^m} (1+|\zeta|)^{2s} |\hat{f}(\zeta)|^2 d\zeta$$

ここで $\hat{f}(\zeta)$ とは、 f の Fourier 変換のことである。

さていよいよ compact manifold M 上の $\Gamma(M, T' \otimes \wedge^p({}^0T'')^*)$ に Sobolev- s norm を入れよう。

まず $\{U_k, h_k\}_{k \in K}$ を、 M を real manifold と考えた時の局所座標系とし、これを fix する。勿論 K は、finite set とする。 $\{P_k\}$ をこの covering $\{U_k\}$ に関する I の分割としよう。そして更に各 U_k に対して ${}^0T''$ の moving frame を $(X_1^k, X_2^k, \dots, X_{n-1}^k)$ とする。(ただし $\dim_{\mathbb{R}} M = 2n-1$)。同じく T' の moving frame を $(s_1^k, s_2^k, \dots, s_n^k)$ とする。次に J^p を整数の p -tuple $(i_1, i_2, \dots, i_p)$ $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n-1$ とする。この時 $\mu \in \Gamma(M, T' \otimes \wedge^p({}^0T'')^*)$ に対して次の様な U_i 上の C^∞ 函数の有限個の組 $\{\mu_{i,I}^k\}$ (ただし $1 \leq i \leq n, I \in J^p$) が次の様にして決まる。

$$\mu(X_{i_1}^k, X_{i_2}^k, \dots, X_{i_p}^k) = \sum_{\mathbf{I}} \mu_{\mathbf{I}, \mathbf{I}}^k s_{\mathbf{I}}^k$$

$$\mathbf{I} = (i_1, i_2, \dots, i_p)$$

すると確かに $(\rho_i \cdot \mu_{\mathbf{I}, \mathbf{I}}^i) \cdot h_i^{-1}$ は、 $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ の元である。よって $\mu \in \Gamma(M, T' \otimes \bigwedge^p({}^0T'')^*)$ に対して Sobolev k -norm を次式で定義しよう。

$$\|\mu\|_{(s)}^2 = \sum_{\mathbf{I}, \mathbf{I}, k} \|(\rho_k \cdot \mu_{\mathbf{I}, \mathbf{I}}^k) \circ h_k^{-1}\|_{(s)}^2$$

この norm によって $\Gamma(M, T' \otimes \bigwedge^p({}^0T'')^*)$ は、pre-Hilbert space をなす。特に Sobolev 0-norm $\|\mu\|_{(0)}$ を $\|\mu\|^2$ であらわし、これに関する $\bar{\partial}_b^\varphi: \Gamma(M, T' \otimes \bigwedge^p({}^0T'')^*) \rightarrow \Gamma(M, T' \otimes \bigwedge^{p+1}({}^0T'')^*)$ の dual operator を $\bar{\partial}_b^{*\varphi}$ であらわす。この section §5 では、強擬凸な概 $\mathbb{C}R$ 構造 ${}^0T''$ に対して次の estimate を示すのが目標である。

$$(5.1) \quad \exists n_1, \exists \delta, C > 0, \|\varphi\|_{(n_1)} < \delta \text{ ならば}$$

$$\|\bar{\partial}_b^\varphi \mu\|^2 + \|\bar{\partial}_b^{*\varphi} \mu\|^2 + \|\mu\|^2 \geq C \|\mu\|_{1/2}^2$$

$$\text{for } \forall \mu \in \Gamma(M, T' \otimes \bigwedge^p({}^0T'')^*), \quad 1 \leq p < n-1$$

$$(5.2) \quad \exists \delta, C > 0, \exists n_1 \text{ で } \|\varphi\|_{n_1} < \delta \text{ ならば}$$

$$\begin{aligned} & \|\bar{\partial}_b^\varphi \mu\|_{(s)}^2 + \|\bar{\partial}_b^{*\varphi} \mu\|_{(s)}^2 + C_s (\|\mu\|_{(s)}^2 + \|\varphi\|_{(n_1+s)}^2 \|\mu\|_{(1)}^2) \\ & \geq C \|\mu\|_{(s+1/2)}^2 \quad (s \geq 1 \text{ の時}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \|\bar{\partial}_b^\varphi \mu\|_{(s)}^2 + \|\bar{\partial}_b^{*\varphi} \mu\|_{(s)}^2 + C_s (1 + \|\varphi\|_{(n_1+2-s)}^2) \|\mu\|_{(s)}^2 \\ & \geq C \|\mu\|_{(s+1/2)}^2 \quad (s < 1 \text{ の時}) \end{aligned}$$

(5.1), (5.2) 式を示す前に Kohn の estimate (5.3) を説明しよう

$$(5.3) \quad \exists c > 0 \text{ で} \\ \|\bar{\partial}_b \mu\|^2 + \|\bar{\partial}_b^* \mu\|^2 + \|\mu\|^2 \geq c \|\mu\|_{(1/2)}^2 \\ \text{for } \forall \mu \in \Gamma(M, T' \otimes \wedge^{\tau}({}^0 T'')^*), \quad 1 \leq \tau \leq n-1$$

ここでは特に $\tau = 1$ の時に証明する。

$\mu \in \Gamma(M, T' \otimes ({}^0 T'')^*)$ に対して U_k 上の C^∞ -function の組 $\{\mu_{\ell, i}^k\}$ を

$$\mu(X_i^k) = \sum_{\ell} \mu_{\ell, i}^k \cdot s_{\ell}^k$$

によって定める。

Lemma 5.1 この状態の F に

$$(5.4) \quad (\bar{\partial}_b \mu)_{\ell, (ij)}^k = X_i^k \cdot \mu_{\ell, j}^k - X_j^k \cdot \mu_{\ell, i}^k + O(\mu)$$

$$(5.5) \quad (\bar{\partial}_b^* \mu)_{\ell}^k = \sum_j \bar{X}_j^k \cdot \mu_{\ell, j}^k + O(\mu)$$

が成立する。ここに $O(\mu)$ は μ の成分のみによりその導函数を含まない項である。

証明) まず $\bar{\partial}_b$ の定義にもどってみよう。 $\bar{\partial}_b$ は、 $\Gamma(M, T') \rightarrow \Gamma(M, T' \otimes ({}^0 T'')^*)$ に対してまず定義されており 1-form $\mu \in \Gamma(M, T' \otimes ({}^0 T'')^*)$ に対しては、

$$\bar{\partial}_b \mu(X, Y) = X \cdot \mu(Y) - Y \cdot \mu(X) - \mu([X, Y]) \quad \text{ここで } X \cdot \mu(Y) = \bar{\partial}_b \mu(Y)(X)$$

と定義した。よって

$$\bar{\partial}_b \mu(X_i^k, X_j^k) = X_i^k \cdot \mu(X_j^k) - X_j^k \cdot \mu(X_i^k) - \mu([X_i^k, X_j^k]).$$

更に仮定 $\mu(X_j^k) = \sum_{\ell} \mu_{\ell,j}^k \cdot s_{\ell}^k$ より

$$X_i^k \cdot \mu(X_j^k) = \sum_{\ell} (X_i^k \cdot \mu_{\ell,j}^k) s_{\ell}^k + \mu_{\ell,j}^k (X_i^k \cdot s_{\ell}^k).$$

よって

$$\bar{\partial}_b \mu(X_i^k, X_j^k) = \sum_{\ell} (X_i^k \cdot \mu_{\ell,j}^k - X_j^k \cdot \mu_{\ell,i}^k) s_{\ell}^k + O(\mu)$$

$$\therefore (\bar{\partial}_b \mu)_{\ell,(ij)}^k = X_i^k \cdot \mu_{\ell,j}^k - X_j^k \cdot \mu_{\ell,i}^k + O(\mu)$$

よって (5.4) 式は、証明できた。

(5.5) 式は、 $\bar{\partial}_b^*$ の定義にもどって証明しよう。

$\varphi \in \Gamma(M, T')$ に対して $\varphi|_{U_k} = \sum_{\ell} \varphi_{\ell}^k \cdot s_{\ell}^k$ とし

$\mu \in \Gamma(M, T' \otimes ({}^0 T'')^*)$ に対して $\bar{\partial}_b^* \mu$ は $(\bar{\partial}_b^* \mu, \varphi) = (\mu, \bar{\partial}_b \varphi)$ で定義した。更に詳しく計算しよう。

$$(5.6) \quad \sum_{\ell,k} \int \rho_k (\bar{\partial}_b^* \mu)_{\ell}^k \cdot \rho_k \bar{\varphi}_{\ell}^k = \sum_{\ell,k} \int \sum_j \rho_k \mu_{\ell,j}^k \overline{(\rho_k \bar{\partial}_b \varphi)_{\ell,j}^k}$$

$\varphi|_{U_k} = \sum_{\ell} \varphi_{\ell}^k s_{\ell}^k$ より (5.6) 式の $(\bar{\partial}_b \varphi)_{\ell,j}^k$ は、

$$\bar{\partial}_b \varphi(X_j^k) = \sum_{\ell} (X_j^k \cdot \varphi_{\ell}^k) s_{\ell}^k + \sum_{\ell} \varphi_{\ell}^k (X_j^k \cdot s_{\ell}^k).$$

この式より $(\bar{\partial}_b \varphi)_{\ell,j}^k = X_j^k \cdot \varphi_{\ell}^k + O(\varphi)$ が成立する。この式を

(5.6) 式に代入すると

$$\begin{aligned} (5.7) \quad \sum_{\ell,k} \int \rho_k (\bar{\partial}_b^* \mu)_{\ell}^k \cdot \overline{\rho_k \varphi_{\ell}^k} &= \sum_{\ell,k} \int \sum_j \rho_k \mu_{\ell,j}^k \overline{\rho_k X_j^k \cdot \varphi_{\ell}^k} \\ &\quad + O(\mu, \varphi) \\ &= \sum_{\ell,k} \int \rho_k \sum_j \overline{X_j^k \cdot \mu_{\ell,j}^k} \cdot \rho_k \bar{\varphi}_{\ell}^k \\ &\quad + O'(\mu, \varphi) \end{aligned}$$

(5.7) は、任意の φ_ℓ^k に対して成立するから

$$(\bar{\partial}_b^* \mu)_\ell^k = \sum_j \bar{X}_j^k \cdot \mu_{\ell,j}^k + O(\mu) \quad (\text{証明終})$$

Lemma 5.1 より $E(\mu) = \|\bar{\partial}_b \mu\|^2 + \|\bar{\partial}_b^* \mu\|^2$ は、

$$\begin{aligned} E(\mu) = & \sum_{k, \ell, (i,j)} \| \rho_k (X_i^k \cdot \mu_{\ell,j}^k - X_j^k \cdot \mu_{\ell,i}^k + O(\mu)) \|^2 \\ & + \sum_{k, \ell} \| \rho_k (\sum_j \bar{X}_j^k \cdot \mu_{\ell,j}^k + O(\mu)) \|^2 \end{aligned}$$

となる。表式を簡略化するため、一つの k に対する項をとり
 $E'(\mu) = 1/2 \| \rho_k (X_i^k \cdot \mu_{\ell,j}^k - X_j^k \cdot \mu_{\ell,i}^k + O(\mu)) \|^2 + \| \rho_k \sum_j \bar{X}_j^k \cdot \mu_{\ell,j}^k \|^2$ について見る。 $X_i^k, \bar{X}_j^k, T^k$ ($1 \leq i, j \leq n-1, T^k = T^k$) を、分解 $\mathcal{CTM} = {}^0T'' \oplus {}^0T' \oplus F$ に対応する $\mathcal{CTM}|_{U_k}$ の base とすると、 ${}^0T''$ が強擬凸だということより

$$\{X_i^k, \bar{X}_j^k\} = C_{ij} T^k + X_{ij} + \bar{X}_{ij}$$

$\sqrt{-1}(C_{ij})$ は正定値行列

ここに X_{ij} は、 X_i の一次結合

$$\bar{X}_{ij} = \bar{X}_i$$

この ξ では特に $\sqrt{-1}(C_{ij}) = (\lambda_i \delta_{ij})$ とする。そうでない時は、ユリタニ変換を base $X_i, \bar{X}_j$ に施せばよい。 $(A+B, A+B) = \|A\|^2 + (A,B) + (B,A) + \|B\|^2, |(A,B) + (B,A)| \leq \frac{1}{\sigma} \|A\|^2 + \sigma \|B\|^2$ という関係を使うと、

$$\begin{aligned} E'(\mu) \cong & 1/2 \sum_{i,j} \| \rho_k (X_i^k \cdot \mu_{\ell,j}^k - X_j^k \cdot \mu_{\ell,i}^k) \|^2 + \| \rho_k \sum_j \bar{X}_j^k \cdot \mu_{\ell,j}^k \|^2 \\ & + a (\| \rho_k X_i^k \cdot \mu_{\ell,j}^k \|^2 + \| \rho_k \bar{X}_i^k \cdot \mu_{\ell,j}^k \|^2) + b \| \rho_k \mu \|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\cong \sum_{i,j} \|p_k X_j^k \cdot \mu_{\ell,i}^k\|^2 - \sum_{i,j} \langle p_k X_j^k \mu_{\ell,i}^k, p_k X_i^k \mu_{\ell,j}^k \rangle \\
&+ \sum_j \|p_k \bar{X}_j^k \cdot \mu_{\ell,j}^k\|^2 + \sum_{i,j} \langle p_k \bar{X}_j^k \mu_{\ell,j}^k, p_k \bar{X}_i^k \mu_{\ell,i}^k \rangle \\
&+ a(\|p_k X_i^k \mu_{\ell,j}^k\|^2 + \|p_k \bar{X}_i^k \mu_{\ell,j}^k\|^2) + b\|p_k \mu\|^2
\end{aligned}$$

ここに $\cong$ とは、後出(5.11)を導くに当って $\cong$ の両辺を等しいと見てよいことを示す。 a, b は正数で a はいくらでも小さくとれる。(それに依りて b を大きくとる。) $\|\mu\|^2$ の項は、(5.11)の $C\|\mu\|^2$ の存在のため問題にしないでよい。

$$\begin{aligned}
(5.8) \quad E'(\mu) &\cong \sum_{i,j} \|p_k X_j^k \mu_{\ell,i}^k\|^2 + \sum_j \|p_k \bar{X}_j^k \cdot \mu_{\ell,j}^k\|^2 \\
&+ \sum_{i,j} \langle p_k [X_i^k, \bar{X}_j^k] \mu_{\ell,j}^k, p_k \mu_{\ell,i}^k \rangle \\
&+ a(\|p_k X_i^k \mu_{\ell,j}^k\|^2 + \|p_k \bar{X}_j^k \mu_{\ell,i}^k\|^2) + b\|p_k \mu\|^2
\end{aligned}$$

ここでは(5.7)に出てくるような部分積分

(5.8)式中で、 $[X_i^k, \bar{X}_j^k]$ を $C_{ij}T^k + X_{ij} + \bar{X}_{ij}$ で置きかえろと

$$\begin{aligned}
(5.9) \quad E'(\mu) &\cong \sum_{i,j} \|p_k X_j^k \cdot \mu_{\ell,i}^k\|^2 + \sum_j \|p_k \bar{X}_j^k \cdot \mu_{\ell,j}^k\|^2 + \sum_i \langle \sqrt{-1} \lambda_i p_k T^k \mu_{\ell,i}^k, p_k \mu_{\ell,i}^k \rangle \\
&+ a(\|p_k X_i^k \cdot \mu_{\ell,j}^k\|^2 + \|p_k \bar{X}_j^k \cdot \mu_{\ell,i}^k\|^2) + b\|p_k \mu\|^2
\end{aligned}$$

a, b の性格は(5.8)におけるのと同じだが、値は変わるかも知れない。一方

$$\begin{aligned}
(5.10) \quad \|p_k X_j^k \mu_{\ell,i}^k\|^2 &\cong \|p_k \bar{X}_j^k \cdot \mu_{\ell,i}^k\|^2 + \langle p_k [\bar{X}_j^k, X_j^k] \mu_{\ell,i}^k, p_k \mu_{\ell,i}^k \rangle \\
&\cong \|p_k \bar{X}_j^k \mu_{\ell,i}^k\|^2 - \langle \sqrt{-1} \lambda_j p_k T^k \mu_{\ell,i}^k, p_k \mu_{\ell,i}^k \rangle
\end{aligned}$$

目標とする式は

$$(5.11) \quad \|\bar{\partial}_b \mu\|^2 + \|\bar{\partial}_b^* \mu\|^2 + c \|\mu\|^2 \geq c' \left(\sum_{j,k} \|p_k X_j^k \mu_{\ell,i}^k\|^2 + \sum_{j,k} \|p_k \bar{X}_j^k \mu_{\ell,i}^k\|^2 \right. \\ \left. + \sum_i |\langle p_k T^k \mu_{\ell,i}^k, p_k \mu_{\ell,i}^k \rangle| \right)$$

である。そこである i に対し $\operatorname{Re} \sqrt{-1} \langle T^k \mu_{\ell,i}^k, \mu_{\ell,i}^k \rangle$ が正ならば $0 < c \sum_j \lambda_j < \lambda_i$ となる c を選ぶ。 $\|\mu\|^2 = \sum_k \|p_k \mu\|^2$ における右辺の summand を $\|\mu\|_k$ であらわすと, (5.10) を使って

$$\|\bar{\partial}_b \mu\|_k^2 + \|\bar{\partial}_b^* \mu\|_k^2 = (1-c) \sum_j \|p_k X_j^k \mu_{\ell,i}^k\|^2 + \|p_k \bar{X}_j^k \mu_{\ell,i}^k\|^2 \\ + c \sum_j \|p_k \bar{X}_j^k \mu_{\ell,i}^k\|^2 + (\lambda_i - c \sum_j \lambda_j) \sqrt{-1} \langle \lambda_i p_k T^k \mu_{\ell,i}^k, p_k \mu_{\ell,i}^k \rangle \\ + a' (\|p_k X_j^k \mu_{\ell,i}^k\|^2 + \|p_k \bar{X}_j^k \mu_{\ell,i}^k\|^2) + b' \|p_k \mu\|^2$$

よって OK

もし $\operatorname{Re} \sqrt{-1} \langle T^k \mu_{\ell,i}^k, \mu_{\ell,i}^k \rangle$ が負ならば $c \sum_j \lambda_j > \lambda_i$ で $0 < c < 1$ となる c を, 一つ選ぶ。すると

$$\|\bar{\partial}_b \mu\|_k^2 + \|\bar{\partial}_b^* \mu\|_k^2 \geq (1-c) \sum_j \|p_k X_j^k \mu_{\ell,i}^k\|^2 \\ + c \sum_j \|p_k \bar{X}_j^k \mu_{\ell,i}^k\|^2 \\ + (c \sum_j \lambda_j - \lambda_i) (-\operatorname{Re} \langle \sqrt{-1} p_k T^k \mu_{\ell,i}^k, p_k \mu_{\ell,i}^k \rangle) \\ + a' (\|p_k X_j^k \mu_{\ell,i}^k\|^2 + \|p_k \bar{X}_j^k \mu_{\ell,i}^k\|^2) \\ + b' \|p_k \mu\|^2$$

よって OK.

