

コルモゴロフ, フトロフスキー, ビスクノフ型の
非線型拡散方程式

大阪市立大, 理, 亀高 惟倫

非線型拡散方程式に対する初期値問題

$$(1) \begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right] u = f(u), & 0 \leq u \leq 1 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} (x, t) \in \mathbb{R}^1 \times (0, \infty) \\ x \in \mathbb{R}^1 \end{matrix}$$

を考える。以下の仮定を置く。

仮定: $f(s) \in C^\infty[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) > 0 > f'(1)$,
 $f(s) > 0$, $f'(s) \leq -f(s) \leq 0$ $s \in (0, 1)$.

この仮定の下で (1) はコルモゴロフ, フトロフスキー, ビスクノフ型とよぶ事になる。 $u = w(x + 2\lambda t)$ を (1) に代入し w は

$$(2) \quad w'' - 2\lambda w' + f(w) = 0, \quad 0 \leq w \leq 1 \quad x \in \mathbb{R}^1$$

を得る。(2) は常に自明な解 $w \equiv 0$ と $w \equiv 1$ を持つ。

又 (2) は $(x, 1) \rightarrow (-x, -1)$ なる変換が変換から
 から $\lambda \geq 0$ と限る。 (2) の自明な解を (1) の
 進行波解とよぶ。 1937年ジュールゴロフ, ポトロフスキー,
 ビスクノフ [1] は次の事を示した。

(i) $0 \leq \lambda < \lambda_0 \equiv \sqrt{f'(0)}$ なる (2) の解は $w \equiv 0$ と
 $w \equiv 1$ の自明な解のみ。

(ii) $\lambda \geq \lambda_0$ なる (2) と規格化条件 $w(0) = \frac{1}{2}$ なる
 唯一の解 $w_\lambda(x)$ を定める。 $w'_\lambda(x) > 0$ $x \in \mathbb{R}^1$,
 $w_\lambda(-\infty) = 0$, $w_\lambda(+\infty) = 1$ が成り立つ。

(iii) 初期値 $u_0(x) = 1$ ($x > 0$), $= 0$ ($x < 0$)
 から出発した (1) の解 $u(x, t)$ に対し $t \uparrow \infty$ とするとき

$$(\log x) \{ u(x + u^{-1}(\frac{1}{2}, t), t) - w_{\lambda_0}(x + w_{\lambda_0}^{-1}(\frac{1}{2})) \} \searrow 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u^{-1}(\frac{1}{2}, t) \rightarrow -2\lambda_0$$

がある。上の収束は $x \in \mathbb{R}^1$ について一様収束 $\xi \in (0, 1)$

についてコンパクト一様収束がある。そこで $u^{-1}(\xi, t)$,

$$w_{\lambda_0}^{-1}(\xi) \text{ は } u(u^{-1}(\xi, t), t) = \xi, \quad w_{\lambda_0}(w_{\lambda_0}^{-1}(\xi)) = \xi$$

により陰に定義される。 ($\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) > 0$ に注意)

(iii) は次の事を意味する。ハビサイドの階段函数から出
 発した (1) の解 $u(x, t)$ は高々一定 ($u = \xi$) の値に限り付い
 て観測者がながめるとき時間の経過とともに一番おおい進行波

に波形が整，マ行くと見えろ。又観測者の移動速度は一番小さい進行波の速度 $-2\lambda_0$ に近づくマ行くと。

以上の結果を改良する事が目的である。

$$(3) \quad M = \{u(x); \quad u'(x) > 0 \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad u(-\infty) = 0, \quad u(+\infty) = 1\}$$

とする。 $u(x, t)$ はなめらかで、任意に固定した $t \geq 0$ に対して $u(x, t) \in M$ となる。

$$(4) \quad u(u^{-1}(\xi, \tau), \tau) = \xi \quad (\xi, \tau) \in (0, 1) \times [0, \infty)$$

$$(5) \quad \hat{u}(\xi, \tau) = u'(u^{-1}(\xi, \tau), \tau) \quad \left(\hat{u} = \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

