

遅延フィードバック制御法の Padé 近似に関する考察

青野 周平[†] 土居 伸二[†]

[†] 京都大学大学院工学研究科電気工学専攻

〒 615-8510 京都市西京区京都大学桂

E-mail: {aono@rotary., doi@}kuee.kyoto-u.ac.jp

あらまし 遅延フィードバック制御法は、簡便なカオス制御法として広く使われているが、この制御法を適用したシステムが遅延微分方程式で表される無限次元のダイナミカルシステムであることから、その数学的解析が困難である。本報告では、このシステムの時間遅れ（むだ時間）を Padé 近似した場合の挙動について解析し、遅延フィードバック制御法におけるカオス制御の非線形動力学を数値的に検討する。

キーワード 遅延フィードバック制御法, カオス制御, Padé 近似, 遅延微分方程式, 引き込み領域, Duffing 方程式

A Study on the Padé Approximation of the Delayed Feedback Control Method

Shuhei AONO[†] and Shinji DOI[†]

[†] Department of Electrical Engineering, Graduate School of Engineering, Kyoto University

Kyotodaigaku-katsura, Nishikyo-ku, Kyoto 615-8510 Japan

E-mail: {aono@rotary., doi@}kuee.kyoto-u.ac.jp

Abstract The mathematical analysis of the delayed feedback control (DFC) method, which is famous as a simple and convenient chaos control method, is very difficult because the system with DFC method becomes an infinite-dimensional dynamical system expressed by delay-differential equations. In this report, we analyze the system with DFC method by means of applying the Padé approximation to the time delay, and discuss the nonlinear dynamics of chaos control in detail.

Key words delayed feedback control method, chaos control, Padé approximation, delay differential equation, basin of attraction, Duffing equations

1. はじめに

非線形の数理モデルの中では、原因と結果の関係が明瞭でない乱雑さを持った振る舞い、いわゆるカオス現象が数多く観測されてきた。カオスは数学的には非常に興味深い現象であるが、工学的には決して望ましい状態とは言えず、制御すべき対象とみなされている。カオス制御は、カオスアトラクタの中に無数に存在する不安定周期軌道 (Unstable Periodic Orbit: 以下, UPO と略す) を安定化することにより、システムの動作を正常にすることを目的とした制御法であり、1990 年に Ott らによって提案されて以来、多くの研究がなされている [1]。その中でも、1992 年に Pyragas によって提案された遅延フィードバック制御 (Delayed Feedback Control: 以下, DFC と略す) 法は、システムの現在の出力と、目標軌道の周期分だけ過去の出力の差を入力にフィードバックすることにより UPO を安定化する方法であり [2]、目標とする UPO の周期を除けば、制御対象の

ダイナミクスに依存せず、実験系において制御対象のモデルを必要としない。DFC 法は、この簡便さから様々な実システムにも適用され、その有効性が実証されてきた。

その一方で、DFC 法は時間遅れを含む微分方程式（遅延微分方程式）で表される無限次元のダイナミカルシステムであることから、その数学的解析は簡単ではない。また、DFC 法のシステムの相空間は関数空間で表されるため、その引き込み領域が極めて複雑になることが示されており [3-5]、実験系において目標軌道を選択することができず、これにより未だ実用的な制御法とは言えない。山本らは、時間遅れを表す伝達関数に Padé 近似を用いることによって、Mackey-Glass 遅延微分方程式を有限次元の微分方程式に近似して解析している [6]。そこで本研究では、山本らの考えを Pyragas の DFC 法に導入することにより、時間遅れに Padé 近似を適用した有限次元システムで表されるカオス制御法を解析し、DFC 法におけるカオス制御の非線形動力学を明らかにする。

本報告は以下のように構成される。第2節においてDFC法のシステムを導入し、第3節でDFC法の時間遅れにPadé近似を適用した有限次元のシステムを提案する。第4節では、実際のカオスシステムにDFC法と第3節で提案した有限次元のシステムを適用して、カオス制御の数値計算を行う。また、これらのアトラクタや引き込み領域を比較することによりカオス制御のメカニズムを議論する。第5節は本報告のまとめである。

2. 遅延フィードバック制御法

Pyragasにより提案されたDFC法は、カオス軌道の現時刻での出力と目標とするUPOの周期分だけ過去の出力との誤差を線形フィードバックすることによりUPOを安定化するカオス制御法である。図1に、一般的なカオスシステムにDFC法を適用したシステムのブロック線図を示す。