いよいよ estimate (5.1), (5.2) を説明しよう。詳しい証明は略す。

${}^\varphi T''$ の moving frame を $({}^\varphi X_1^k, {}^\varphi X_2^k, {}^\varphi X_3^k, \dots, {}^\varphi X_{n-1}^k)$ とする。
すると $\mu \in \Gamma(M, T' \otimes ({}^\varphi T'')^*)$ に対して $\bar{\partial}_b^\varphi \mu, \bar{\partial}_b^{*\varphi} \mu$ は, $\mu({}^\varphi X_i^k)$

$= \sum_{\ell} \mu_{\ell,i}^k s_{\ell}^k$ とした時 Lemma 5.1 と同様にして次の lemma が成立する。

Lemma 5.2 $(\bar{\partial}_b^{\varphi} \mu)_{\ell,(ij)}^k = \varphi X_i^k \mu_{\ell,j}^k - \varphi X_j^k \mu_{\ell,i}^k + O(\|\mu\|)$
 $(\bar{\partial}_b^{*\varphi} \mu)_{\ell,i}^k = \sum_j \varphi X_i^k \mu_{\ell,j}^k + O(\|\mu\|)$

さらに $\{\varphi X_i^k, \varphi \bar{X}_j^k\} = C_{ij}(j^1(\varphi)) T^k + \varphi X_{ij}^k + \varphi \bar{X}_{ij}^k$

ここで φX_{ij}^k は、 φX_i^k の一次結合、 $\varphi \bar{X}_{ij}^k$ は、 $\varphi \bar{X}_i^k$

そして $j^1(\varphi)$ は φ の 1-jet で $C_{ij}(j^1(\varphi))$ は $j^1(\varphi)$ の成分の polynomial, $C_{ij}(j_{(0)}^1) = \sqrt{-1} \lambda_i \delta_{ij}$. そして更に次の lemma 5.3, lemma 5.4 が成立する。

Lemma 5.3 m を positive integer とし、 $m_1 > m/2$ とすると、 m と m_1 により depend する 常数 C と m, m_1 および 実数 s に depend する C_s が存在して、任意の $u, f \in C_0^{\infty}(R^m, \mathbb{C})$ に対し

$$\|uf\|_s \leq C \|u\|_{m_1} \|f\|_s + C_s \|u\|_{m_1+s} \|f\|_0$$

Lemma 5.4 $L^{\varphi} = \sum_{\alpha} A_{\alpha}(x, \varphi(x)) D_{\alpha}$ で $A_{\alpha}(x, \varphi(x))$ は、 φ と $D\varphi$ の degree r の polynomial D_{α} は、order m の differential operator だとすると、

$$\exists \delta_1 > 0 \text{ で } \|\varphi\|_{n_1} < \delta_1 \text{ なら}$$

$$\|L^\varphi(f)\|_s \leq C\|\varphi\|_{k_1}\|f\|_{m+s} + C_s(1+\|\varphi\|_{k_1}^{r-1})\|\varphi\|_{k_1+s}\|f\|_m$$

以上の lemma 5.3 と Kohn の estimate によって estimate (5.1) が証明できる。すなわち

Proposition 5.1 $\exists \delta, C > 0$ で $\|\varphi\|_{n_1} < \delta$ ならば

$$\|\bar{\partial}^\varphi \mu\|^2 + \|\bar{\partial}_b^{*\varphi} \mu\|^2 + \|\mu\|^2 \geq C\|\mu\|_{1/2}^2$$

for $\mu \in \Gamma(M, T' \otimes ({}^0 T'')^*), 1 \leq r < n-1$

が成立する。

さらに lemma 5.4 によって次の Proposition 5.2 が成立する。

(Estimate (5.2).)

Proposition 5.2 $\exists \delta, C > 0$ で $\|\varphi\|_{n_1} < \delta$ ならば

$$\|\bar{\partial}_b^\varphi \mu\|_s^2 + \|\bar{\partial}_b^{*\varphi} \mu\|_s^2 + C_s(\|\mu\|_s^2 + \|\varphi\|_{n_1+s}^2 \|\mu\|_1^2)$$

$$\geq C\|\mu\|_{s+1/2}^2 \quad (s \geq 1 \text{ の時})$$

$$\|\bar{\partial}_b^\varphi \mu\|_s^2 + \|\bar{\partial}_b^{*\varphi} \mu\|_s^2 + C_s(1 + \|\varphi\|_{n_1+2-s}^2) \|\mu\|_s^2$$

$$\geq C\|\mu\|_{s+1/2}^2 \quad (s < 1 \text{ の時})$$

次に証明抜きで以下の estimate を列挙しよう。証明は、lemma 5.3, lemma 5.4 を使ってなされる。

$$(5.12) \quad \|\varphi\|_{2n_1} < \delta_1 \text{ ならば } \|\bar{\partial}_b^\varphi \mu\|_s + \|\bar{\partial}_b^{*\varphi} \mu\|_s \leq C\|\mu\|_{s+1} + C_s\|\varphi\|_{n_1+s}\|\mu\|_1$$

$\bar{\partial}_b^{(\varphi, \theta)}$ を $\bar{\partial}_b^{(\varphi+\theta)} - \bar{\partial}_b^\varphi$ の θ に関する linear term とする。すると。

$$(5.13) \quad \|\varphi\|_{2n_1} < \delta_1 \text{ ならば}$$

$$\|\bar{\partial}_b^{(\varphi, \theta)} \mu\|_s + \|\bar{\partial}_b^{*(\varphi, \theta)} \mu\|_s \leq C \|\theta\|_{n_1} \|\mu\|_{s+1} + C_s (C \|\theta\|_{n_1+s} + \|\varphi\|_{n_1+s} \|\theta\|_{n_1}) \|\mu\|_1$$

(5.14) $\|\varphi\|_{2n_1} < \delta_1$ なら

$$\|\bar{\partial}_b^{(\varphi, \theta)} \mu\|_s + \|\bar{\partial}_b^{*(\varphi, \theta)} \mu\|_s \leq C \|\mu\|_{n_1} \|\theta\|_{s+1} + C_s (C \|\mu\|_{n_1+s} + \|\varphi\|_{n_1+s} \|\mu\|_{n_1}) \|\theta\|_1$$

また $\Delta_b^\varphi = \bar{\partial}_b^\varphi \bar{\partial}_b^{*\varphi} + \bar{\partial}_b^{*\varphi} \bar{\partial}_b^\varphi$ についても次の estimate が成立する

(5.15) $\exists \delta_1 > 0, \exists C_1 > 0$ で $\|\varphi\|_{n_1} < \delta_1$ なら

$$\|\Delta_b^\varphi \mu\|_s + C_s (\|\mu\| + \|\varphi\|_{n_1+s} \|\mu\|_2) \geq C_1 \|\mu\|_{s+1/2}$$

($s \geq 3/2$)

$$\|\Delta_b^\varphi \mu\|_s + C_s \|\mu\| \geq C_1 \|\mu\|_{s+1} \quad (3/2 \geq s \geq -1/2)$$

$\Delta_b^{(\varphi, \theta)}$ を $\Delta_b^{\varphi+\theta} - \Delta_b^\varphi$ の θ に関する linear term とする

(5.16) $\|\Delta_b^{(\varphi, \theta)} \mu\|_s \leq C \|\mu\|_{n_1} \|\theta\|_{s+2} + C_s (\|\mu\|_{n_1+s} + \|\varphi\|_{n_1+s} \|\mu\|_{n_1}) \|\theta\|_2$

更に Theorem 3.2 より $\bar{\partial}_b^\varphi, \bar{\partial}_b^{*\varphi}$ は、実は 1 次の differential operator でしかも Lemma 5.4 より

$$(5.17) \quad \|\bar{\partial}_b \bar{\partial}_b \mu\|_s + \|\bar{\partial}_b^* \bar{\partial}_b^* \mu\|_s \leq C \|p(\varphi)\|_{n_1} \|\mu\|_{s+1} + C_s (C \|p(\varphi)\|_{n_1+s} + \|\varphi\|_{n_1+s} \|p(\varphi)\|_{n_1}) \|\mu\|_1$$

同様に

$$(5.18) \quad \|\bar{\partial}_b^\varphi \bar{\partial}_b^\varphi \mu\|_s + \|\bar{\partial}_b^{*\varphi} \bar{\partial}_b^{*\varphi} \mu\|_s \leq C \|\mu\|_{n_1} \|p(\varphi)\|_{s+1} + C_s (\|\mu\|_{n_1+s} + \|\varphi\|_{n_1+s} \|p(\varphi)\|_{n_1})$$

§ 6 Operators ρ^φ and N^φ

私達は § 5 で不等式 $Q(\varphi, \varphi) = \|\bar{\partial}_b \varphi\|^2 + \|\bar{\partial}_b^* \varphi\|^2 + \|\varphi\|^2 \geq c \|\varphi\|_{\frac{1}{2}}^2$ を証明した。このことより $Q(\varphi, \varphi)$ は, $\Gamma(M, T' \otimes \wedge^r(T'')^*)$ (ただし $1 \leq r \leq n-1$) に sobolev-0 norm を入れて完備化した Hilbert space から実数への写像は, 完全連続であることがわかる。なんとならば, sequence $\{\varphi_n\}$ で $Q(\varphi_n, \varphi_n) \leq 1$ なるものに対して不等式 $Q(\varphi, \varphi) \geq c \|\varphi\|_{\frac{1}{2}}^2$ より $\|\varphi_n\|_{\frac{1}{2}}^2 < 1/c$ が成立する。よって Rellich's lemma より, 適当な sub-sequence $\{\varphi_{n_k}\}$ をとれば, これが sobolev 0-norm で converge する。よって $Q(\varphi, \varphi)$ は, 完全連続写像である。

$Q(\varphi, \varphi)$ が, 完全連続なことより, $F\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{\partial}_b \bar{\partial}_b^* + \bar{\partial}_b^* \bar{\partial}_b)\varphi + \varphi$ で定められる F の逆 F^{-1} は, 完全連続エルミット作用素であることがわかる。よって Hilbert-Schmidt の展開定理より δ_0 を, $\Delta_b = \bar{\partial}_b \bar{\partial}_b^* + \bar{\partial}_b^* \bar{\partial}_b$ の minimal non-zero eigenvalue とした時 $0 < \delta_1 < \min(\delta_0, c_1)$ と δ_1 をとると (c_1 は, §5 の estimate (5.2) の c_s の $s=1$ での値)

$\lambda \in \mathbb{C} \quad |\lambda| = \delta_1$ に対して,

$$\Delta_b + \lambda : \Gamma(M, T' \otimes \wedge^r(T'')^*) \rightarrow \Gamma(M, T' \otimes \wedge^r(T'')^*)$$

は, invertible となる。

特に次の評価が成立する。

$$(6.1) \quad \|(\Delta_b + \lambda)\mu\| \geq c\|\mu\|_1 \quad \text{for } \mu \in \Gamma(M, T^* \otimes \wedge^r(T^*)^*)$$

ただし $|\lambda| = \delta_1, 1 \leq r < n-1$

この § 6 では, (6.1) 式の Δ_b^φ に対する拡張を考える。
すなわち次の proposition 4.1 が, 成立する。

Proposition 6.1 $\exists c, \varepsilon_1 > 0$ で,

$$\|(\Delta_b^\varphi + \lambda)\mu\| \geq c\|\mu\|_1 \quad \text{for } \mu \in \Gamma(M, T^* \otimes \wedge^r(T^*)^*),$$

$$1 \leq r < n-1, |\lambda| = \delta_1, \|\varphi\|_{n_1} < \varepsilon_1 \quad (\text{この } \delta_1 \text{ は, (6.1) の } \delta_1 \text{ と同じ。})$$

証明) 背理法を使う。 Proposition 6.1 が成立しなかったと仮定しよう。すると, ある sequence $\{\varphi_j\}, \{\mu_j\}, \{\lambda_j\}$ で $\|\varphi_j\|_{n_1} \rightarrow 0$ として $\|\mu_j\|_1 = 1, |\lambda_j| = \delta_1$ で更に $\|(\Delta_b^{\varphi_j} + \lambda_j)\mu_j\| \rightarrow 0$ を, 満たすものが存在する。

$\|\mu_j\|_1 = 1$ よりある適当な sub-sequence $\{\mu_{n_k}\}$ で μ_{n_k} は, sobolev 0-norm で convergent する。

この sub-sequence $\{\mu_{n_k}\}$ の極限を, μ_0 と書こう。 $|\lambda_j| = \delta_1$ より必要ならさらに sub-sequence をとれば, $\exists \lambda_0, |\lambda_0| = \delta_1$ で $\lambda_{n_k} \rightarrow \lambda_0$ だと考えてよい。

$$\|(\Delta_b^{\varphi_j} + \lambda_j)\mu_j\| \rightarrow 0 \text{ より, } \Delta_b^{\varphi_j} \mu_j \rightarrow -\lambda_0 \mu_0 \text{ in Sobolev}$$

0-norm が成立する。更に $(\mu_j, \Delta_b^{\varphi_j} f) \rightarrow (\mu_0, \Delta_b f)$ ことに f は, $\Gamma(M, T \otimes \hat{\Lambda}^r(\pi^* T^*))$ の任意の element, よって $(\mu_0, (\Delta_b + \lambda_0)f) = 0$ が $\Gamma(M, T \otimes \hat{\Lambda}^r(\pi^* T^*))$ の任意の f に対して成立する。よって sub-elliptic equation の regularity より μ_0 は, C^∞ であることが成立する。しかも $\|\mu_0\|_1 = 1$ が成立することより, 言い換えて, $\|(\Delta_b + \lambda_0)\mu\| \geq c\|\mu\|_1$ に矛盾する。よって proposition 6.1 は, 成立する。

Proposition 6.1 と Δ_b^{φ} が self adjoint であることより, von-Neumann の定理から $(\Delta_b^{\varphi} + \lambda)^{-1}$ は, $\Gamma(M, T \otimes \hat{\Lambda}^r(\pi^* T^*))$ 上 well defined になる。この operator $(\Delta_b^{\varphi} + \lambda)^{-1}$ について実は, 次の proposition が成立する。

Proposition 6.2 ε_1 を, proposition 6.1 の ε_1 とする。

そして $\delta_2 = \delta_1/c_1$ とおくと, 任意の正の整数 s に対して,

$$c_1 \|(\Delta_b^{\varphi} + \lambda)^{-1} \mu\|_{s+1} \leq (1 + \delta_2 + \dots + \delta_2^s) \|\mu\|_s \\ + C_s (\|\varphi\|_{n_1+s+1}) \|\mu\|_1$$

$$\text{ここに } \|\varphi\|_{n_1} < \min(\delta, \varepsilon_1) \quad |\lambda| = \delta_1$$

証明) s に関する induction で証明しよう。

$s=0$ の時は, proposition 6.1 より OK。

$s=1$ の時は, (5.15) 式を使う。すなわち

$$\|\Delta_b^{\varphi} \mu\|_s + c\|\mu\| \geq c_1 \|\mu\|_{s+1} \quad (3/2 > s > -1/2)$$

$$\|\Delta_b^\varphi \mu\|_s + c_s (\|\mu\| + \|\varphi\|_{n_1+s} \|\mu\|_z) \geq c_1 \|\mu\|_{s+1} \quad (s \geq 3/2)$$

$$\text{から } \|\Delta_b^\varphi (\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} \mu\|_1 + c \|(\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} \mu\| \geq c_1 \|(\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} \mu\|_2$$

$$\|\mu\|_1 + \|\lambda (\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} \mu\|_1 + c \|(\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} \mu\| \geq c_1 \|(\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} \mu\|_2$$

$$\therefore c_1 \|(\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} \mu\|_2 \leq \|\mu\|_1 + c^{-1}(\delta + c) \|\mu\|$$

s まで成立するとして $s+1$ の時, 同じく (5, 15) 式を使つて,

$$\begin{aligned} c_1 \|(\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} \mu\|_{s+1} &\leq \|\Delta_b^\varphi (\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} \mu\|_s + c_s (\|(\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} \mu\|_1 \\ &\quad + \|\varphi\|_{n_1+s} \|(\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} \mu\|_z) \leq \|\mu\|_s + \|\lambda (\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} \mu\|_s \\ &\quad + c_s (\|\varphi\|_{n_1+s} + 1) \|\mu\|_1. \end{aligned}$$

induction より s の時まで成立するから

$$\begin{aligned} c_1 \|(\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} \mu\|_{s+1} &\leq \|\mu\|_k + \delta_1 \cdot c_1^{-1} (1 + \delta_z + \cdots + \delta_z^{s-1}) \|\mu\|_s \\ &\quad + c_s (\|\varphi\|_{n_1+s} + 1) \|\mu\|_1 \\ &\leq (1 + \delta_z + \cdots + \delta_z^s) \|\mu\|_s + c_s (\|\varphi\|_{n_1+s} + 1) \|\mu\|_1 \end{aligned}$$

よって Proposition b.2 は, 証明された。

特に δ_z は, $0 < \delta_z < 1$ であったから (なにとせよ $0 < \delta_1 < \min(\delta_0, c_1)$ より $\delta_z = \delta_1/c_1 < 1$) Proposition b.2 は, 次の様に考えよう。すなわち次の (b.1) が成立する。

$$(b.1) \quad \begin{cases} |\lambda| = \delta_1, \|\varphi\|_{n_1} < \varepsilon, \text{ ならば 任意の整数 } s \geq 0 \text{ に対して} \\ \|\Delta_b^\varphi (\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} \mu\|_{s+1} \leq c \|\mu\|_s + c_s (\|\varphi\|_{s+n_1} + 1) \|\mu\|_1 \end{cases}$$

さていよいよ $\Gamma(M, T \otimes \wedge^r(T^*)^*)$ (ただし $1 \leq r \leq n-z$)

上の operator ρ^φ と N^φ を, 導入しよう。作用素 ρ^φ , $\rho_\perp^\varphi$, N^φ を次の様に定義する。

$$(b.2) \quad \begin{cases} \rho^\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (2\pi i)^{-1} \int_{|\lambda|=\delta_1} (\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} d\lambda \\ \rho_\perp^\varphi \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \rho^\varphi \\ N^\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \int_{|\lambda|=\delta_1} \lambda^{-1} (\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} d\lambda \end{cases}$$

このように ρ^φ , N^φ を導入すると, 次の proposition 6.3 が成立する。

Proposition 6.3 $\rho^\varphi \cdot \rho^\varphi = \rho^\varphi$ — (1)

$$N^\varphi \cdot \Delta_b^\varphi = \Delta_b^\varphi N^\varphi = \rho_\perp^\varphi \quad \text{— (2)}$$

$$\rho^\varphi \cdot N^\varphi = N^\varphi \rho^\varphi = 0 \quad \text{— (3)}$$

$$\rho_\perp^\varphi \cdot N^\varphi = N^\varphi \rho_\perp^\varphi = N^\varphi \quad \text{— (4)}$$

証明) (1) は, $\rho^\varphi = (2\pi i)^{-1} \int (\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} d\lambda$ より,

$$\rho^\varphi \cdot \rho^\varphi = (2\pi i)^{-2} \int_{\lambda'} \int_{\lambda} (\Delta_b^\varphi + \lambda')^{-1} (\Delta_b^\varphi + \lambda) d\lambda' d\lambda \text{ が成立する。}$$

ところで $(\Delta_b^\varphi + \lambda')^{-1} \cdot (\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} = (\lambda' - \lambda)^{-1} (\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} - (\lambda' - \lambda)^{-1} (\Delta_b^\varphi + \lambda')^{-1}$ より, 留数の定理に従って (1) は OK。 (2)

について,

$$\begin{aligned} N^\varphi \Delta_b^\varphi &= (2\pi i)^{-1} \int_{|\lambda|=\delta_1} \lambda^{-1} (\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} \Delta_b^\varphi d\lambda \\ &= (2\pi i)^{-1} \int_{|\lambda|=\delta_1} \lambda^{-1} d\lambda - (2\pi i)^{-1} \int_{|\lambda|=\delta_1} (\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} d\lambda \end{aligned}$$

よって $N^\varphi \cdot \Delta_b^\varphi = 1 - \rho^\varphi = \rho_\perp^\varphi$ が, 成立する。 $\Delta_b^\varphi N^\varphi = 1 - \rho^\varphi = \rho_\perp^\varphi$ も同じ。

(3) は, $\rho^\varphi \cdot N^\varphi = (2\pi i)^{-2} \int_{\Gamma'} \int_{\Gamma} (\Delta_b^\varphi + \lambda')^{-1} \lambda^{-1} (\Delta_b^\varphi + \lambda) d\lambda d\lambda'$
 が成立することと $\lambda^{-1} (\Delta_b^\varphi + \lambda')^{-1} (\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} = \lambda^{-1} (\lambda' - \lambda)$
 $(\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} - \lambda^{-1} (\lambda' - \lambda) (\Delta_b^\varphi + \lambda')^{-1}$ より留数の定理を使って
 示される。

(4) は, $\rho_\perp^\varphi = 1 - \rho^\varphi$ と (3) より OK.