よって変換 “ $\wedge$ ” を定義する。(後に KPP 変換と呼ぶでおく)。

$$(6) \quad \begin{cases} \xi = u(x, t) \\ \tau = t \end{cases} \quad \text{又は} \quad \begin{cases} x = u^{-1}(\xi, \tau) \\ t = \tau \end{cases}$$

は微分同型 $\mathbb{R}^1 \times [0, \infty) \ni (x, t) \rightarrow (\xi, \tau) \in (0, 1) \times [0, \infty)$

と写る。以下 $u'(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t)$, $\hat{u}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, t)$

$\hat{u}(\xi, \tau) = \frac{\partial}{\partial \xi} \hat{u}(\xi, \tau)$, $\hat{u}(\xi, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{u}(\xi, \tau)$ のように

略記する。

定理 1 $\lambda \geq \lambda_0$ とする。(2) の進行波解 $w_\lambda(x)$ の

KPP 変換 $\hat{w}_\lambda(\xi) = w'_\lambda(w_\lambda^{-1}(\xi))$ は次の性質を持つ。

$$(7) \quad \hat{w}_\lambda(\xi) \in C^1[0, 1] \cap C^\infty(0, 1)$$

$$(8) \quad \hat{w}_\lambda(\xi) > 0 \quad \xi \in (0, 1)$$

$$(9) \quad \hat{w}_\lambda(0) = \hat{w}_\lambda(1) = 0$$

$$\hat{w}_\lambda'(0) = \sigma_-(\lambda) = 1 - \sqrt{\lambda^2 - \lambda_0^2} > 0$$

$$\hat{w}_\lambda'(1) = \tau_-(\lambda) = 1 - \sqrt{\lambda^2 - f'(1)} < 0$$

$$(10) \quad \lim_{\xi \rightarrow +0} \xi \sqrt{-\log \xi} \hat{w}_\lambda''(\xi) = 0$$

$$(11) \quad \hat{w}_{\lambda_2}(\xi) < \hat{w}_{\lambda_1}(\xi) \quad \xi \in (0, 1) \quad \lambda_2 > \lambda_1 \geq \lambda_0$$

$$(12) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} \sup_{0 < \xi < 1} |\hat{w}_\lambda(\xi) - \hat{w}_{\lambda_1}(\xi)| = 0$$

$$(13) \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sup_{0 < \xi < 1} \hat{w}_\lambda(\xi) = 0$$

次の定理は本質的とは [1] で示されている。

定理 2. (1) の解 $u(x, t)$ は初期値 $u_0(x) \in M$ を持つと知り。次のような $\hat{u}_\infty(\xi)$ の存在を主張する。

$$(14) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{u}(\xi, \tau) = \hat{u}_\infty(\xi) \quad \xi \in (0, 1)$$

又補助条件として次のような $\lambda_1 \geq \lambda_0$ 及び $W(x) \in M$ があるものと知り。

$$(15) \quad \hat{w}_{\lambda_1}(\xi) \leq \hat{u}(\xi, \tau) \leq W(\xi) \quad (\xi, \tau) \in (0, 1) \times [0, \infty)$$

このとき $\lambda \geq \lambda_0$ があり、次の事が成り立つ。

$$(16) \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^1} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^j \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^k u(x + u^{-1}(\xi, \tau), \tau) - \right. \\ \left. - (2\lambda)^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{j+k} \hat{w}_\lambda(x + \hat{w}_\lambda^{-1}(\xi)) \right| = 0 \\ j = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$(17) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} (u^{-1})'(\xi, t) = -2\lambda$$

2.3.2

$$(18) \quad \dot{u}(\xi, t) \leq 0 \quad (\text{又は } \geq 0) \quad (\xi, t) \in (0, 1) \times [0, \infty)$$

が成り立つのは $t \uparrow +\infty$ とするとき

$$(19) \quad (\text{Rg } x) \left\{ u(x + u^{-1}(\xi, t), t) - w_{\lambda}(x + w_{\lambda}^{-1}(\xi)) \right\} \searrow 0$$

(又は $\nearrow 0$)

2.3.3.