本報告では、以下のようなカオスシステムを対象として考える。

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y, t) \\ f_2(x, y, t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

システム(1)のカオス軌道に埋め込まれたUPOをDFC法によって安定化する場合、次のような状態フィードバックを考える。

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y, t) \\ f_2(x, y, t) \end{pmatrix} - Ku \quad (2)$$

ここで、 K はフィードバックゲイン、 u は制御入力であり

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ y(t) - y(t-T) \end{pmatrix} \quad (3)$$

で表される。また、 T は目標とするUPOの周期である。システム(2)の軌道が周期 T の周期軌道に収束すれば、 $y(t-T) = y(t)$ となり、フィードバック項は消えるため、その周期軌道は元のシステム(1)の解であり、UPOが安定化されたことになる。しかし、同じ周期のUPOが複数存在する場合には、UPOの引き込み領域が複雑になることがあり、目標軌道を選択することができない。

次節では、DFC法のシステムにおける時間遅れにPadé近似を適用した有限次元のシステムを提案する。

3. Padé近似を用いた遅延フィードバック制御法

3.1 Padé近似とは

Padé近似とは、多項式近似であるTaylor展開近似を、有理

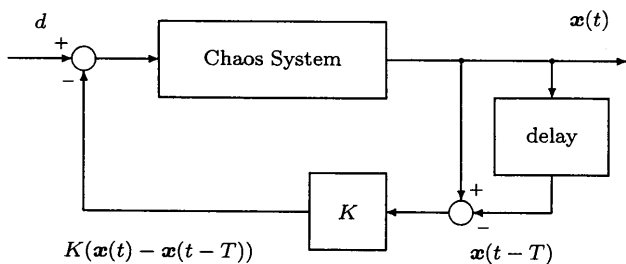


図1 遅延フィードバック制御法の概念図。

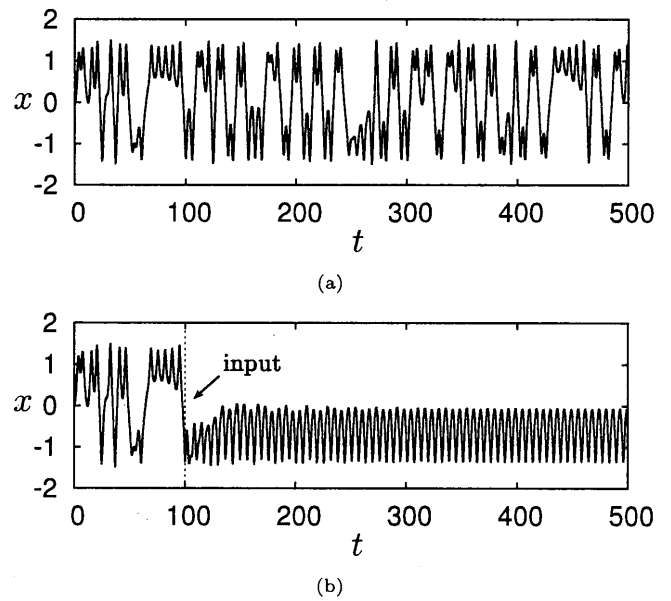


図2 カオス制御の例。(a) 制御入力のないカオス波形。予測できない乱雑な挙動を示している。(b) カオス軌道に $t=100$ の時点で制御入力を投入した波形。定常状態において周期軌道に収束している。

関数近似に拡張したものである。次数 (M, L) での関数 $g(x)$ のPadé近似は、以下の式で表される。

$$g(x) \simeq \frac{p_0 + p_1x + \cdots + p_Mx^M}{1 + q_1x + \cdots + q_Lx^L} \quad (4)$$

式(4)の係数 $p_i (i=0, \dots, M)$, $q_j (j=1, \dots, L)$ を求める場合、あらかじめ関数 $g(x)$ のTaylor展開を $M+L+1$ 次の項まで求めておく必要がある。関数 $g(x)$ のTaylor展開近似を

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \quad (5)$$

とすると、式(4), (5)より、

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \simeq \frac{p_0 + p_1x + \cdots + p_Mx^M}{1 + q_1x + \cdots + q_Lx^L} \quad (6)$$