上の operator ρ^φ, N^φ を使って estimate (6.1) を書き
 なおすと次の様になる。すなわち

$|\lambda| = \delta_1, \|\varphi\|_{n_1} < \varepsilon_1$ なら

$$(6.3) \quad \|\rho^\varphi \mu\|_{s+1} \leq c \|\mu\|_s + c_s (\|\varphi\|_{s+n_1} + 1) \|\mu\|_1,$$

$$(6.4) \quad \|N^\varphi \mu\|_{s+1} \leq c \|\mu\|_s + c_s (\|\varphi\|_{s+n_1} + 1) \|\mu\|_1.$$

特に (6.4) 式と $\rho_\perp^\varphi = 1 - \rho^\varphi$ より

$$(6.5) \quad \|\rho_\perp^\varphi \mu\|_s \leq c \|\mu\|_s + c_s (\|\varphi\|_{s+n_1} + 1) \|\mu\|_1$$

さて次に operator R^φ, R_*^φ を導入しよう。

$$(6.6) \quad R^\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \rho^\varphi \cdot \bar{\partial}_b^\varphi - \bar{\partial}_b^\varphi \cdot \rho^\varphi = [\rho^\varphi, \bar{\partial}_b^\varphi]$$

$$(6.7) \quad R_*^\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \rho^\varphi \cdot \bar{\partial}_b^{*\varphi} - \bar{\partial}_b^{*\varphi} \cdot \rho^\varphi = [\rho^\varphi, \bar{\partial}_b^{*\varphi}]$$

すると R^φ, R_*^φ は、次のように表現される。

$$(6.8) \quad R^\varphi = (2\pi i)^{-1} \int_{|\lambda|=\delta_1} (\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} [\bar{\partial}_b^\varphi, \Delta_b^\varphi] (\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} d\lambda,$$

$$(6.9) \quad R_*^\varphi = (2\pi i)^{-1} \int_{|\lambda|=\delta_1} (\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} [\Delta_b^\varphi, \bar{\partial}_b^{*\varphi}] (\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} d\lambda.$$

何と云うならば, $\bar{\partial}_b^\varphi \cdot (\Delta_b^\varphi + \lambda) = (\Delta_b^\varphi + \lambda) \cdot \bar{\partial}_b^\varphi + [\bar{\partial}_b^\varphi, \Delta_b^\varphi]$ より

$(\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} \cdot \bar{\partial}_b^\varphi - \bar{\partial}_b^\varphi \cdot (\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} = (\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} [\bar{\partial}_b^\varphi, \Delta_b^\varphi] (\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1}$ が,

成立する。よって $\rho^\varphi = (2\pi i)^{-1} \int (\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} d\lambda$ より (6.7) 式は成立する。(6.6) も同様である。

この R^φ と R_*^φ に関する estimate を、調べてみよう。

まず $[\bar{\partial}_b^\varphi, \Delta_b^\varphi] = \bar{\partial}_b^\varphi \bar{\partial}_b^\varphi \bar{\partial}_b^{*\varphi} - \bar{\partial}_b^{*\varphi} \bar{\partial}_b^\varphi \bar{\partial}_b^\varphi$ と、定理 3.2 より次の estimate が成立する。すなわち (ある n_1 かある)

$\|\varphi\|_{2n_1} < \varepsilon$ ならば,

$$(6.10) \quad \|[\bar{\partial}_b^\varphi, \Delta_b^\varphi]\mu\|_s \leq c_s (\|P\|_{n_1} \|\mu\|_{s+2} + (\|P\|_{n_1+s} + \|\varphi\|_{2n_1+s} \|P\|_{n_1}) \|\mu\|_2)$$

$$(6.11) \quad \|[\bar{\partial}_b^{*\varphi}, \Delta_b^\varphi]\mu\|_s \leq c_s (\|P\|_{n_1} \|\mu\|_{s+2} + (\|P\|_{n_1+s} + \|\varphi\|_{2n_1+s} \|P\|_{n_1}) \|\mu\|_2)$$

$$(6.12) \quad \|[\bar{\partial}_b^\varphi, \Delta_b^\varphi]\mu\|_s \leq c_s (\|\mu\|_{n_1} \|P\|_{s+2} + (\|\mu\|_{n_1+s} + \|\varphi\|_{2n_1+s} \|\mu\|_{n_1}) \|P\|_2)$$

$$(6.13) \quad \|[\bar{\partial}_b^{*\varphi}, \Delta_b^\varphi]\mu\|_s \leq c_s (\|\mu\|_{n_1} \|P\|_{s+2} + (\|\mu\|_{n_1+s} + \|\varphi\|_{2n_1+s} \|\mu\|_{n_1}) \|P\|_2)$$

よって特に (6.7) と (6.10) より, 次の estimate が成立する。

$$(6.14) \quad \|R^\varphi \mu\|_s \leq c_s (\|P(\varphi)\|_{n_1} \|\mu\|_s + (\|P(\varphi)\|_{n_1+s} + \|\varphi\|_{2n_1+s} \|P(\varphi)\|_{n_1}) \|\mu\|_1)$$

同様に (6.9) と (6.11) より

$$(6.15) \quad \|R_*^\varphi \mu\|_s \leq c_s (\|P(\varphi)\|_{n_1} \|\mu\|_s + (\|P(\varphi)\|_{n_1+s} + \|\varphi\|_{2n_1+s} \|P(\varphi)\|_{n_1}) \|\mu\|_1)$$

また同じく (6.8) と (6.12) より

$$(6.16) \quad \|R^\varphi \mu\|_S \leq C_S (\|\mu\|_{n_1} \|P(\varphi)\|_{S+1} + (\|\mu\|_{n_1+S} + \|\varphi\|_{2n_1+1+S} \|\mu\|_{n_1+S_0}) \|P(\varphi)\|_Z)$$

同様に (6.9) と (6.13) より

$$(6.17) \quad \|R_*^\varphi \mu\|_S \leq C_S (\|\mu\|_{n_1} \|P(\varphi)\|_{S+1} + (\|\mu\|_{n_1+S} + \|\varphi\|_{2n_1+1+S} \|\mu\|_{n_1+S_0}) \|P(\varphi)\|_Z)$$

更に詳しく estimate を調べていこう。

Proposition 6.4 $\Gamma(M, T \otimes \wedge^r(T^*)^*) \quad r \geq 1$ 上で
次の公式が成立する。

$$[\bar{\partial}_b^\varphi, N^\varphi] = R^\varphi \cdot N^\varphi + N^\varphi \cdot R^\varphi + N^\varphi [\Delta_b^\varphi, \bar{\partial}_b^\varphi] N^\varphi$$

$$[\bar{\partial}_b^{*\varphi}, N^\varphi] = -R_*^\varphi \cdot N^\varphi - N^\varphi \cdot R_*^\varphi + N^\varphi [\Delta_b^\varphi, \bar{\partial}_b^{*\varphi}] N^\varphi$$

証明) $\Delta_b^\varphi \cdot \bar{\partial}_b^\varphi \cdot N^\varphi = \bar{\partial}_b^\varphi \cdot \Delta_b^\varphi \cdot N^\varphi + [\Delta_b^\varphi, \bar{\partial}_b^\varphi] N^\varphi$
 $= \bar{\partial}_b^\varphi \rho_\perp^\varphi + [\Delta_b^\varphi, \bar{\partial}_b^\varphi] N^\varphi$

(Proposition 4.3 より)

$$= \rho_\perp^\varphi \cdot \bar{\partial}_b^\varphi + [\bar{\partial}_b^\varphi, \rho_\perp^\varphi] + [\Delta_b^\varphi, \bar{\partial}_b^\varphi] N^\varphi$$

よって

$$(6.18) \quad \Delta_b^\varphi \cdot \bar{\partial}_b^\varphi \cdot N^\varphi = \Delta_b^\varphi N^\varphi \bar{\partial}_b^\varphi + R^\varphi + [\Delta_b^\varphi, \bar{\partial}_b^\varphi] N^\varphi$$

が成立する。この式の両辺に N^φ を、左から operate する。
すると、

$$(6.19) \quad \rho_\perp^\varphi [\bar{\partial}_b^\varphi, N^\varphi] = N^\varphi \cdot R^\varphi + N^\varphi [\bar{\partial}_b^\varphi, N^\varphi] N^\varphi$$

が, 成立する。一方 $\rho^\varphi \cdot N^\varphi = 0$ より

$$\begin{aligned} (6.20) \quad \rho^\varphi [\bar{\partial}_b^\varphi, N^\varphi] &= \rho^\varphi \bar{\partial}_b^\varphi N^\varphi - \rho^\varphi N^\varphi \bar{\partial}_b^\varphi \\ &= [\rho^\varphi, \bar{\partial}_b^\varphi] N^\varphi \\ &= R^\varphi \cdot N^\varphi. \end{aligned}$$

(6.19) と (6.20) より

$$[\bar{\partial}_b^\varphi, N^\varphi] = R^\varphi \cdot N^\varphi + N^\varphi \cdot R^\varphi + N^\varphi [\Delta_b^\varphi, \bar{\partial}_b^\varphi] N^\varphi$$

が成立つ。 $[\bar{\partial}_b^{\psi}, N^\varphi]$ についても同様に証明できるので省略しよう。

次に $\rho^\psi - \rho^\varphi$ が, $\psi - \varphi$ によりどのように estimate できるかを調べていく。定義より

$$\rho^\psi - \rho^\varphi = (2\pi i)^{-1} \int_{|\lambda|=1} (\Delta_b^\psi + \lambda)^{-1} (\Delta_b^\varphi - \Delta_b^\psi) (\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} d\lambda$$
が成立する。よって lemma 5.3 と lemma 5.4 より直ちに,

$$\begin{aligned} \|(\rho^\psi - \rho^\varphi)\mu\|_S &\leq c \|\varphi - \psi\|_{n_1} \|\mu\|_S + c_S (\|\varphi - \psi\|_{n_1+S} + (\|\varphi\|_{n_1+S} \\ &\quad + \|\psi\|_{n_1+S} + 1) \|\varphi - \psi\|_{n_1}) \|\mu\|_1. \end{aligned}$$

しかし, この estimate では, 後の versal family の construction で役に立たない。よってもう少し良くしよう。

$$\begin{aligned} (6.21) \quad (\rho^\psi - \rho^\varphi)\mu &= (\rho^\psi - \rho^\varphi)\rho^\varphi\mu + (\rho^\psi - \rho^\varphi)\rho_\perp^\varphi\mu \\ &= (\rho^\psi - \rho^\varphi)\rho^\varphi\mu + \rho^\psi \cdot \rho_\perp^\varphi\mu \end{aligned}$$

(6.21) 式の右辺の第1項は,

$$\begin{aligned}
(6.22) \quad \|(\rho^\psi - \rho^\varphi)\rho^\varphi\mu\|_S &\leq c\|\varphi - \psi\|_{n_1}\|\rho^\varphi\mu\|_S + c_S(\|\varphi - \psi\|_{n_1+S} \\
&\quad + (\|\varphi\|_{n_1+S} + \|\psi\|_{n_1+S} + 1)\|\varphi - \psi\|_{n_1}) \\
&\quad \|\rho^\varphi\mu\|_1 \\
&\leq c\|\varphi - \psi\|_{n_1}\|\mu\|_{S-1} + c_S(\|\varphi - \psi\|_{n_1+S} \\
&\quad + (\|\varphi\|_{n_1+S} + \|\psi\|_{n_1+S} + 1)\|\varphi - \psi\|_{n_1}) \\
&\quad \|\mu\|_1
\end{aligned}$$

更に (6.21) 式の右辺の才 2 項は,

$$\begin{aligned}
\|\rho^\psi\rho_\perp^\varphi\mu\|_S &\leq c\|\rho^\psi\rho_\perp^\varphi\mu\|_{S-1} + c_S(\|\psi\|_{S+n_1} + 1)\|\rho^\psi\rho_\perp^\varphi\mu\|_1 \\
&\leq c\|(\rho^\psi - \rho^\varphi)\rho_\perp^\varphi\mu\|_{S-1} + c_S(\|\psi\|_{S+n_1} + 1) \\
&\quad \|(\rho^\psi - \rho^\varphi)\rho_\perp^\varphi\mu\|_1 \\
&\leq c\|\varphi - \psi\|_{n_1}\|\rho_\perp^\varphi\mu\|_{S-1} + c_S(\|\varphi - \psi\|_{S+n_1} \\
&\quad + (\|\varphi\|_{S+n_1} + \|\psi\|_{S+n_1} + 1)\|\varphi - \psi\|_{n_1})\|\rho_\perp^\varphi\mu\|_1 \\
&\leq c\|\varphi - \psi\|_{n_1}\|\mu\|_{S-1} + c_S(\|\varphi - \psi\|_{S+n_1} \\
&\quad + (\|\varphi\|_{S+n_1} + \|\psi\|_{S+n_1} + 1)\|\varphi - \psi\|_{n_1})\|\rho_\perp^\varphi\mu\|_1
\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned}
(6.23) \quad \|\rho^\psi\rho_\perp^\varphi\mu\|_S &\leq c\|\varphi - \psi\|_{n_1}\|\mu\|_{S-1} + c_S(\|\varphi - \psi\|_{S+n_1} \\
&\quad + \|\varphi\|_{S+n_1} + \|\psi\|_{S+n_1} + 1)\|\varphi - \psi\|_{n_1})\|\mu\|_1
\end{aligned}$$

(6.22) 式と (6.23) 式より

$$\begin{aligned}
(6.24) \quad \|(\rho^\psi - \rho^\varphi)\mu\|_S &\leq c\|\varphi - \psi\|_{n_1}\|\mu\|_{S-1} + c_S(\|\varphi - \psi\|_{n_1+S} \\
&\quad + (\|\varphi\|_{n_1+S} + \|\psi\|_{n_1+S} + 1)\|\varphi - \psi\|_{n_1})\|\mu\|_1
\end{aligned}$$

そして更に $\rho^{\varphi+\theta} - \rho^\varphi$ の θ に関する linear term を,

$\rho^{(\varphi, \theta)}$ としよう。すると $\rho^{(\varphi, \theta)}$ は, $\rho^\varphi = (2\pi i)^{-1} \int_{|\lambda|=\delta_1} (\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} d\lambda$ より 次の様に書ける。

$$\rho^{(\varphi, \theta)} = (2\pi i)^{-1} \int_{|\lambda|=\delta_1} (\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} \Delta_b^{(\varphi, \theta)} (\Delta_b^\varphi + \lambda)^{-1} d\lambda$$

ところで differential operator $\Delta_b^{(\varphi, \theta)}$ の係数は θ とその微分について polynomial だが, これは θ に関して 2 階の微分しか含まない。よって次の estimate が成立する。

$$(6.25) \quad \|\rho^{(\varphi, \theta)}\mu\|_s \leq c \|\mu\|_{n_1} \|\theta\|_{s+1} + (\|\mu\|_{n_1+s} + \|\varphi\|_{n_1+s} \|\mu\|_{n_1}) \|\theta\|_3$$

同様にして $N^\varphi, N^{(\varphi, \theta)}$ についての estimate を調べていく。まず次の proposition 6.5 を証明しよう。

Proposition 6.5 $\Gamma(M, T' \otimes \hat{\Lambda}^*(T'')^*)$ 上で $(1 \leq r \leq n-2$ とし)

$$N^\varphi - N^\psi = N^\psi(\rho^\psi - \rho^\varphi) + (\rho^\psi - \rho^\varphi)N^\varphi + N^\psi(\Delta_b^\psi - \Delta_b^\varphi)N^\varphi$$

証明)

$$\begin{aligned} (6.26) \quad \Delta_b^\psi(N^\varphi - N^\psi) &= (\Delta_b^\psi - \Delta_b^\varphi)N^\varphi + \Delta_b^\varphi N^\varphi - \Delta_b^\psi N^\psi \\ &= (\Delta_b^\psi - \Delta_b^\varphi)N^\varphi + \rho_\perp^\varphi - \rho_\perp^\psi \\ &= (\Delta_b^\psi - \Delta_b^\varphi)N^\varphi + \rho^\psi - \rho^\varphi \end{aligned}$$

の両辺に N^ψ を operate とすると,

$$\rho_\perp^\varphi(N^\varphi - N^\psi) = N^\psi(\Delta_b^\psi - \Delta_b^\varphi)N^\varphi + N^\psi(\rho^\psi - \rho^\varphi)$$

ところで $\rho^\psi(N^\varphi - N^\psi) = \rho^\psi \cdot N^\varphi = (\rho^\psi - \rho^\varphi) \cdot N^\varphi$ より