この定理からわかるかのように重要なことは (14), (15) を保障する条件と初期値 $u_0(x)$ に対する条件とを区別すべきにある。

先ず (変形) 誤差関数 $E(x)$ を次式で定義する。

$$(20) \quad E(x) = \int_{-\infty}^x H(y, 1) dy$$

$$H(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

適当な $\delta_0 > 0$ があつて $0 < \delta \leq \delta_0$ なる任意の δ に対して

$$(21) \quad u_0(x) = E(x/\sqrt{\delta}) \quad x \in \mathbb{R}^1$$

2.3.3.4. $u_0(x)$ は $\dot{u}_0(\xi) > w_{\lambda_0}'(\xi)$ と

$$\{ \dot{u}_0'(\xi) + f(\xi)/\dot{u}_0(\xi) \}' \leq 0 \quad \xi \in (0, 1) \text{ を満たす。}$$

定理 3. (1) の解 $u(x, t)$ が (21) で与えられた初期値 $u_0(x)$ を持つとき次の事が成り立つ。

$$(22) \quad \hat{u}(\xi, \tau) \geq \hat{w}_{\lambda_0}(\xi) \quad (\xi, \tau) \in (0, 1) \times [0, \infty)$$

$$(23) \quad \hat{u}(\xi, \tau) \leq 0$$

$$(24) \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \sup_{0 < \xi < 1} \left| \hat{u}(\xi, \tau) - \hat{w}_{\lambda_0}(\xi) \right| = 0$$

さうして定理 3 の (16) (17) が $\lambda \in \lambda_0$ で置き代えて成り立つ。特に $\tau \uparrow +\infty$ とするとき

$$(25) \quad (\log n) \left\{ u(x + u^{-1}(\xi, \tau), \tau) - w_{\lambda_0}(x + w_{\lambda_0}^{-1}(\xi)) \right\} \searrow 0$$

が成り立つ。

定理 4. $u(x, t)$ と $u_0(x)$ は定理 3 での λ とおきの
 する。 (1) の解 $v(x, t)$ が初期値 $v_0(x) \in M$ を持ち、

$$(26) \quad \hat{w}_{\lambda_0}(\xi) \leq \hat{v}_0(\xi) \leq \hat{u}_0(\xi) \quad \xi \in (0, 1)$$

が成り立つとする。このとき

$$(27) \quad \hat{w}_{\lambda_0}(\xi) \leq \hat{v}(\xi, \tau) \leq \hat{u}(\xi, \tau) \quad (\xi, \tau) \in (0, 1) \times [0, \infty)$$

が成り立ち、さうして定理 3 の結論 (16) (17) が $u(x, t)$ と $v(x, t)$ で $\lambda \in \lambda_0$ で置き代えて成り立つ。

次の定理をのける準備として、関数のクラス N を次のように定義する。すなわち $u_0(x) \in N$ は次の事を意味する。 $u_0(x) \in M$ であり、

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_0(\xi) \in C^1[0, 1] \cap C^2(0, 1) \\ \hat{u}_0(0) = \hat{u}_0(1) = 0 \quad \hat{u}_0'(0) > 0 > \hat{u}_0'(1) \\ \xi(1-\xi) \hat{u}_0''(\xi) \text{ は } \xi \in (0, 1) \text{ に対し有界} \end{array} \right.$$

定理 5 任意に $\lambda \geq \lambda_0$ と固定する。 (1) の解

$u_k(x, t)$ ($k=1, 2$) が初期値 $u_{k0}(x) \in N$ を持つとする。 次の事を決定する。

$$(29) \quad \hat{u}_{10}'(0) = \hat{u}_{20}'(0) = \sigma_-(\lambda) = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - \lambda_0^2}$$

$$(30) \quad \hat{u}_{20}'(1) > \tau_-(\lambda) = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - f'(1)} > \hat{u}_{10}'(1)$$

$$(31) \quad \{ \hat{u}_{20}' + f(\xi)/\hat{u}_{20} \}' \geq 0 \geq \{ \hat{u}_{10}' + f(\xi)/\hat{u}_{10} \}' \quad \xi \in (0, 1)$$