$N^\varphi - N^\psi = N^\psi(\rho^\psi - \rho^\varphi) + (\rho^\psi - \rho^\varphi)N^\varphi + N^\psi(\Delta_b^\psi - \Delta_b^\varphi)N^\varphi$ が成立する。よって OK。

$N^{\varphi+\theta} - N^{\varphi}$ の θ に関する linear term を, $N^{(\varphi,\theta)}$ とすると,
 Proposition 6.5 より,

$$(6.27) \quad N^{(\varphi,\theta)}\mu = -(N^{\varphi} \cdot \rho^{(\varphi,\theta)}\mu + \rho^{(\varphi,\theta)}N^{\varphi}\mu + N^{\varphi}\Delta_b^{(\varphi,\theta)}N^{\varphi}\mu)$$

更にこの operator N^{φ} について次の estimate が成立する。

Proposition 6.6 $\Gamma(M, T^* \otimes \wedge^r(T^*))$ 上で ($1 \leq r \leq n-2$ として)

$$\begin{aligned} & \|\bar{\partial}_b^{\varphi} \bar{\partial}_b^{*\varphi} N^{\varphi}\mu\|_s + \|\bar{\partial}_b^{*\varphi} \bar{\partial}_b^{\varphi} N^{\varphi}\mu\|_s \\ & \leq c\|\mu\|_s^2 + c_s(\|\varphi\|_{n,1s} + 1)\|\mu\|_2 \quad \text{for } s \geq 1 \end{aligned}$$

が成立する。特に $s=0$ の時は, 最後の term はいらない。

証明) S を, $\|S\mu\| = \|\mu\|_s$ となる pseudo-differential operator とする。そして $I \stackrel{\text{def}}{=} |\langle S \bar{\partial}_b^{\varphi} \bar{\partial}_b^{*\varphi} N^{\varphi}\mu,$

$S \bar{\partial}_b^{*\varphi} \bar{\partial}_b^{\varphi} N^{\varphi}\mu \rangle|$ とすると

$$\begin{aligned} I &= |\langle S \bar{\partial}_b^{\varphi} \bar{\partial}_b^{*\varphi} N^{\varphi}\mu, [S, \bar{\partial}_b^{*\varphi}] \bar{\partial}_b^{\varphi} N^{\varphi}\mu \rangle \\ & \quad + \langle [\bar{\partial}_b^{\varphi}, S] \bar{\partial}_b^{\varphi} \bar{\partial}_b^{*\varphi} N^{\varphi}\mu, S \bar{\partial}_b^{\varphi} N^{\varphi}\mu \rangle| \\ & \leq \varepsilon \|\bar{\partial}_b^{\varphi} \bar{\partial}_b^{*\varphi} N^{\varphi}\mu\|_s^2 + \frac{1}{\varepsilon} c_s (\|\bar{\partial}_b^{\varphi} N^{\varphi}\mu\|_s^2 + \|\varphi\|_{s+n_1}^2 \|\mu\|_1^2) \\ & \quad + \varepsilon c_s (\|\bar{\partial}_b^{\varphi} \bar{\partial}_b^{*\varphi} N^{\varphi}\mu\|_s^2 + \|\varphi\|_{s+n_1}^2 \|\mu\|_2^2) + \frac{1}{\varepsilon} \|\bar{\partial}_b^{\varphi} N^{\varphi}\mu\|_s^2 \\ & \quad (\varepsilon > 0 \text{ を十分小さくして}) \end{aligned}$$

$$\text{よって } I \leq \varepsilon \|\bar{\partial}_b^{\varphi} \bar{\partial}_b^{*\varphi} N^{\varphi}\mu\|_s^2 + c'_s (\|\varphi\|_{s+n_1}^2 \|\mu\|_2^2 + \|\bar{\partial}_b^{\varphi} N^{\varphi}\mu\|_s^2)$$

(5.2) の estimate を使うと。

$$c \|\bar{\partial}_b^\varphi N^\varphi \mu\|_s^2 \leq \|\bar{\partial}_b^{*\varphi} \bar{\partial}_b^\varphi N^\varphi \mu\|_{s-1/2}^2 + \|\bar{\partial}_b^\varphi \bar{\partial}_b^\varphi N^\varphi \mu\|_{s-1/2}^2 \\ + c_s (\|\bar{\partial}_b^\varphi N^\varphi \mu\|_{s-1/2}^2 + \|\varphi\|_{n_1+s}^2 \|\mu\|_2^2)$$

所以 $\|\varphi\|_{s-1/2} \leq \varepsilon \|\varphi\|_s + c_{s,\varepsilon} \|\varphi\|$ を考慮して、

$$c \|\bar{\partial}_b^\varphi N^\varphi \mu\|_s^2 \leq \varepsilon (\|\bar{\partial}_b^{*\varphi} \bar{\partial}_b^\varphi N^\varphi \mu\|_s^2 + \|\bar{\partial}_b^\varphi \bar{\partial}_b^\varphi N^\varphi \mu\|_s^2 + \|\mu\|_s^2) \\ + c_{s,\varepsilon} (\|\varphi\|_{n_1+s}^2 + 1) \|\mu\|_2^2$$

よって

$$I \leq \varepsilon (\|\bar{\partial}_b^{*\varphi} \bar{\partial}_b^\varphi N^\varphi \mu\|_s^2 + \|\bar{\partial}_b^\varphi \bar{\partial}_b^\varphi N^\varphi \mu\|_s^2 + \|\mu\|_s^2) \\ + c_s'' (\|\varphi\|_{n_1+s}^2 + 1) \|\mu\|_2^2$$

$$\text{所以 } \|\bar{\partial}_b^{*\varphi} \bar{\partial}_b^\varphi N^\varphi \mu\|_s^2 + \|\bar{\partial}_b^\varphi \bar{\partial}_b^{*\varphi} N^\varphi \mu\|_s^2 \leq \|\rho_1^\varphi \mu\|_s^2 + 2I$$

$$\text{よって } \|\bar{\partial}_b^\varphi \bar{\partial}_b^{*\varphi} N^\varphi \mu\|_s + \|\bar{\partial}_b^{*\varphi} \bar{\partial}_b^\varphi N^\varphi \mu\|_s \\ \leq c \|\mu\|_s^2 + c_s (\|\varphi\|_{n_1+s} + 1) \|\mu\|_2 \quad \text{が成立する。}$$

最後に versal family の construction するため、 $\bar{\partial}_b^\varphi$, $\bar{\partial}_b^{*\varphi}$ を modify した operator を導入しよう。

M を座標近傍の系 $\{U_i\}$ でおおい、各 U_i で $\bar{\partial}_b^\varphi$, $\bar{\partial}_b^{*\varphi}$ の式を書き表わすと、その表式は、 φ の成分とその一階導函数を含むか、operand の微分を含む項には φ の導函数が入ってこない。そこで U_i ごとに φ の導函数を含む項を除いた残りを考え、 $\{U_i\}$ に属する 1 の分割 $\{\rho_i\}$ をかけ、加え合わせる。こうして $\bar{\partial}_b^\varphi$, $\bar{\partial}_b^{*\varphi}$ からえられた作用素を、それぞれ $\bar{\partial}_b^{\#\varphi}$, $\bar{\partial}_b^{\#*\varphi}$ であらわす。すると lemma 3.3 と lemma 3.4 より以下の estimate が成立。

$$(6.28) \quad \|\bar{\partial}_b^{*\varphi} \mu - \bar{\partial}_b^{\varphi} \mu\|_s \leq c \|\varphi\|_{n_1} \|\mu\|_s + C_s \|\varphi\|_{n_1+s} \|\mu\|$$

$$(6.29) \quad \|\bar{\partial}_b^{\varphi(\varphi, \theta)} \mu\|_s \leq c \|\mu\|_{n_1} \|\theta\|_s \\ + C_s (\|\varphi\|_{n_1+s} \|\mu\|_{n_1} + \|\varphi\|_{n_1} \|\mu\|_{n_1+s}) \|\theta\|$$

$$(6.30) \quad \|\bar{\partial}_b^{\varphi} \mu - \bar{\partial}_b^{\# \varphi} \mu\|_s \leq c \|\varphi\|_{n_1} \|\mu\|_s + C_s \|\varphi\|_{n_1+s} \|\mu\|$$

$$(6.31) \quad \|\bar{\partial}_b^{\#(\varphi, \theta)} \mu\|_s \leq c \|\mu\|_{n_1} \|\theta\|_s \\ + C_s (\|\varphi\|_{n_1+s} \|\mu\|_{n_1} + \|\varphi\|_{n_1} \|\mu\|_{n_1+s}) \|\theta\|$$

§7 逆函数定理

[7.1] 複素多様体の versal family の構成の時と同様に、我々の問題でも、逆函数定理を必要とする。しかし、Green 作用素と異なり Neuman 作用素は、regularity を一階しか改善しないので、Banach 空間についての逆函数定理に頼る訳にはいかない。しかし、その代わりに、実は Nash-Moser の逆函数定理を用いる事が出来るのである。この節では、Nash-Moser の定理の idea を述べ、後の節で必要となる形の逆函数定理を定式化する。証明は省略する。

[7.2] まず考える場所 E, F は norm の系 $\{\|\cdot\|_s; s = 0, 1, 2, \dots\}$ で $\|\cdot\|_s \leq \|\cdot\|_{s+1}$ なるものを持つ Fréchet 空間で、更に F は smoothing 作用素 $R(u): E \rightarrow E (u \geq 1)$ をもつものとする：ここで $R(u)$ は E の自己準同型で、 $t \leq s$ に対し、ある定数 $C_{t,s}$ があり、

$$(7.1) \quad \|R(u)x\|_s \leq C_{s,t} u^{s-t} \|x\|_t$$

$$(7.2) \quad \|(1-R(u))x\|_t \leq C_{s,t} u^{t-s} \|x\|_s$$

が、任意の $x \in E, u \geq 1$ につき成立する様なものである。

$R(u)$ の様なものの中で最も原始的なものとして、次の様なものがある： $f \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ に対し $R(u)f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$

を, $(R(u)f)^\wedge = \chi_u \hat{f}$ で定義する。但し $\chi_u(\xi) = 1$ ($|\xi| \leq u$), 0 ($|\xi| > u$)。Lebeque の優収束定理により, L^2 の意味で $R(u)f \rightarrow f$ ($u \rightarrow \infty$) は明らかであるが, 更に $\|f\|_r := \|\hat{f}(\xi)(1+|\xi|)^r\|$ ($\|\cdot\|$ は, L^2 -norm) とおくと, $u \geq 1$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ に対し, (7.1), (7.2) が成立する。実際, たとえば (7.1) は:

$$\begin{aligned} \|R(u)f\|_s &= \|(1+|\xi|)^s \chi_u(\xi) \hat{f}(\xi)\| \\ &= \|(1+|\xi|)^{s-r} (1+|\xi|)^r \chi_u(\xi) \hat{f}(\xi)\| \\ &\leq (1+u)^{s-r} \|(1+|\xi|)^r \chi_u(\xi) \hat{f}(\xi)\| \\ &\leq (1+u)^{s-r} \|(1+|\xi|)^r \hat{f}(\xi)\| \\ &\leq 2^{s-r} u^{s-r} \|f\|_r. \end{aligned}$$

compact な多様体上の vector 束の smooth cross-section の空間には, (7.1), (7.2) を満す smoothing 作用素を構成することができ。それには, たとえば, Fourier 級数展開を用いる次の方法が, 手続上は簡単である。

E を compact な多様体 M 上の fibre が有限次元の vector 束とする。 E の smooth cross-section の成す空間 $\Gamma(E)$ には, M の体積要素と E の Hermite 計量を求めれば, L^2 -内積が入るが, 更に E に接続を導入することにより, 2 階の自己共役な楕円型作用素 $D: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ で非負なものが構成出来る。楕円型作用素の一般論により,

$D: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ は, $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty$ なる固有値をもち, 更に φ_i を λ_i に対応する固有函数で, $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$ である様にとれば, $\varphi_i \in \Gamma(E)$ であり, 任意の $s \in \Gamma(E)$ は,

$$s = \sum_{i \geq 0} (s, \varphi_i) \varphi_i$$

と展開される.

非負整数 k と $s \in \Gamma(E)$ に対し,

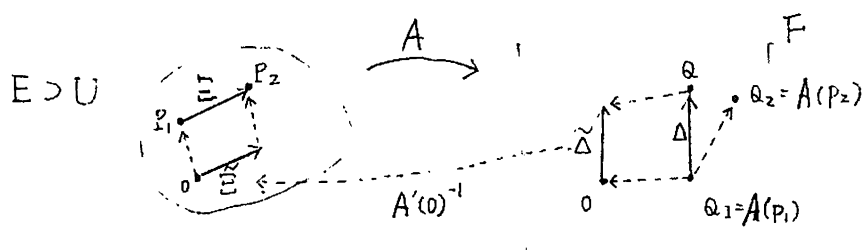
$$\|s\|_k^2 := \sum_{i \geq 0} |(s, \varphi_i)|^2 (1 + \lambda_i)^k$$

とおくと, これは $\Gamma(E)$ 上の norm を与えるが, これによる $\Gamma(E)$ の完備化は, 丁度 $\Gamma(E)$ の k 次 Sobolev 空間となる. さて

$$R(u)s = \sum_{\lambda_i \leq u} (s, \varphi_i) \varphi_i$$

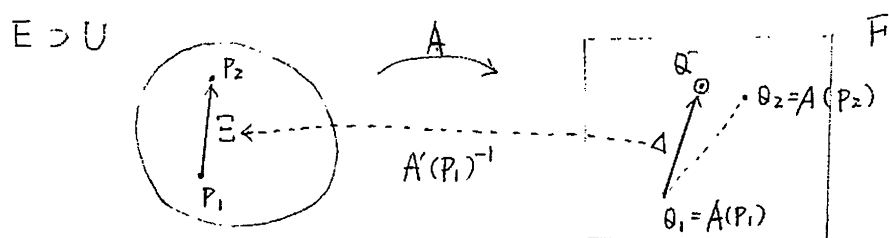
とおくと, これは (1), (2) を満たすことが前と同様に示される.

[7.3] まず Banach 空間での微分定理の原理を考えてみよう. $A: E \supset \underset{\underset{0}{\downarrow}}{U} \rightarrow \underset{\underset{0}{\downarrow}}{F}$ が C^1 -写像で $A(0)=0$, $A'(0)$ が可逆であるとする.



$A(P) = Q$ を解きたいとする。適当に $P_1 \in U$ という guess をとろう。 $Q_1 = A(P_1)$ は、大まかい値の Q をはすし、誤差 $\Delta = Q - Q_1$ を得る。これは Q_1 に於る接ベクトルとみなせるが、これを 0 に於る接ベクトル $\tilde{\Delta}$ に平行移動したものは、仮定によつて、 $\tilde{\Xi} = A'(0)^{-1} \tilde{\Delta}$ と戻すことができる。これを P_1 の接ベクトル Ξ に平行移動して最初の guess P_1 を修正して、第2の guess $P_2 = P_1 + \Xi$ をたてる。 Q が原点 0 に十分近ければ、この過程を続けることが出来、収束列 $\{P_j\}$ を得、しかも $A(\lim P_j) = Q$ となり問題は解けたことになる。

さて、このやり方を見ると「 $A'(0)$ が可逆」という経済的な仮定で済ませているかわりに、各 step の手続きは、随分と無駄をしていることになる。というのは、誤差のベクトル Δ は、もし出来ることならば、reference point 0 を通すことなく、直接 $A'(P_1)^{-1}$ で P_1 での接ベクトルに引き戻してしまう方が余程自然で、しかもより良い第2の guess をたてることが出来るはずだからである。この後者のやり方が、Newton 近似の方法である。



この手続きは式でかけば、

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + A'(x_i)^{-1} z_i \\ z_i = w - A(x_i) \end{cases}$$

(x_i は P_i の, w は Q の "座標".)

と表示できる。しかしながら、後に適用するときには、 A は $A'(x_i)^{-1}$ が函数の regularity を悪くするといったものである。上の過程は、そのままだは無意味になってしまう。そこで各 step での guess の修正の精度は多少犠牲にして、次の過程を考えることにする。

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + R(u_i) A'(x_i)^{-1} z_i \\ z_i = w - A(x_i) \end{cases}$$

こうすれば、 x_i の regularity はいつも一定とみなせ、列 $\{x_i\}$ を考えることが意味をもつ。ここで注意しておくべきことは、 u_i を i と共にどんどん大きくして行くという所にも ingenious な idea がある、という点である。

さて、Newton 近似のこの過程を可能にするには、勿論写像 A についての色々な条件が必要である。そこで正確

を定式化に入ろう。

[7.4] $E(s, a) = \{x \in E; \|x\|_s < a\}$ とおく。写像 $A: E(s_1, a) \rightarrow F$ ($A(0)=0$) と F の閉集合 W とが次の条件群を満たすとする: まずある非負整数 k があって,

(7.3) すべての $x \in E(s_1, a)$ に対し, ある線型写像 $A'(x): E \rightarrow F$ があって, どの非負整数 s をとっても, ある定数 C_s があって次が成立している。

$$(7.3)_1 \quad \|A'(x)y\|_s \leq C_s(\|y\|_{s+k} + \|x\|_{s+k}\|y\|_k) \quad (y \in E)$$

$$(7.3)_2 \quad \|A(x+y) - A(x) - A'(x)y\|_s \leq C_s(\|y\|_{s+k} + \|x\|_{s+k}\|y\|_k)\|y\|_k \\ (x+y \in E(s_1, a)) ;$$

(7.4) 任意の $w \in W$ に対して

$$A'(x)y = B(x)y + C(x, w, y, w - A(x)),$$

但し, $B(x): E \rightarrow F$ は線型写像で右逆 $D(x): F \rightarrow E$ を持ち,

$$(7.4)_1 \quad \|B(x)y\|_s \leq C_s(\|y\|_{s+k} + \|x\|_{s+k}\|y\|_k) \quad (x \in E(s_1, a))$$

$$(7.4)_2 \quad \|D(x)y\|_s \leq C_s(\|y\|_{s+k} + \|x\|_{s+k}\|y\|_k)$$

又, $C: E(s_1, a) \times W \times E \times F \rightarrow F$ は, $E \times F$ 上双線型で,

$$(7.4)_3 \quad \|C(x, w, y, z)\|_s \leq C_s(1 + \|x\|_{s+k})\|z\|_{s-1}\|y\|_{s+k},$$

注意 (7.4)の条件は, " $A'(x)$ ($x \in E(s_1, a)$)が approximate inverseをもつ" ということであるが, " $A'(x)$ が可逆" という仮定をこの位にゆるめても, 十分なのである。

定理 写像 $A: E(s_1, a) \rightarrow F$ と F の閉集合 W とが上の条件 (7.3), (7.4) を満し, 更に E には, smoothing 作用素があるとせよ。このとき非負正数 s_2 , 正数 ε を適当にとると, 写像 $S: F(s_2, \varepsilon) \cap W \rightarrow E(s_1, a)$ が構成出来て, $A(S(w)) = w$ を満す。

(証明の概略) $s_2 \in \mathbb{Z}^+$, $\varepsilon > 0$ を適当にとり, u_0 を十分に大きくとると, 任意の $w \in F(s_2, \varepsilon) \cap W$ に対し, 系統

$$\begin{cases} u_{p+1} = (u_p)^{\frac{u_0}{2}} \\ x_0 = 0 \\ z_p = w - A(x_p) \\ \Delta x_p = R(u_p) D(x_p) z_p \\ x_{p+1} = x_p + \Delta x_p \end{cases}$$

が, すべての p につき成立し (i.e. $x_{p+1} \in E(s_1, a)$) しかも, すべての $s \geq s_k$ に対し

$$\begin{cases} \|z_j\|_s \leq x_j^{-\sigma} \quad (\text{十分大きな } j \text{ に対して}) \quad (\sigma = 2(16k+1)) \\ \{x_j\} \text{ は, norm } \|\cdot\|_{s+k+1} \text{ につき Cauchy 列} \end{cases}$$

という事を, 多少の計算の後に示すことができる。

故に $x = \lim x_j \in E(s, a)$

が存在し, しかも $W = A(x)$ 。そこで $x = S(w)$ とおけばよい。

[1.5] 最後にあとの必要の為に, 定理の条件の一部を書きかえておこう。その為にまず,

命題 E は, 前の通りとし, $L: E \rightarrow E$ は線型写像で, ある非負の整数 k と閉区間 $(0, 1)$ の元 ε, δ があり,

$$\begin{cases} \|Lu - u\|_k \leq \delta \|u\|_k \\ \|Lu - u\|_s \leq \varepsilon \|u\|_s + C_s \|u\|_k \quad (\forall s \geq k) \end{cases}$$

が任意の $u \in E$ に対して成立しているとせよ。このとき, L は可逆で,

$$\|L^{-1}u\|_s \leq C(\|u\|_s + C_s \|u\|_k) \quad (u \in F),$$

ここで C は ε, δ にのみよる定数で, C_s にはよらない。

(証明) $Ru = u - Lu$ とおくと, $s \geq k$ のとき仮定により,

$$\begin{aligned} \|R^{l+1}u\| &\leq \varepsilon \|R^l u\|_s + C_s \|R^l u\|_k \\ &\leq \varepsilon \|R^l u\|_s + C_s \delta^l \|u\|_k. \end{aligned}$$

これを用いて, l についての帰納法により,

$$\|R^k u\|_s \leq \varepsilon^k \|u\|_s + C_s \delta_1^{k-1} \|u\|_k.$$

従って $L^{-1} = \sum R^k u$ 収束し

$$\|\sum R^k u\|_s \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \|u\|_s + C_s \frac{1}{(1-\delta)^2} \|u\|_k.$$

従って $C = \max\left(\frac{1}{1-\varepsilon}, \frac{1}{(1-\delta)^2}\right)$ とおけば

$$\|L^{-1}u\|_s \leq C(\|u\|_s + C_s \|u\|_k) \quad (u \in E). \quad (\text{証終})$$

系 定理の仮定の中で, $B(x)$ が可逆という仮定と (7.4)₁, (7.4)₂ を次の条件におきかえてもよい: 開区間 $(0, 1)$ の元 ε, δ があって,

$$(7.4)'_1 : \|B(x)y - y\|_k \leq \delta \|y\|_k$$

$$(7.4)'_2 : \|B(x)y - y\|_s \leq \varepsilon \|y\|_s + C_s \|x\|_{k+s} \|y\|_k \\ (s \geq k).$$

§ 8 Induced pseudo complex structures

今まで embedding $i: M \rightarrow N$ (N は複素多様体) を考え, それから induce される CR-構造を ${}^{\circ}T$ としたが, この section では, i の他に embedding $g: M \rightarrow N$, 及び新しい complex structure N' on N を考え, g によって N' から M 上に induce される CR-構造を調べる. g, N' が i, N に十分近い場合のみを考える. また, M の N における十分小さい近傍のみを問題にするので, 断わりなく N を縮めることがある.

【8.1】 C^{∞} -manifold N 上の complex structure N' は, もとの complex structure N に十分近いとき, N 上の type (0,1) の $(T'N)$ -valued differential form ω で表わされる。すなわち, $z = (z^1, \dots, z^n)$ を N の complex analytic chart とすると, $T''N' = \{ N' \text{ の type (0,1) の complex tangent vectors} \}$ は,

$$(8.1) \quad \partial/\partial \bar{z}^k = \sum_j \omega_k^j(z) \partial/\partial z^j, \quad \text{ここに } \omega = \sum_k \omega_k^j(z) dz^{\bar{k}} (\partial/\partial z^j)$$

で張られる。即ち, $T''N' = \{ X - \omega(X); X \in T''N \}$. このとき, $N' = N\omega$ とかく.

g の C^{∞} -extension をとり, embedding $\hat{g}: N \rightarrow N$ をつく

る. ここで N_1 は M の N における開近傍である. g が十分 i に近ければ, g の座標表示:

$$g(z) = (g^1(z), \dots, g^n(z)) \quad (M \text{ と } iM \text{ を同一視する})$$

をうる.

$$\begin{aligned} (8.2) \quad \mathbb{C}T_{g(z)}(gM) &= \{dg(X): X \in \mathbb{C}T_z M\} \\ &= \{(Xg^j)(\partial/\partial z^j)_{g(z)} + (X\bar{g}^j)(\partial/\partial \bar{z}^j)_{g(z)}, X \in \mathbb{C}T_z M\} \end{aligned}$$

であるが, 一方 (8.1) より,

$$\begin{aligned} (8.3) \quad T''_{g(z)}(N\omega) &= \{\zeta^k(\partial/\partial z^k)_{g(z)} + \bar{\zeta}^{\bar{k}}(\partial/\partial \bar{z}^{\bar{k}})_{g(z)}; \zeta^j = -\sum_{\bar{k}} \omega_{\bar{k}}^j(g(z))\bar{\zeta}^{\bar{k}}\} \end{aligned}$$

g により $N\omega$ から M に induce された CR-構造を $E''(g, \omega)$ とかく. $E''(g, \omega)$ は $\mathbb{C}TM$ の vector sub-bundle でその z 上の fiber $E''(g, \omega)_z$ は,

$$(8.4) \quad dg(E''(g, \omega)_z) = \mathbb{C}T_{g(z)}(gM) \cap T''_{g(z)}(N\omega)$$

によって定義される. よって, (8.2), (8.3) より,

$$(8.5) \quad X \in E''(g, \omega)_Z \iff X g^j = -\omega_k^j(g(z)) X g^k$$

§2 において、概 CR-構造で、 ${}^\circ T''$ (i により N から induce されたもの) に十分近いものは、 $\varphi T''$ とかけることを示した。ここに φ は $\text{type}(0.1)_b$ の T' -valued differential form (i.e. $\Gamma(M, \text{Hom}({}^\circ T'', T'))$ の元である。

§2 では (倉西氏の話から少し離れて) coordinate free な記述をしたが、直接計算には必要になるので、ここで座標に関する成分を用いて具体的な式を出してあげる。(8.6) の前までは、本 § にとっては挿入部分である。それ故式の番号も (0.1), (0.2), ---- として区別する。

複素 n 次元の複素多様体 N の、コンパクトな実超曲面 M があって、 N によって induce される M 上の CR 構造を ${}^\circ T''$ として、 $\varphi T''$ を記述することを試みよう： N 上の一つの座標近傍 V において、局所座標 $(z^1, \dots, z^n)$ をとって考える。 C^∞ 函数 $h(z)$ があって、 M は

$$(0.1) \quad h(z) = 0$$

で与えられているとする。($dh \neq 0$ on M .)

$$(0.2) \quad h_j = \frac{\partial h}{\partial z^j}, \quad h_{\bar{j}} = \frac{\partial h}{\partial \bar{z}^j} = \bar{h}_j$$

という記号を用いる. Tensor Calculus のやり方に従って $\sum_{j=1}^n a^j h_j$ のような和を Σ を略して表わすことにすると, $T^{\circ,1}(N)$ の vector は $a^{\bar{j}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}$ と書ける. これが M に接する条件を書いてみれば

$$(0.3) \quad {}^{\circ}T'' = \left\{ a^{\bar{j}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} \mid a^{\bar{j}} h_{\bar{j}} = 0 \right\}$$

であることが判る. (2.1) にいう F の, V 上での実基底 P をとり

$$(0.4) \quad \sqrt{-1}P = P' - P'', \quad P' = p^j \frac{\partial}{\partial z^j}, \quad P'' = p^{\bar{j}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}$$

と表わす. P が M に接する条件は $\langle dh, P \rangle = 0$ すなわち $h_j p^j - h_{\bar{j}} p^{\bar{j}} = 0$ である. これは $h_j p^j$ が実数値をとることを示す. この量は $M \cap V$ 上どこでも 0 にならないから, $(\overline{h_j p^j} = 0$ なら $P'' \in {}^{\circ}T''$. そうすると $P \in {}^{\circ}T'' \oplus \overline{{}^{\circ}T''}$ となる.) P につけうる non-zero real factor を適当にとり

$$(0.4') \quad h_j p^j = 1$$

と normalize する.

こうしておいて, $Z = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} - a_j P''$ という形の vector field が $\Gamma({}^0T'')$ に入る条件 $\langle dh, Z \rangle = 0$ を書いてみると, $a_j = h_{\bar{j}}$ となる.

$$(0.5) \quad Z_{\bar{j}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} - h_{\bar{j}} P'' \quad (j=1, \dots, n)$$

とおけば, これらは ${}^0T''$ を生成する. その間には関係があって,

$$p^{\bar{j}} Z_{\bar{j}} = P'' - p^{\bar{j}} h_{\bar{j}} P'' = 0$$

である. それで $X = a^{\bar{j}} Z_{\bar{j}}$ という表現では $a^{\bar{j}} h_{\bar{j}} = 0$ という付帯条件をつけることができ, こうすれば表現は一意的である. これに対し

$$(0.6) \quad Z^{\bar{k}} = i^*(d\bar{z}^k - p^{\bar{k}} d''h) = i^*(d\bar{z}^k + p^{\bar{k}} d'h)$$

(i は inclusion map $M \hookrightarrow N$)

とおくと, これらは $({}^0T'')^*$ を生成する. 次式が成立つ.

$$(0.7) \quad \langle Z^{\bar{k}}, Z_{\bar{l}} \rangle = \delta_{\bar{l}}^{\bar{k}} - p^{\bar{k}} h_{\bar{l}}$$

Canonical な写像でできている図式

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathbb{C}TN|_M & & & & \\ & & \uparrow & \searrow & & & \\ 0 \rightarrow {}^0T'' \rightarrow & \mathbb{C}TM & \longrightarrow & T'N|_M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

と, $\mathbb{C}TM = {}^0T'' \oplus T'$ なる分解とを結びつけると,

$$T' \xrightleftharpoons[\tau]{\sigma} T'|_M$$

という bundle isomorphism がえられる. そこで

$$(0.8) \quad \frac{\partial \tau}{\partial z^j} = \tau \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} \right)$$

という記号を用いる. $\varphi \in \Gamma(M, \text{Hom}({}^0T'', T))$ は局所的には

$$(0.9) \quad \varphi = \varphi_k^j Z^{\bar{k}} \otimes \frac{\partial \tau}{\partial \bar{z}^j}, \quad p^{\bar{k}} \varphi_k^j = 0$$

と書ける. これを T' -valued な微分形式とみて, T' の基底 $\frac{\partial \tau}{\partial \bar{z}^j}$ に関する成分で表わせば

$$(0.9') \quad \varphi = (\varphi^j), \quad \varphi^j = \varphi_k^j Z^{\bar{k}}.$$

同型対応

$${}^0T'' \ni X \longrightarrow X - \varphi(X) \in {}^0T''$$

のため, ${}^0T''$ はつぎの $Z_l^{\varphi} (l=1, 2, \dots, n)$ で生成される.

$$(0.10) \quad Z_l^{\varphi} = Z_l - \varphi_l^j \frac{\partial \tau}{\partial \bar{z}^j}$$

後の計算のため, これらを使って $\bar{\partial}_b^{\varphi}$ に関する関係を

表わす式を引いておこう：

$$(0.11) \quad f \in \Gamma(\mathbb{C}) \text{ に対し } \bar{\partial}_b^{\varphi} f = (Z_{\bar{\ell}}^{\varphi} f) Z^{\bar{\ell}}$$

$$\mu = \mu_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_r} Z^{\bar{k}_1} \wedge \dots \wedge Z^{\bar{k}_r} \in \Gamma(\wedge^{(0,T'')*}), \mu_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_{s-1}, \bar{\ell}, \dots, \bar{k}_r} p^{\bar{\ell}} = 0,$$

に対しては

$$(0.12) \quad \bar{\partial}_b^{\varphi} \mu = (\bar{\partial}_b^{\varphi} \mu_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_r}) Z^{\bar{k}_1} \wedge \dots \wedge Z^{\bar{k}_r} \\ + \mu_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_r} \left(\sum_{s=1}^r (-1)^{s+1} h_j \varphi^j \wedge \bar{\partial}_b^{\varphi} \bar{k}_s Z^{\bar{k}_1} \wedge \dots \wedge \hat{Z}^{\bar{k}_s} \wedge \dots \wedge Z^{\bar{k}_r} \right)$$

$$(0.13) \quad \bar{\partial}_b^{\varphi} \bar{\partial}_b^{\varphi} \mu = P(\varphi)^k \wedge (-\partial^{\tau} \mu_{\bar{\ell}_1, \dots, \bar{\ell}_r} / \partial z^k) Z^{\bar{\ell}_1} \wedge \dots \wedge Z^{\bar{\ell}_r} \\ + \mu_{\bar{\ell}_1, \dots, \bar{\ell}_r} \sum_{s=1}^r \alpha_k^{\bar{\ell}_s}(\varphi) \wedge Z^{\bar{\ell}_1} \wedge \dots \wedge \hat{Z}^{\bar{\ell}_s} \wedge \dots \wedge Z^{\bar{\ell}_r}.$$

$$(0.14) \quad P(\varphi)^i = \bar{\partial}_b^{\varphi} \varphi^i,$$

ここに

$$(0.15) \quad P(\varphi) = (P(\varphi)^i), \quad P(\varphi)^i = P(\varphi)_{\bar{s}, \bar{t}}^i Z^{\bar{s}} \wedge Z^{\bar{t}}$$

$$P^i(\varphi)_{\bar{s}, \bar{t}} + P(\varphi)_{\bar{t}, \bar{s}}^i = 0, \quad P^{\bar{s}} P(\varphi)_{\bar{s}, \bar{t}}^i = 0$$

であり， $\alpha(\varphi)$ は

$$(0.16) \quad \alpha_k^{\bar{\ell}}(\varphi) = h_k \bar{\partial}_b p^{\bar{\ell}} + (\partial^{\tau} p^{\bar{\ell}} / \partial z^k) h_k \varphi^j \in \Gamma(({}^0 T'')^*)$$

によって定められる.

$\Gamma(T' \otimes \wedge^1(T')^*)$ の元 $\theta = \theta^i \frac{\partial}{\partial z^i}$ に対しては

$$(0.17) \quad \bar{\partial}_b^\varphi \theta = \{ \bar{\partial}_b^\varphi \theta^i + \Gamma_\ell^i(\varphi) \wedge \theta^\ell \} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}$$

$$(0.18) \quad \Gamma_\ell^i(\varphi) = \left(\partial^\tau \varphi_k^i / \partial z^\ell \right) Z^{\bar{k}} - \varphi_k^i \alpha_\ell^k(\varphi).$$

となる.

$$(0.19) \quad \beta_\ell^i(\varphi) = \bar{\partial}_b^\varphi \Gamma_\ell^i(\varphi) + \Gamma_j^i(\varphi) \wedge \Gamma_\ell^j(\varphi)$$

とおくと

$$(0.20) \quad \beta_\ell^i(\varphi) = \left(\partial^\tau P^i(\varphi)_{\bar{\ell} \bar{s}} / \partial z^\ell \right) Z^{\bar{\ell}} \wedge Z^{\bar{s}} + 2P(\varphi)_{\bar{\ell} \bar{s}}^i Z^{\bar{s}} \wedge \alpha_\ell^{\bar{\ell}}(\varphi) \\ + \varphi_k^i \left(h_\ell \partial^\tau p^{\bar{k}} / \partial z^i - h_j \partial^\tau p^{\bar{k}} / \partial z^\ell \right) P(\varphi)^j$$

であって,

$$(0.21) \quad \bar{\partial}_b^\varphi \bar{\partial}_b^\varphi \theta = \{ \bar{\partial}_b^\varphi \bar{\partial}_b^\varphi \theta^i + \theta^\ell \wedge \beta_\ell^i(\varphi) \} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}$$

となる. 計算の詳細は省略する.

${}^\varphi T''_{\bar{z}}$ は

$$(8.6) \quad Z_{\bar{\ell}}^{\varphi'} = Z_{\bar{\ell}} - \varphi_\ell^j \frac{\partial^\tau}{\partial z^j}, \quad \varphi = \varphi_\ell^{\bar{j}} Z^{\bar{\ell}} (\frac{\partial}{\partial z^i}), \quad p^{\bar{\ell}} \varphi_{\bar{\ell}}^{\bar{j}} = 0$$

で張られる. よって, (8.5) より, ${}^\varphi T'' = E''(g, \omega)$ なる φ は,

$$(8.7) \quad Z_{\bar{\ell}}^{\varphi} g^j = -\omega_{\bar{k}}^j(g(z)) Z_{\bar{\ell}}^{\varphi} g^{\bar{k}}, \quad i, j, k = 1, \dots, n$$

で特徴付けられる.

$$\text{即ち, } Z_{\bar{\ell}} g^j - \varphi_{\bar{\ell}}^k \frac{\partial \tau g^j}{\partial Z^k} = -\omega_{\bar{k}}^j(g(z))(Z_{\bar{\ell}} g^{\bar{k}} - \varphi_{\bar{\ell}}^i \frac{\partial \tau g^{\bar{k}}}{\partial Z^i})$$

即ち,

$$(8.8) \quad \varphi_{\bar{\ell}}^i \left(\frac{\partial \tau g^j}{\partial Z^i} + \omega_{\bar{k}}^j(g(z)) \frac{\partial \tau g^{\bar{k}}}{\partial Z^i} \right) \\ = Z_{\bar{\ell}} g^j + \omega_{\bar{k}}^j(g(z)) Z_{\bar{\ell}} g^{\bar{k}}$$

g が十分 i に近く, ω が十分小さいとき, matrix $(\frac{\partial \tau g^j}{\partial Z^i} + \omega_{\bar{k}}^j(g(z)))$ は可逆であるから, 座標系による φ の表示は (8.8) より計算される. $\frac{\partial \tau}{\partial Z^i}, Z_{\bar{\ell}}$ が M に tangent であることに注意すれば, (8.8) のすべての項は M のみにより, g の N_1 への拡張にはよらない. このように g, ω によってきまる φ を

$$(8.9) \quad \varphi^{g, \omega} \quad \text{または,} \quad \varphi(g, \omega)$$

と書く.

type $(0, 1)$ の T^*N -valued differential form $\omega \circ \tilde{g}$ on N_1 で

$$(8.10) \quad \tilde{g}: N\omega \circ \tilde{g} \longrightarrow N\omega$$

が holomorphic となるものを考える. 即ち, $\tilde{g}$ が holomorphic となるように $N\omega \circ \tilde{g}$ の complex structure を定める.

$$\begin{aligned}
 (8.11) \quad (\omega \circ \tilde{g})_i^j & (\partial g^j / \partial z^i + \omega_k^j(g(z)) \partial g^{\bar{k}} / \partial z^i) \\
 &= \partial g^j / \partial z^{\bar{i}} + \omega_{\bar{k}}^j(g(z)) \partial g^{\bar{k}} / \partial z^{\bar{i}} \quad ([5] \text{参照})
 \end{aligned}$$

これにより, $\varphi(g, \omega) = \varphi(i, \omega \circ \tilde{g})$ がわかる. そこで (8.8) において ω を $\omega \circ \tilde{g}$ に, g を identity map におきかえて,

$$(8.12) \quad \varphi_i^j = (\omega \circ g)_{\bar{k}}^j (\delta_i^k - h_{\bar{i}} P^{\bar{k}} + h_i \varphi_{\bar{i}}^{\bar{k}} P^{\bar{k}})$$

をうる.