このとき次の事が成り立つ。

$$(32) \quad \hat{u}_2(\xi, \tau) \geq 0 \geq \hat{u}_1(\xi, \tau) \quad (\xi, \tau) \in (0, 1) \times [0, \infty)$$

$$(33) \quad \hat{u}_{10}(\xi) > \hat{w}_\lambda(\xi) > \hat{u}_{20}(\xi) \quad \xi \in (0, 1)$$

$$(34) \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \sup_{\substack{0 < \xi < 1 \\ k=1, 2}} | \hat{u}_k(\xi, \tau) - \hat{w}_\lambda(\xi) | = 0$$

さらに定理 2 の (16) (17) が $u(x, t) \in u_k(x, t)$ で置き換えられ立つ。 特に $\tau \uparrow +\infty$ とすると

$$(35) \quad (-1)^{k-1} (\operatorname{sgn} \tau) \{ u_k(x + u_k^{-1}(\xi, \tau), \tau) - w_\lambda(x + w_\lambda^{-1}(\xi)) \} \downarrow 0$$

が成り立つ。

定理 6 任意に $\lambda \geq \lambda_0$ と固定する。 $u_k(x, t)$ と

$u_{k0}(x)$ ($k=1, 2$) は定理 5 の λ とおくとする。

(1) の解 $v(x, t)$ が初期値 $v_0(x) \in M$ を持つ

$$(36) \quad \hat{u}_{10}(\xi) \geq \hat{v}_0(\xi) \geq \hat{u}_{20}(\xi) \quad \xi \in (0, 1)$$

が成り立つとする。 このとき

$$(37) \quad \hat{u}_1(\xi, \tau) \geq \hat{v}(\xi, \tau) \geq \hat{u}_2(\xi, \tau) \quad (\xi, \tau) \in (0, 1) \times [0, \infty)$$

が成り立ち、さらに定理 2 の (16) (17) が $u(x, t)$ と $v(x, t)$ で置き代えて成り立つ。

以上の結論の証明には次の 3 つの関係式が基本的な役割を演ずる。

$$(38) \quad \begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - c_1(x, t) \right] (u' - \hat{w}_\lambda(u)) = 0 \\ c_1(x, t) = f'(u) + (u' + \hat{w}_\lambda(u)) \hat{w}_\lambda''(u) \end{cases}$$

$$(39) \quad \begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - c_2(x, t) \right] \dot{u}(u(x, t), t) = 0 \\ c_2(x, t) = f'(u) + 2 \left\{ u'''/u' - (u''/u')^2 \right\} \\ \dot{u}(u(x, t), t) = u''' + (u'')^2/u' - f(u) u''/u' + f'(u)/u' \end{cases}$$

$$(40) \quad \begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - c_3(x, t) \right] \{ \hat{u}_k(v(x, t), t) - v'(x, t) \} = 0 \\ c_3(x, t) = f'(v) + (v' + \hat{u}_k(v, t)) \hat{u}_k''(v, t) \end{cases}$$

又定理 5 とあわせて (29) ~ (31) をみれば $u_{k_0}(x) \in N$ がある事は別に保障しなけねばならないが、ここまでは省略した。詳しくは [2] を参照して下さい。

References

- [1] Kolmogorov, A., I. Petrovskii and N. Piskunov, Etude de l'equation de la diffusion avec croissance de la quantite de matiere et son application a un probleme biologique, Bulletin de l'Universite d'Etat a Moscou, Serie International. Vol. I Section A (1937), 1-25.
- [2] Kametaka, Y., On the nonlinear diffusion equation of Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov type, (to appear in Osaka J. Math.)