定義 8.1. embedding $g: M \rightarrow N$ の extension $\underline{g}: N_1 \rightarrow M$ が ω に関して regular であるとは,

$$(\omega \circ \underline{g})_{\bar{k}}^j P^{\bar{k}} = 0 \quad \text{on } M \quad \text{なること.}$$

$g: M \rightarrow N$ の regular extension $\tilde{g}$ をとれば, $\varphi_i^j = (\omega \circ \tilde{g})_i^j$ となる.

命題 8.1. M から N への embeddings 全体のなす空間 (resp. T^*N -valued differential form of type (0,1) on N のなす空間) において, 次のような性質をもつ C^1 -topology (resp. C^0 -topology) での i (resp. 0) の開近傍 $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{V}$) が存在する:

$\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ から, $\{N_1 \text{ から } N \text{ への } C^\infty \text{ maps}\}$ への map $\mathcal{E}$ で, $\mathcal{E}(g, \omega)$ が ω に関する g の regular extension となり,

$\mathcal{E}(g, \omega) = (G^1(z), \dots, G^n(z)), Z = (Z^1, \dots, Z^n)$ は局所座標, と書いたとき, $G^i(z) = e^i(j^1 g^1(z), \dots, j^1 g^n(z), \dots, \omega_k^1(g(z)), \dots)$, ここに e^i は C^∞ -function, となるようなものが存在する.

証明) diffeomorphism により, N_1 を $I \times M$ ($I = (-\varepsilon, \varepsilon)$) に同一視する. よって, N_1 の一般の元を (t, x) , $-\varepsilon < t < \varepsilon$, $x \in M$ と書く. この同一視を $\frac{\partial}{\partial t} = P' + P''$ なるようにとる. 条件 $P^{\bar{i}}(\omega \circ g)_t^j = 0$ on M を局所座標で書けば, (8.11) により, $P^{\bar{g}j} + \omega_k^j(g(x)) P^{\bar{g}k} = 0$ on M となる.

$2P'' = -P^{\bar{\ell}} \frac{\partial^{\bar{\ell}}}{\partial Z^{\bar{\ell}}} + (P' + P'')$, $\frac{\partial^{\bar{\ell}}}{\partial Z^{\bar{\ell}}}$ は M に tangent であるから, この条件は

$$\frac{\partial g^j}{\partial t} + \omega_k^j(g(0, x)) \frac{\partial g^k}{\partial t} = P^{\bar{\ell}} \left(\frac{\partial^{\bar{\ell}} g^j}{\partial Z^{\bar{\ell}}} + \omega_k^j(g(0, x)) \frac{\partial^{\bar{\ell}} g^k}{\partial Z^{\bar{\ell}}} \right) \text{ at } t=0$$

と書ける. $g=i$, $\omega=0$ のときこの等式は, $\frac{\partial g^j}{\partial t} = p^j$ となる. よって, 十分小さい ω と $j^1 g$ に対し, 一意的に $\frac{\partial g^j}{\partial t} = a^j$ が上の equation の解となるような $a^j(j^1(g(0, x)), \dots$

..., $\omega_{\bar{k}}^j(g(0, x)), \dots$) が存在する. q を $(g_0(x), g_1(x))$, $-\varepsilon < g_0(x) < \varepsilon$, $g_1(x) \in M$ と表わす. すると, $(g_0(x) + t\alpha^j, g_1(x))$ は, 座標 $I \times M$ における $\varepsilon(q, \omega)$ の表示となっている.

q.e.d.

Lemma 8.1 $g: N_1 \rightarrow N$ を $g: M \rightarrow N$ の ω に関する regular extension とする. $\varphi = \varphi^{g, \omega}$ とおく. N の局所座標 Z において,

$$\varphi_{\bar{k}}^j Z_{\bar{\ell}}^{\varphi} p^{\bar{k}} + (\delta_{\ell}^k - h_{\bar{\ell}} p^{\bar{k}} + h_i p^{\bar{k}} \varphi_{\bar{\ell}}^i) P''(\omega \circ g)_{\bar{k}}^j = 0 \quad \text{on } M$$

(証明) $p^k(\omega \circ g)_{\bar{k}}^j = 0$ on M に tangential differentiation $Z_{\bar{\ell}}^{\varphi}$ を施す. $(\omega \circ g)_{\bar{k}}^j = \varphi_{\bar{k}}^j$ on M だから,

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_{\bar{k}}^j Z_{\bar{\ell}}^{\varphi} p^{\bar{k}} + p^{\bar{k}} Z_{\bar{\ell}}^{\varphi} (\omega \circ g)_{\bar{k}}^j \\ &= \varphi_{\bar{k}}^j Z_{\bar{\ell}}^{\varphi} p^{\bar{k}} + p^{\bar{k}} \partial(\omega \circ g)_{\bar{k}}^j / \partial Z^{\bar{\ell}} - p^{\bar{k}} h_{\bar{\ell}} P''(\omega \circ g)_{\bar{k}}^j - p^{\bar{k}} \varphi_{\bar{\ell}}^i \frac{\partial^{\tau}(\omega \circ g)_{\bar{k}}^j}{\partial Z^i} \end{aligned}$$

上の第2項を $\omega \circ g$ の integrability condition:

$$(8.13) \quad 0 = \partial(\omega \circ g)_{\bar{k}}^j / \partial Z^{\bar{\ell}} - \partial(\omega \circ g)_{\bar{\ell}}^j / \partial Z^{\bar{k}} + (\omega \circ g)_{\bar{k}}^i \partial(\omega \circ g)_{\bar{\ell}}^j / \partial Z^i - (\omega \circ g)_{\bar{\ell}}^i \partial(\omega \circ g)_{\bar{k}}^j / \partial Z^i$$

によって, おきかえて, regularity condition に注意すれば,

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_{\bar{k}}^j Z_{\bar{\ell}}^{\varphi} p^{\bar{k}} + (\delta_{\ell}^k - h_{\bar{\ell}} p^{\bar{k}}) P''(\omega \circ g)_{\bar{k}}^j \\ &\quad - \varphi_{\bar{\ell}}^i p^{\bar{k}} (\partial^{\tau}(\omega \circ g)_{\bar{k}}^j / \partial Z^i - \partial(\omega \circ g)_{\bar{k}}^j / \partial Z^i) \end{aligned}$$

$$= \varphi_{\bar{k}}^j Z_{\bar{\ell}}^{\varphi} p^{\bar{k}} + (\delta_{\bar{\ell}}^k - h_{\bar{\ell}} p^{\bar{k}} + h_i \varphi_{\bar{\ell}}^i p^{\bar{k}}) p^{\omega} (\omega \cdot g)_{\bar{k}}^j$$

q. e. d.

[8.2] i に十分近い embeddings $f: M \rightarrow N$ は,
 $\Gamma(M, (T^*N)|M)$ の十分小さい elements ξ で parametrize
 される. domain U とその局所座標 (z) において, その para-
 metrization は,

$$(8.14) \quad f^j(z) = z^j + \xi^j(z) + R^j(z, \xi^1(z), \dots, \xi^n(z))$$

ここに $\xi = \xi^j(z) \frac{\partial}{\partial z^j}$, R^j は $U \times W$ 上の C^∞ -function
 W は $\mathbb{C}^n$ の原点の開近傍,

$$(8.15) \quad |R^j(z, \xi)| \leq C |\xi|^2$$

なるように与えられる. 我々はそのような parametrization
 を固定しておく. $\varphi^{f, \omega}$ を $|j^1 \xi|$ について order 1 の項ま
 で調べる. $\equiv$ は, $|j^1 \xi|$ について order 1 の項まで等しいこと
 を表わすものとする. 簡単のため $\theta = \varphi^{f, \omega}$ とおく. (8.6)
 より容易に

$$(8.16) \quad Z_{\bar{\ell}}^{\theta} f^j \equiv -\theta_{\bar{\ell}}^j + Z_{\bar{\ell}}^{\theta} \xi^j$$

$$(8.17) \quad Z_{\bar{\ell}}^{\theta} f^{\bar{j}} \equiv \delta_{\bar{\ell}}^{\bar{j}} - h_{\bar{\ell}} p^{\bar{j}} + h_i \varphi_{\bar{\ell}}^i p^{\bar{j}} + Z_{\bar{\ell}}^{\theta} \xi^{\bar{j}}$$

よって, (8.7) とあわせて

$$(8.18) \quad \theta_{\bar{\ell}}^j - Z_{\bar{\ell}}^0 \xi^j \equiv (\delta_{\bar{\ell}}^k - h_{\bar{\ell}} p^{\bar{k}} + h_i \theta_{\bar{\ell}}^i p^{\bar{k}})(\omega_{\bar{k}}^j \cdot f) + \omega_{\bar{k}}^j Z_{\bar{\ell}}^0 \xi^{\bar{k}}$$

注意: $\omega_{\bar{k}}^j \cdot f$ と $(\omega \cdot f)_{\bar{k}}^j$ を混同せぬこと.

命題 8.2 $\theta = \varphi^{f, \omega}$ において, f は (8.14) で与えられていて, ω は C^1 -norm で十分小さいとすると,

$$\theta_{\bar{\ell}}^j \equiv (\delta_{\bar{\ell}}^k - h_{\bar{\ell}} p^{\bar{k}} + h_i \theta_{\bar{\ell}}^i p^{\bar{k}})(\omega_{\bar{k}}^j + \xi_{\bar{h}}^t \partial \omega_{\bar{k}}^i / \partial z^t) + Z_{\bar{\ell}}^0 \xi_{\bar{h}}^j \pmod{|\xi|^2}$$

$$\text{但し, } \xi_{\bar{h}}^j = \xi^j + \omega_{\bar{k}}^j \xi^{\bar{k}}$$

(証明) $\omega_{\bar{k}}^j \cdot g$ に Taylor 展開を施すと, (8.18) より,

$$\theta_{\bar{\ell}}^j \equiv Z_{\bar{\ell}}^0 \xi_{\bar{h}}^j + (\delta_{\bar{\ell}}^k - h_{\bar{\ell}} p^{\bar{k}} + h_i \theta_{\bar{\ell}}^i p^{\bar{k}})(\omega_{\bar{k}}^j + \xi_{\bar{t}}^t \partial \omega_{\bar{k}}^j / \partial z^t) + \xi_{\bar{t}}^{\bar{t}} S_{\bar{t}}$$

$$\text{ここに, } S_{\bar{t}} = (\delta_{\bar{\ell}}^k - h_{\bar{\ell}} p^{\bar{k}} + h_i \theta_{\bar{\ell}}^i p^{\bar{k}}) \partial \omega_{\bar{k}}^j / \partial z^{\bar{t}} - Z_{\bar{\ell}}^0 \omega_{\bar{k}}^j$$

N_{ω} は complex manifold だから, ω は integrability condition

$$\partial \omega_{\bar{k}}^j / \partial z^{\bar{t}} - \partial \omega_{\bar{t}}^j / \partial z^{\bar{k}} + \omega_{\bar{k}}^s \partial \omega_{\bar{t}}^j / \partial z^s - \omega_{\bar{t}}^s \partial \omega_{\bar{k}}^j / \partial z^s = 0$$

をみたす. よって,

$$\begin{aligned} S_{\bar{t}} &= (\delta_{\bar{\ell}}^k - h_{\bar{\ell}} p^{\bar{k}} + h_i \theta_{\bar{\ell}}^i p^{\bar{k}}) \left(\partial \omega_{\bar{k}}^j / \partial z^{\bar{t}} - \omega_{\bar{k}}^s \frac{\partial \omega_{\bar{t}}^j}{\partial z^s} + \omega_{\bar{t}}^s \partial \omega_{\bar{k}}^j / \partial z^s \right) \\ &\quad - \frac{\partial \omega_{\bar{t}}^j}{\partial z^{\bar{k}}} + h_{\bar{\ell}} p'' \omega_{\bar{t}}^j + \theta_{\bar{\ell}}^i (\partial \omega_{\bar{t}}^j / \partial z^i - h_i p'' \omega_{\bar{t}}^j) \\ &= (\delta_{\bar{\ell}}^k - h_{\bar{\ell}} p^{\bar{k}} + h_i \theta_{\bar{\ell}}^i p^{\bar{k}}) (\omega_{\bar{t}}^s \partial \omega_{\bar{k}}^j / \partial z^s - \omega_{\bar{k}}^s \partial \omega_{\bar{t}}^j / \partial z^s) + \theta_{\bar{\ell}}^i \partial \omega_{\bar{t}}^j / \partial z^i \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \theta_{\ell}^j &= (\delta_{\ell}^k - h_{\bar{\ell}} p^{\bar{k}} + h_i \theta_{\bar{\ell}}^i p^{\bar{k}}) \omega_k^j \\ &\equiv (\delta_{\ell}^k - h_{\bar{\ell}} p^{\bar{k}} + h_i \theta_{\bar{\ell}}^i p^{\bar{k}}) \xi_h^t \partial \omega_{\bar{k}}^j / \partial z^t + Z_{\ell}^0 \xi_h^j \\ &\quad + \xi^{\bar{t}} (\theta_{\bar{\ell}}^s - (\delta_{\bar{\ell}}^k - h_{\bar{\ell}} p^{\bar{k}} + h_i \theta_{\bar{\ell}}^i p^{\bar{k}}) \omega_k^s) \partial \omega_{\bar{k}}^j / \partial z^s. \end{aligned}$$

よって, ω が C^1 -norm で十分小さいとき, $\theta_{\ell}^j = (\delta_{\ell}^k - h_{\bar{\ell}} p^{\bar{k}} + h_i \theta_{\bar{\ell}}^i p^{\bar{k}}) \omega_k^j$ の展開は ξ について linear な部分から始まる. よって, (8.18) より求める式をうる. q.e.d.

さて, 十分 i に近い 2 つの embedding $f, g: M \rightarrow N$ を考えよう. f は, (8.14) のごとく, $\xi \in \Gamma(M, (TN)|_M)$ で parametrize されているとする. ω に関する g の 1 つの regular extension をとる. すると embedding $g \circ f: M \rightarrow N$ を考えることができる. $\varphi^{g \circ f, \omega} = \varphi^{g, \omega}$ を $|\xi|$ についての order 1 の項まで調べよう. $\psi = \varphi^{g \circ f, \omega}$, $\varphi = \varphi^{g, \omega}$ とおく. すると, $\omega \circ g$ の定義により, $\psi = \varphi^{f, \omega \circ g}$ (cf. (8.10)).

よって, 命題 8.2 より,

$$\psi_{\ell}^j = (\delta_{\ell}^k - h_{\bar{\ell}} p^{\bar{k}} + h_i \psi_{\bar{\ell}}^i p^{\bar{k}}) ((\omega \circ g)_k^j + \tilde{\xi}^t \partial (\omega \circ g)_k^j / \partial z^t) + Z_{\ell}^{\psi} \tilde{\xi}^k$$

ここで

$$(8.20) \quad \tilde{\xi}^t = \xi^t + (\omega \circ g)_k^t \xi^{\bar{k}} = \xi^t + \varphi_{\bar{k}}^t \xi^{\bar{k}}$$

あとの方の算式は, g が regular extension なることによる.

よって

$$\psi_{\bar{\ell}}^j - \varphi_{\bar{\ell}}^j \equiv \tilde{\xi}^t (\delta_{\bar{\ell}}^k - h_{\bar{\ell}} p^{\bar{k}} + h_i \psi_{\bar{\ell}}^j p^{\bar{k}}) \partial(\omega \circ g)_k^j / \partial Z^t + Z_{\bar{\ell}}^{\psi} \tilde{\xi}^t$$

よって, $\psi_{\bar{\ell}}^j - \varphi_{\bar{\ell}}^j$ の ξ と $\bar{\xi}$ に関する展開は, linear part から始まる. よって,

$$\begin{aligned} \psi_{\bar{\ell}}^j - \varphi_{\bar{\ell}}^j &\equiv \tilde{\xi}^t (\delta_{\bar{\ell}}^k - h_{\bar{\ell}} p^{\bar{k}} + h_i \varphi_{\bar{\ell}}^j p^{\bar{k}}) \partial(\omega \circ g)_k^j / \partial Z^t + Z_{\bar{\ell}}^{\varphi} \tilde{\xi}^t \\ &\equiv \tilde{\xi}^t (\delta_{\bar{\ell}}^k - h_{\bar{\ell}} p^{\bar{k}} + h_i \varphi_{\bar{\ell}}^j p^{\bar{k}}) (\partial^{\tau} \varphi_k^j / \partial Z^t + h_t p''(\omega \circ g)_k^j) + Z_{\bar{\ell}}^{\varphi} \tilde{\xi}^t \end{aligned}$$

よって 条件 $p^{\bar{k}}(\omega \circ g)_k^j = 0$ on M により,

$$\begin{aligned} \psi_{\bar{\ell}}^j - \varphi_{\bar{\ell}}^j &\equiv \tilde{\xi}^t (\partial^{\tau} \varphi_{\bar{\ell}}^j / \partial Z^t - \varphi_{\bar{k}}^j (h_i \varphi_{\bar{\ell}}^i - h_{\bar{\ell}}) \partial^{\tau} p^{\bar{k}} / \partial Z^t \\ &\quad + h_t (\delta_{\bar{\ell}}^k - h_{\bar{\ell}} p^{\bar{k}} + h_i \varphi_{\bar{\ell}}^i p^{\bar{k}}) p''(\omega \circ g)_k^j) + Z_{\bar{\ell}}^{\varphi} \tilde{\xi}^t \\ &= \tilde{\xi}^t (\partial^{\tau} \varphi_{\bar{\ell}}^j / \partial Z^t - \varphi_{\bar{k}}^j (h_i \varphi_{\bar{\ell}}^i - h_{\bar{\ell}}) \partial^{\tau} p^{\bar{k}} / \partial Z^t - \varphi_{\bar{k}}^j h_t Z_{\bar{\ell}}^{\varphi} p^{\bar{k}}) + Z_{\bar{\ell}}^{\varphi} \tilde{\xi}^t \end{aligned}$$

($\because$ Lemma 8.1)

等式 $h_{\bar{\ell}} Z^{\bar{\ell}} = 0$ に注意して, (0.16) ~ (0.18) より,

$$\psi_{\bar{\ell}}^j - \varphi_{\bar{\ell}}^j \equiv \bar{\partial}_b^{\varphi} \tilde{\xi}$$

かくて, 次の定理が得られた.

定理 8.1 $f, g: M \rightarrow N$ を C^1 -topology で i に十分近い embedding とする. g の ω に関する regular extension $\underline{g}$ をとる. f が (8.14) のように, C^0 -norm で十分小さい $\xi \in C^{\infty}(M, (T^*N)|M)$ によって parametrize されているとする. $\psi = \varphi^{\underline{g} \circ f, \omega}$, $\varphi = \varphi^{g, \omega}$, $\tilde{\xi} = \xi + \varphi(\bar{\xi})$ とおく. ここで,

$\varphi \in \Lambda_b^1(M, (T'N)|M)$ は $\text{map}: T'N|M \rightarrow T'N|M$ とみる. (P' 上では zero とみる.) すると,

$$\psi - \varphi \equiv \bar{\partial}_b^{\varphi} \tilde{\xi} \pmod{|\xi|^2}.$$

十分小さい C^0 -norm をもつ integrable な ω を fix する. ?
map Φ .

$$\Phi: \{\xi \in C^\infty(M, T'N|M); |\xi|_{C^1} < \varepsilon\} \rightarrow \Lambda_b^1(M, T'N|M)$$

を

$$(8.21) \quad \Phi(\xi) = \varphi(f^\xi, \omega)$$

によって定義する.

定理 8.2

$$\Phi'(\xi) \cdot \eta = \bar{\partial}_b^{\Phi(\xi)} (Q^\omega(\xi) \eta). \quad (\eta \in C^\infty(M, (T'N)|M))$$

ここで, 任意の局所座標 Z を考えると,

$$(8.22) \quad Q^\omega(\xi) \cdot \eta = Q_k^\omega(j^2 \xi) \eta^k + Q_{\bar{k}}^\omega(j^2 \xi) \eta^{\bar{k}}$$

と書ける. ここで, $Q_k^\omega(j^2 \xi)$, $Q_{\bar{k}}^\omega(j^2 \xi)$ は, $B(j^2 \xi, \omega(Z + \xi + R(\xi)))$ なる形, 但し $B(j^2 \xi, \omega)$ は $(j^2 \xi, \omega)$ に C^∞ に depend する.

とくに $Q^\omega(\xi)$ は $\|\cdot\|_{C^1}$ -norm (resp. $\|\cdot\|_{C^0}$) で十分小さい ξ (resp. ω) に対して可逆である.

(証明) 定理 1 で $g = f^\xi$, $f = f_t = \underline{g}^{-1} \circ f^{\xi+t\eta}$ の場合を考え

る. すると,

$$\Phi(\xi) \cdot \eta = \bar{\partial} \Phi(\xi) \tilde{\zeta} \quad \text{但し } f_t^k(z) \equiv z^k + t \zeta^k \pmod{t^2}.$$

あとは, $\tilde{\zeta}$ を (ξ, ω, η) で表わすことを考える. 局所座標 z において, Taylor 展開の公式及び (7.1) により,

$$\zeta^i = (\underline{g}^{-1})_k^i (g(z)) \rho^k + (\underline{g}^{-1})_{\bar{k}}^i (g(z)) \bar{\rho}^{\bar{k}}$$

$$\rho^k = \eta + R_f^k(z, \xi) \eta + R_{\bar{f}}^k(z, \xi) \bar{\eta}$$

$$\text{ここで, } R_f^k(z, \xi) = \partial R^k / \partial \xi^l, \quad R_{\bar{f}}^k(z, \xi) = \partial R^k / \partial \xi^{\bar{l}}$$

$$(\underline{g}^{-1})_k^i = \partial (g^{-1})^i / \partial z^k, \quad (\underline{g}^{-1})_{\bar{k}}^i = \partial (g^{-1})^i / \partial z^{\bar{k}}$$

ところが, あとの2つは, $(\dots, \partial g^s / \partial z^t, \dots, \partial \underline{g}^s / \partial z^{\bar{t}}, \dots)$

の有理函数である. ($\because \underline{g}^{-1} \circ g(z) = z$)

よって, 命題 7.1 により, ζ^i は

$A_k^i(j^2 \xi, \omega(g(z))) \eta^k + A_{\bar{k}}^i(j^2 \xi, \omega(g(z))) \bar{\eta}^{\bar{k}}$ なる形をしている. よって, (8.20), (8.8) により $\tilde{\zeta}$ は (8.22) の形に表示できる.

q. e. d.

§9 Universal families

T'' を、実次元 $2n-1$ の compact manifold M 上の CR structure とする。複素次元 n の (境界のない) complex manifold N と、 injection $i: M \rightarrow N$ が存在するとする。さらに、 $n \geq 3$, M は strongly pseudo convex とする。したがって、前の section での $\Gamma(M, T' \otimes \wedge^r (T'')^*)$ for $r \geq 1$ に対する評価及び定理はすべて、我々の場合に適用できる。 $\mathcal{H}^r$ によって、 $\Gamma(M, T' \otimes (T'')^k)$ harmonic space を表わす。即ち、 Δ_b^r の kernel である。我々は、 $\mathcal{H}^1$ から $\Gamma(M, T' \otimes (T'')^*)$ への C^∞ map $\psi(t)$ で、次の条件をみたすものを構成する:

1°) ψ の $t=0$ における differential は $\mathcal{H}'$ の identity map である。

2°) $\psi(t)$ が integrable $\iff p^{\psi(t)} p(\psi(t)) = 0$

3°) N_ω を complex structure N の deformation とする。ここで、 ω は type (0,1) の $T'N$ -valued differential form で、 $\|\omega\|_{n_1}$ は十分小さい (n_1 は十分大きい整数) ものと取る。すると、embedding $f: M \rightarrow N_\omega$ で、

$\psi(t)T''$ が f によって induce した structure となるものが存在する。さらに f は ω に C^∞ に depend する。

このような $\psi(t)$ は、 T'' の deformations の universal family と考えられる。 $\psi(t)$ は、 $\psi \in \Gamma(M, T' \otimes (T'')^*)$ についての equation

$$(9.1) \quad P\psi = P\psi_t, \quad N\psi(\bar{\partial}_b^{*\psi} P(\psi) + \bar{\partial}_b^\psi \partial_b^{\psi_t} \psi) = 0$$

を十分小さい $t \in \mathcal{H}'$ に対して、解くことにより構成される。operator $\bar{\partial}_b^{\psi_t}$ は §6 の最後で構成されている。この equation を解くため、

$$(9.2) \quad E_1 = \Gamma(M, T' \otimes (T'')^*), \quad E = \mathcal{H}' + E_1 \quad (\text{直和})$$

とおく。 $\mathcal{H}'$ は有限次元 vector space, E は, Sobolev S -norms によって与えられる pre-Hilbert spaces の列をもつ Fréchet space である。 k を十分大きく, $\delta > 0$ を十分小さくにとって P^ψ, N^ψ が well-defined になり, §5, §6 における評価が, $\psi \in E_1, \|\psi\|_k < \delta$ に対して成り立つようにする。 $E(k, \delta) = \{(t, \psi) \mid \psi \in E_1, \|\psi\|_k < \delta, t \in \mathcal{H}'\}$ とおく。

map $A: E(k, \delta) \rightarrow E$ を

$$A(t, \psi) = (t, A_1(t, \psi))$$

$$A_1(t, \psi) = P^\psi(\psi - t) + N^\psi(\bar{\partial}_b^{*\psi} P(\psi) + \bar{\partial}_b^\psi \bar{\partial}_b^{\psi_t} \bar{\partial}_b^{\psi_t} \psi)$$

によって定義する。 A の (t, φ) における differential
 $\varepsilon (s, \theta) \in E$ に施したものを $A'(t, \varphi)(s, \theta)$ とかく。
 $P(\varphi) \cdot \theta = \bar{\alpha}_b^{\varphi} \theta$ (定理 3.4), $P^{\varphi} + N^{\varphi} \Delta_b^{\varphi} = \text{identity map}$
 だから,

$$\begin{aligned} A'_1(t, \varphi)(s, \theta) &= \theta - P^{\varphi} s + N^{\varphi} \bar{\alpha}_b^{\varphi} (\bar{\alpha}_b^{h^{\varphi}} - \bar{\alpha}_b^{*\varphi}) \theta + P^{(\varphi, \theta)} (\varphi - t) \\ &\quad + N^{(\varphi, \theta)} (\bar{\alpha}_b^{*\varphi} P(\varphi) + \bar{\alpha}_b^{\varphi} \bar{\alpha}_b^{h^{\varphi}} \varphi) \\ &\quad + N^{\varphi} (\bar{\alpha}_b^{*(\varphi, \theta)} P(\varphi) + \bar{\alpha}_b^{(\varphi, \theta)} \bar{\alpha}_b^{h^{\varphi}} \varphi + \bar{\alpha}_b^{\varphi} \bar{\alpha}_b^{h^{(\varphi, \theta)} \varphi}) \\ &= \theta - P^{\varphi} s + N^{\varphi} \bar{\alpha}_b^{\varphi} (\bar{\alpha}_b^{h^{\varphi}} - \bar{\alpha}_b^{*\varphi}) \theta \\ &\quad + N^{\varphi} (\bar{\alpha}_b^{*(\varphi, \theta)} P(\varphi) + \bar{\alpha}_b^{(\varphi, \theta)} \bar{\alpha}_b^{h^{\varphi}} \varphi + \bar{\alpha}_b^{\varphi} \bar{\alpha}_b^{h^{(\varphi, \theta)} \varphi}) \\ &\quad - N^{\varphi} P^{(\varphi, \theta)} (\bar{\alpha}_b^{*\varphi} P(\varphi) + \bar{\alpha}_b^{\varphi} \bar{\alpha}_b^{h^{\varphi}} \varphi) \\ &\quad - (P^{(\varphi, \theta)} + N^{\varphi} \Delta_b^{(\varphi, \theta)} P_1^{\varphi}) A_1(t, \varphi) \end{aligned}$$

(cf. [4], (6.35))

よって,

$$A'_1(t, \varphi)(s, \theta) = \theta - P^{\varphi} s + Q^{\varphi} \theta + C(\varphi, \theta) A_1(t, \varphi)$$

ここに,

$$\begin{aligned} Q^{\varphi} \theta &= N^{\varphi} \bar{\alpha}_b^{\varphi} (\bar{\alpha}_b^{h^{\varphi}} - \bar{\alpha}_b^{*\varphi}) \theta + N^{\varphi} (\bar{\alpha}_b^{*(\varphi, \theta)} P(\varphi) + \bar{\alpha}_b^{(\varphi, \theta)} \bar{\alpha}_b^{h^{\varphi}} \varphi + \bar{\alpha}_b^{\varphi} \bar{\alpha}_b^{h^{(\varphi, \theta)} \varphi}) \\ &\quad + N^{\varphi} P^{(\varphi, \theta)} (\bar{\alpha}_b^{*\varphi} P(\varphi) + \bar{\alpha}_b^{\varphi} \bar{\alpha}_b^{h^{\varphi}} \varphi) + N^{\varphi} \alpha(\varphi, \theta) P_1^{\varphi} A_1(t, \varphi), \end{aligned}$$

$$C(\varphi, \theta) \mu = P^{(\varphi, \theta)} \mu + N^{\varphi} \beta(\varphi, \theta) P_1^{\varphi} \mu$$

よって、§5、§6 の評価を用いて、十分大きい n_1 に対し、

$$\|Q^{\varphi} \theta\|_S \leq C \|\varphi\|_{n_1} \|\theta\|_S + C_S (\|\varphi\|_{n_1+S} + 1) \|\theta\|_{n_1}$$

$$\|C(\varphi, \theta) \mu\|_S \leq C_S (1 + \|\varphi\|_{n_1+S}) \|\theta\|_{n_1+S} \|\mu\|_{S-1}$$

$W \subset E$ に対し、§7 の inverse mapping theorem が適用

そこで W を選ぶ。上記の評価により, $\text{map } A$ に対して, inverse mapping theorem の条件が成立つ。
(cf. §7. [7.5] の系)

よって 十分小さい $t \in \mathbb{R}^1$ に対し, $\psi(t)$ は equation (9.1) を満たし, $\psi(t)$ は t に C^∞ に depend する。

Lemma 9.1 s を十分大きいとすると, ある定数 $C > 0$.
十分小さい t に対し,

$$\|P(\psi(t))\|_s \leq C \|P^{\psi(t)} P(\psi(t))\|_s$$

なるものがある。

証明) $\psi(t)$ を単に ψ と書く。 $\bar{\partial}_b^{\psi} P(\psi) = 0$

(定理 3.3) だから

$$\begin{aligned} P(\psi) &= P^{\psi} P(\psi) + N^{\psi} \bar{\partial}_b^{\psi} \bar{\partial}_b^{*\psi} P(\psi) \\ &= P^{\psi} P(\psi) + [N^{\psi}, \bar{\partial}_b^{\psi}] \bar{\partial}_b^{*\psi} P(\psi) + \bar{\partial}_b^{\psi} N^{\psi} \bar{\partial}_b^{*\psi} P(\psi) \\ &= P^{\psi} P(\psi) + A. \end{aligned}$$

ここに, (9.1) より

$$\begin{aligned} A &= [N^{\psi}, \bar{\partial}_b^{\psi}] \bar{\partial}_b^{*\psi} P(\psi) - \bar{\partial}_b^{\psi} N^{\psi} \bar{\partial}_b^{\psi} \bar{\partial}_b^{*\psi} \psi \\ &= N^{\psi} \bar{\partial}_b^{\psi} \bar{\partial}_b^{*\psi} \bar{\partial}_b^{\psi} \psi + [N^{\psi}, \bar{\partial}_b^{\psi}] (\bar{\partial}_b^{*\psi} P(\psi) + \bar{\partial}_b^{\psi} \bar{\partial}_b^{*\psi} \psi) \\ &= -N^{\psi} \bar{\partial}_b^{\psi} \bar{\partial}_b^{\psi} \bar{\partial}_b^{*\psi} \psi - N^{\psi} R^{\psi} (\bar{\partial}_b^{*\psi} P(\psi) + \bar{\partial}_b^{\psi} \bar{\partial}_b^{*\psi} \psi) \end{aligned}$$

(最後の等式は, 命題 6.4 (9.1) による)

よって, (5.18), (6.4), (6.16) により, 任意の $\varepsilon > 0$

に対して、

$$(9.3) \quad \|A\|_S \leq \varepsilon \|P(\psi)\|_S$$

が、十分小さい ε に対して成り立つ。

$P(\psi) = P^\psi P(\psi) + A$ であるから、求める評価を得る。
q.e.d.

Lemma 9.2 S を十分大とする、任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$\|N^{\psi(t)} \bar{\Theta}_b^{*\psi(t)} P(\psi(t))\|_S \leq \varepsilon \|P^{\psi(t)} P(\psi(t))\|_S$$

が十分小さい ε に対して成り立つ。

証明) Lemma 9.1 の notations を続ける。

$$N^{\psi} \bar{\Theta}_b^{*\psi} P^\psi = \{N^\psi, \bar{\Theta}_b^{*\psi}\} P^\psi \quad (9)$$

$$N^{\psi} \bar{\Theta}_b^{*\psi} P(\psi) = \{N^\psi, \bar{\Theta}_b^{*\psi}\} P^\psi P(\psi) + N^{\psi} \bar{\Theta}_b^{*\psi} A$$

よって、(6.28), (6.4) より、 $S \geq S_0 + 1$ に対し、

$$\begin{aligned} \|N^{\psi} \bar{\Theta}_b^{*\psi} P(\psi)\|_S &\leq \|P(\psi)\|_{n_1+S} \|P^\psi P(\psi)\|_S + C \|A\|_S \\ &\leq \|P(\psi)\|_{n_1+S} \|P^\psi P(\psi)\|_S + \varepsilon \|P(\psi)\|_S \\ &\quad (\because (9.3)) \end{aligned}$$

よって Lemma 9.1 により求める評価を得る。 q.e.d.

命題 9.1 $\psi(t)$ を十分小さい $\varepsilon \in \mathcal{H}$ に対する (9.1) の解とすれば、

$\psi(t)$ が integrable $\Leftrightarrow \rho^{\psi(t)} P(\psi(t)) = 0$

証明) Lemma 9.1 より 直ちに 出る。

命題 9.2 $\psi'(0) \cdot t = t$ for $\forall t \in \mathcal{H}'$

証明) $A'(0,0)(S, \theta) = (S, \theta - S)$ より 明らか。

以下、 $\{\psi(t); \rho^{\psi(t)} P(\psi(t)) = 0\}$ が universal family であることを示すため、少し準備がある。

$\mathcal{H}^r = \Gamma(M, T' \otimes \wedge^r({}^0T'')^*)$ における $\Delta_\perp$ の kernel

$$\mathcal{H}^{\text{odd}} = \sum_r \text{odd } \mathcal{H}^r$$

${}^\perp \Lambda_b^r = \Lambda_b^r$ における $P_\perp$ の image.

$$\Lambda_b^r = \Gamma(M, T' \otimes \wedge^r({}^0T'')^*)$$

$$E = \mathcal{H}^{\text{odd}} + \Gamma(M, T') + \sum_{r \geq 1} {}^\perp \Lambda_b^{2r}$$

$$E = \sum_{r \geq 1} \Lambda_b^{2r-1} \quad \text{と書く,}$$

$E, \bar{E}$ は $\Lambda_b(M, T'N|M) = \sum_{r \geq 0} \Lambda_b^r(M, T'N|M)$ の subspaces である。 E の元は, (h, ζ, μ) , $\zeta \in C^\infty(M, T'N|M)$

$$(9.5) \quad \begin{cases} h = h^1 + h^3 + \dots & h^j \in \mathcal{H}^j \\ \mu = \mu^2 + \mu^4 + \dots & \mu^j \in {}^\perp \Lambda_b^j \end{cases}$$

と書かれる。

$$(9.6) \quad J^\psi: E \ni (h, \zeta, \mu) \mapsto h + \bar{\partial}_b^\psi \zeta + (\bar{\partial}_b^\psi + \bar{\partial}_b^{*\psi}) \mu \in \bar{E}$$

を考へる。十分小さい integrable な ψ に対し, J^ψ が

右逆元をもつことを示す。

$$(9.6)' \quad L^{\varphi}: E \ni \gamma \mapsto (P\gamma, \bar{\omega}_b^{*\varphi} N^{\varphi} \gamma^1, E\bar{\omega}_b^{\varphi} N^{\varphi} \gamma^1 + P(\bar{\omega}_b^{\varphi} + \bar{\omega}_b^*) N^{\varphi}(\gamma^2 + \dots)) \\ \in E$$

を考へる。(6.6), (6.16) を用いて直接の計算により,

integrable な φ に対し,

$$(9.7) \quad J^{\varphi} \circ L^{\varphi} = I + S^{\varphi}$$

ここに,

$$(9.8) \quad S^{\varphi} \gamma = (P - P^{\varphi}) \gamma - \bar{\omega}_b^{*\varphi} (P - P^{\varphi}) \bar{\omega}_b^{\varphi} N^{\varphi} \gamma^1 \\ - (\bar{\omega}_b^{\varphi} + \bar{\omega}_b^{*\varphi}) (P - P^{\varphi}) (\bar{\omega}_b^{\varphi} + \bar{\omega}_b^{*\varphi}) N^{\varphi} (\gamma^2 + \dots)$$

(6.24) より,

$$(9.9) \quad \|S^{\varphi} \gamma\|_5 \leq C \|\varphi\|_{n_1} \|\gamma\|_5 + C_S \|\varphi\|_{n_1+5} \|\gamma\|_1$$

よって、命題 8.1 より、 $I + S^{\varphi}$ は可逆で、 $L^{\varphi} \circ (I + S^{\varphi})^{-1}$ は J^{φ} の右逆元となる。かくて,

$$(9.10) \quad (J^{\varphi} \circ L^{\varphi} \circ (I + S^{\varphi})^{-1}) \gamma = \gamma \quad (\gamma \in E)$$

さて、 $\{\text{injection } i: M \rightarrow N \text{ に } C^0\text{-norm で十分近い embedding } f: M \rightarrow N\}$ の $\{\xi \in C^{\infty}(M, T^*N|_M)\}$; ξ は十分小さい C^{∞} -norm をもつ} による parametrization f^{ξ} を考えよう。 $f = f^{\xi}$ が (8.14) の形に与えられ parametrization f^{ξ} による N_{ω} を complex structure N の deformation とする、ここに ω は type (0,1) の T^*N -valued differential

form on N で, 十分小さい $\|\cdot\|_k$ -norm (k 十分大) をもつと μ とする。これは

$$(9.11) \quad \Phi: \{\xi \in \Gamma(M, T); |\xi|_C < \varepsilon\} \rightarrow \Lambda_b^1$$

((8.21) と与えられる Φ) と与える。定義により, $M_\Phi(\xi)$ は, $f^\xi: M \rightarrow N_\omega$ により M 上に induce される pseudo complex structure である。

$$E(\varepsilon) = \{(h, \xi, \mu) \in \underline{E} : \|h'\| < \varepsilon, \|\xi\|_k < \varepsilon\} \text{ とおく。}$$

$$h = (t, u) \quad t = h^1, \quad u = h^3 + h^5 + \dots \quad \text{と書く。}$$

$$(9.12) \quad A: E(\varepsilon) \ni (t, u, \xi, \mu) \mapsto \Phi - \psi + u + (\bar{\partial}_b^{\Phi} + \bar{\partial}_b^{\# \Phi}) \mu \in \underline{F}$$

を定義する。 ($\bar{\partial}_b^{\# \Phi}$ については §6 の終りを参照)

$$\text{すなわち, } \Phi = \Phi(\xi), \quad \psi = \psi(t).$$

定理 8.2 により, (s, v, η, θ) , $(s \in \mathcal{H}', v \in \mathcal{H}^3 + \mathcal{H}^4 + \dots, \eta \in \Lambda_b^0)$ に対し,

$$A'(t, u, \xi, \mu)(-s, v, \eta, \theta) = \{\psi'(t)s + v\} + K + (\bar{\partial}_b^{\Phi} + \bar{\partial}_b^{\# \Phi})\theta + (\bar{\partial}_b^{\Phi(K)} + \bar{\partial}_b^{\# \Phi(K)})\mu$$

$$\text{すなわち} \quad K = \bar{\partial}_b^{\Phi} Q^\omega(\xi)\eta.$$

map

$$(9.13) \quad K^\xi: E \ni (s, v, \eta, \theta) \mapsto (-s, v, Q^\omega(\xi)^{-1}\eta, \theta) \in \underline{E}$$

を考える。

$$A'(t, u, \xi, \mu) K^{\xi}(s, v, \eta, \theta) = (\psi'(t)s + v) + \bar{\partial}_b^{\xi} \eta + (\bar{\partial}_b^{\eta\xi} + \bar{\partial}_b^{\eta\xi}) \theta \\ + (\bar{\partial}_b^{\eta\xi, \alpha} + \bar{\partial}_b^{\eta\xi}(\xi, \alpha)) \mu \\ (\alpha = \bar{\partial}_b^{\eta\xi} \eta)$$

$$= J^{\xi}(s, v, \eta, \theta) + (\psi'(t)s - s) + (\bar{\partial}_b^{\eta\xi} - \bar{\partial}_b^{*\xi} + \bar{\partial}_b^{\eta\xi} - \bar{\partial}_b^{\xi}) \theta \\ + (\bar{\partial}_b^{\eta\xi, \alpha} + \bar{\partial}_b^{\eta\xi}(\xi, \alpha)) \mu.$$

よって, (9.10) により

$$A'(t, u, \xi, \mu) K^{\xi} L^{\xi} \gamma = J^{\xi} L^{\xi} \gamma + S_1^{\xi, \xi}(\gamma)$$

ここに

$$S_1^{\xi, \xi}(\gamma) = (\psi'(t) \rho \gamma' - \rho \gamma') \\ + (\bar{\partial}_b^{\eta\xi} - \bar{\partial}_b^{*\xi} + \bar{\partial}_b^{\eta\xi} - \bar{\partial}_b^{\xi})(\rho_L \bar{\partial}_b^{\xi} N^{\xi} \gamma' + \rho_L (\bar{\partial}_b^{\xi} + \bar{\partial}_b^{*\xi}) N^{\xi}(\gamma_2, \gamma_3, \dots)) \\ + (\bar{\partial}_b^{\eta\xi, \alpha} + \bar{\partial}_b^{\eta\xi}(\xi, \alpha)) \mu \\ (\alpha = \bar{\partial}_b^{\xi} \bar{\partial}_b^{*\xi} N^{\xi} \gamma')$$

よって, 命題 9.2, (6.28), (6.29), (6.30), (6.31) より

$$\|S_1^{\xi, \xi}(\gamma)\|_S \leq \varepsilon \|\gamma\|_S + C_S (1 + \|\xi\|_{s+k} \|\mu\|_k + \|\mu\|_{s+k} \|\xi\|_k) \|\gamma\|_k \\ (\|w\|_{n_1}, \|\xi\|_{n_1}, \|\mu\|_{n_1} \text{ が十分小さいとき})$$

よって, (9.7), (9.9), 命題 8.1 より

$$A'(t, u, \xi, \mu) \cdot (K^{\xi} \cdot L^{\xi} \cdot (I + S^{\eta} + S_1^{\xi, \xi})^{-1}) = I$$

さて, §7の inverse mapping theorem を適用しよう。

($A'(t, u, \xi, \mu)$ の逆写像 $K^{\xi} \cdot L^{\xi} (I + S^{\eta} + S_1^{\xi, \xi})^{-1}$ において, ()⁻¹ は上の式と §7最後の命題で評価され, K^{ξ}, L^{ξ} の効果は Lemma 5.3 で評価される.)

$t \in \mathcal{H}^1$, $\xi \in C^\infty(M, TN|_M)$, $\mu^{2r} \in \wedge_{\mathbb{C}}^{2r} (r \geq 1)$, $\mu^{2r+1} \in \mathcal{H}^{2r+1} (r \geq 0)$ を次のようにとれる:

$$(9.14) \quad \begin{cases} \varphi - \varphi(t) + \bar{\omega}_b^{\varphi} \mu^2 = 0, \\ (u^3 + u^5 + \dots) + \bar{\omega}_b^{\mu} \mu^2 + (\bar{\omega}_b^{\varphi} + \bar{\omega}_b^{\mu}) (\mu^4 + \mu^6 + \dots) = 0 \end{cases}$$

但し, $\varphi = \varphi(\xi, \omega)$

さらに, (t, ξ, μ, u) は, ω に differentiable に depend し,
 $\omega = 0$ なら, $(t, \xi, \mu, u) = 0$

$A(0) = \varphi(0, \omega)$ に注意すれば, inverse mapping theorem の条件 (I) は, A についてみたされていない。ここで, map $A - \varphi(0, \omega)$ を考え, $-\varphi(0, \omega)$ の逆像を考える。これが可能であるのは, inverse mapping theorem の仮定における, constants $C_s, C_{s,r}$ が有限集合のみに depend する近傍の上で 右逆元が存在することによる。

$\|\omega\|_R$ が十分小さいとき, equation (9.14) より $\varphi = \varphi(t)$ が出ることを示そう。

十分大きい $S > 0$ を固定する。次に R を S より十分大きくとる。 $\varphi = \varphi(t)$ μ, u を (9.14) の我々が構成した解とする。 $O(\omega)$ によって, ω によって与えられる Λ_b^r の元で, $\forall \varepsilon > 0$, ω 十分小 に対し,

$$\|O(\omega)\|_S < \varepsilon (\|\varphi - \varphi\|_S + \|\mu\|_S + \|u\|_S)$$

が成り立つような ε をすべて表わすことにする。

(9.14) により,

$$\begin{aligned}
 \rho^q(\varphi - \bar{\varphi}) &= \rho^q(\bar{\partial}_b^{*q} - \bar{\partial}_b^{q\bar{q}})\mu^2 + \bar{\partial}_b^{*q}\rho^q\mu^2 \quad (\because \varphi \text{ は } \text{int}(\mu^2)) \\
 &= 0(\omega) + \rho^q\mu^2 \quad (\because (6.3), (6.25)) \\
 &= 0(\omega) + (\varphi^q - \bar{\varphi})\mu^2 \quad (\because \mu^2 \in {}^\perp\Lambda_b^2)
 \end{aligned}$$

よって (6.24) による。

$$(9.15) \quad \rho^q(\varphi - \bar{\varphi}) = 0(\omega)$$

$$N^q \bar{\partial}_b^q \bar{\partial}_b^{*q}(\varphi - \bar{\varphi}) = -N^q \bar{\partial}_b^q \bar{\partial}_b^{*q}(\bar{\partial}_b^{q\bar{q}} - \bar{\partial}_b^{*q})\mu^2$$

であるから 命題 6.6. (6.28) より。

$$(9.16) \quad N^q \bar{\partial}_b^q \bar{\partial}_b^{*q}(\varphi - \bar{\varphi}) = 0(\omega)$$

$$\begin{aligned}
 r \geq 1 \text{ に対し } -\mu^{2r+1} &= \bar{\partial}_b^{\#q} \mu^{2r} + \bar{\partial}_b^{q\bar{q}} \mu^{2r+2} \\
 &= 0(\omega) + \rho \bar{\partial}_b^{*q} \mu^{2r} + \rho \bar{\partial}_b^{*q} \mu^{2r+2} \\
 &= 0(\omega) + \rho(\bar{\partial}_b^{*q} - \bar{\partial}_b^*)\mu^{2r} + \rho(\bar{\partial}_b^q - \bar{\partial}_b)\mu^{2r} \\
 &= 0(\omega)
 \end{aligned}$$

$$(\because \rho \bar{\partial}_b^* = \rho \bar{\partial}_b = 0 \text{ on } {}^\perp\Lambda_b^r)$$

に よる。

$$(9.17) \quad u = 0(\omega)$$

$$\begin{aligned}
 \mu^2 &= \rho^q \mu^2 + N^q \bar{\partial}_b^q \bar{\partial}_b^{*q} \mu^2 + N^q \bar{\partial}_b^{*q} \bar{\partial}_b^q \mu^2 \\
 &= (\rho^q - \rho)\mu^2 + N^q \bar{\partial}_b^q (\bar{\partial}_b^{*q} - \bar{\partial}_b^{q\bar{q}})\mu^2 + N^q \bar{\partial}_b^{*q} (\bar{\partial}_b^q - \bar{\partial}_b^{\#q})\mu^2 \\
 &\quad + N^q \bar{\partial}_b^q \bar{\partial}_b^{\#q} \mu^2 + N^q \bar{\partial}_b^{*q} \bar{\partial}_b^{\#q} \mu^2 \\
 &= 0(\omega) - N^q \bar{\partial}_b^q(\varphi - \bar{\varphi}) - N^q \bar{\partial}_b^{*q}(\mu^3 + \bar{\partial}_b^{q\bar{q}} \mu^4) \\
 &= 0(\omega) - N^q \bar{\partial}_b^q(\varphi - \bar{\varphi})
 \end{aligned}$$

同様の議論を $\mu^4, \mu^6, \dots$ にも適用して

$$(9.18) \quad \mu + N^\varphi \bar{\partial}^\varphi (\varphi - \psi) = 0(\omega)$$

を得る。

Lemma 9.3 $N^\varphi \bar{\partial}_b^{*\varphi} \bar{\partial}_b^\varphi (\varphi - \psi) = 0(\omega)$

証明) 局所座標 Z によって, 定義と (0.17) により

$$(\bar{\partial}_b^\varphi (\varphi - \psi))^j = \bar{\partial}_b^\varphi (\varphi^j - \psi^j) + \Gamma_i^0(\varphi) \wedge (\varphi^i - \psi^i) - \bar{\partial}_b^\varphi \psi^j + 0(\omega)$$

$$\begin{aligned} & ((0.14)より P(\varphi) = 0, (0.19)をも用いる) \\ &= -\bar{\partial}_b^\varphi \psi^j + (\bar{\partial}_b^\varphi - \bar{\partial}_b^\psi) \psi^j + 0(\omega) \\ &= -\bar{\partial}_b^\varphi \psi^j + 0(\omega) \quad (r=1 \text{ に対する } (0.12)) \end{aligned}$$

よって, (0.14) により, $\bar{\partial}_b^\varphi (\varphi - \psi) = -P(\psi) + 0(\omega)$

$$\begin{aligned} \text{よって, } N^\varphi \bar{\partial}_b^{*\varphi} \bar{\partial}_b^\varphi (\varphi - \psi) &= -N^\varphi \bar{\partial}_b^{*\varphi} P(\psi) + 0(\omega) \\ &= -N^\varphi \bar{\partial}_b^{*\varphi} P(\psi) + 0(\omega) \\ &= -N^\psi \bar{\partial}_b^{*\psi} P(\psi) + (N^\psi - N^\varphi) \bar{\partial}_b^{*\psi} P(\psi) + 0(\omega) \\ &= N^\varphi (P^\varphi - P^\psi) \bar{\partial}_b^{*\psi} P(\psi) + (1 + (P^\varphi - P^\psi) \\ &\quad + N^\varphi (\Delta^\varphi - \Delta^\psi)) N^\psi \bar{\partial}_b^{*\psi} P(\psi) + 0(\omega) \end{aligned}$$

($\because$ 命題 6.52: φ, ψ は ϵ より小さい)

$(P^\varphi - P^\psi)_\mu$ に関する [4] の (6.27), (6.28), (5.25), (5.26) を引用すると

$$\begin{aligned} &= -N^\varphi \beta_1(\varphi, \psi, \varphi - \psi) \bar{\partial}_b^{*\psi} P(\psi) \\ &\quad + (1 - \beta_1(\varphi, \psi, \varphi - \psi) + N^\varphi \beta(\varphi, \psi, \varphi - \psi)) N^\psi \bar{\partial}_b^{*\psi} P(\psi) \\ &\quad + 0(\omega) \end{aligned}$$

よって, [4] の (6.29), (5.27) より

$$\begin{aligned} (9.19) \quad \|N^\varphi \bar{\partial}_b^{*\varphi} \bar{\partial}_b^\varphi (\varphi - \psi)\|_5 &\leq \epsilon \|\bar{\partial}_b^{*\psi} P(\psi)\|_{5-3} \\ &\quad + C \|N^\psi \bar{\partial}_b^{*\psi} P(\psi)\|_5 \\ &\quad + \|0(\omega)\|_5 \end{aligned}$$

$P(\varphi) = 0$ なるから, Theorem 3.4 により

$$(9.20) \quad \|P(\psi)\|_S = \|P(\psi) - P(\varphi)\|_S \leq C \|\psi - \varphi\|_{S+1}$$

$$\text{よって} \quad \|\bar{\partial}_b^{* \psi} P(\psi)\|_{S-2} \leq C \|\varphi - \psi\|_S$$

よって Lemma 9.2, (6.3), (9.20) より.

$$N^\varphi \bar{\partial}_b^{* \psi} P(\psi) = O(\omega)$$

$$\text{よって (9.19) より} \quad N^\varphi \bar{\partial}_b^{* \varphi} \bar{\partial}_b^\varphi (\varphi - \psi) = O(\omega) \quad \text{q.e.d.}$$

φ が integrable なるから上の lemma により,

$$N^\varphi \bar{\partial}_b^\varphi (\varphi - \psi) = N^\varphi \bar{\partial}_b^\varphi N^\varphi \bar{\partial}_b^{* \varphi} (\varphi - \psi) = O(\omega)$$

よって (9.18) により

$$(9.21) \quad \mu = O(\omega)$$

(9.15), (9.16), Lemma 9.3 より, $\varphi - \psi = O(\omega)$

$u = O(\omega)$, $\mu = O(\omega)$ であるから $O(\omega)$ の定義により.

$$\varphi - \psi = u = \mu = 0$$

かくて, $\psi(t) = \varphi(z, \omega)$ が示され, 我々の family は complete である。

文献

主要なものは, Kuranishi [4] である。その他には本稿中に直接引用されたものだけを挙げた。

- [1] A. Andreotti and Y-T. Siu: Projective embedding of pseudo-concave spaces, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 24 (1970) pp. 231-278.
- [2] L. Boutet de Monvel: Intégration des équations de Cauchy-Riemann induites formelles, Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz 1974-75.
- [3] L. Hörmander (笹原 乾吉訳) 多変数複素解析学入門
東京図書, 1973.
- [4] M. Kuranishi: Deformations of isolated singularities and $\bar{\partial}_b$. Preprint, Columbia University 1973.
- [5] M. Kuranishi: Deformations of compact complex manifolds, Les presses de l'université de Montreal.