という式を得る。式(6)右辺の分母を払うと、以下の式を得る。

$$a_l + \sum_{k=1}^M a_{l-k}q_k = p_l \quad (l=0, \dots, M) \quad (7)$$

$$a_l + \sum_{k=1}^M a_{l-k}q_k = 0 \quad (l=M+1, \dots, M+L) \quad (8)$$

式(7), (8)より、係数 $p_i (i=0, \dots, M)$, $q_j (j=1, \dots, L)$ の値が求まる。

3.2 $(n-1, n-1)$ Padé近似を用いたDFC法

ここでは、時間遅れを表す伝達関数を次数 $(n-1, n-1)$ でPadé近似することにより、DFC法のシステムを有限次元のシステムで近似する。

DFC法のシステム(2)において、 $y(t)$ のラプラス変換を Y とすると、 $y(t-T)$ のラプラス変換は $e^{-Ts}Y$ となる。時間遅れを表す伝達関数を次数 $(n-1, n-1)$ で以下のようにPadé近似する。

$$e^{-Ts}Y \simeq \frac{(-1)^{n-1}s^{n-1} + (-1)^{n-2}b_{n-1}s^{n-2} + \cdots - b_2s + b_1}{s^{n-1} + b_{n-1}s^{n-2} + \cdots + b_2s + b_1}Y \quad (9)$$

式 (9) の右边を $(-1)^n(Y_n - Y)$ と置き, Y_n の逆ラプラス変換を y_n とすると, 次数 $(n-1, n-1)$ で Padé 近似した DFC 法のシステムは, 付加的な変数 $y_2, \dots, y_{n-1}$ を用いて, 以下のような $n+1$ 次元の微分方程式で表される.

n が偶数の場合は,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y, t) \\ f_2(x, y, t) \\ 2b_1y - b_1y_n \\ y_2 - b_2y_n \\ 2b_3y + y_3 - b_3x_n \\ \vdots \\ 2b_{n-1}y + y_{n-1} - b_{n-1}y_n \end{pmatrix} - Ku \quad (10)$$

となり, n が奇数の場合は,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y, t) \\ f_2(x, y, t) \\ -b_1y_n \\ 2b_2y + y_2 - b_2y_n \\ y_3 - b_3y_n \\ \vdots \\ 2b_{n-1}y + y_{n-1} - b_{n-1}y_n \end{pmatrix} - Ku \quad (11)$$

となる. システム (10), (11) において, 入力 u は,

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ y - (-1)^n(y_n - y) \end{pmatrix} \quad (12)$$

で表される.

次節では, カオス制御の数値計算を行う.

4. 数値計算

4.1 対象とするカオスシステム

本節では, Duffing 方程式に対して, DFC 法と有限次元に近似した DFC 法を適用した場合の数値計算を行う. Duffing 方程式は

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\delta y + \alpha x - x^3 + B \cos t \end{pmatrix} \quad (13)$$

と表される強制振動系であり, 図 3 のようなカオス現象を示すことが知られている.

式 (13) にフィードバックを考慮したシステムは, 以下のように表される:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\delta y + \alpha x - x^3 + B \cos t \end{pmatrix} - Ku \quad (14)$$

ここで, 入力 u は, DFC 法の場合においては式 (3) で与えられ, DFC 法を有限次元に近似した場合においては式 (12) で与えられる. 今回は Duffing 方程式のパラメータは $\delta = 0.16, \alpha = 1, B = 0.27$

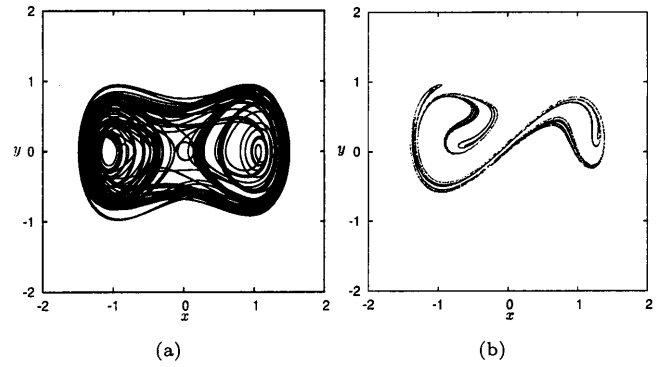


図 3 Duffing 方程式のカオスアトラクタ. (a) 連続時間での解軌道 (b) 離散時間での解軌道 (周期 2π のストロボ点). $\delta = 0.16, \alpha = 1, B = 0.27$.

を用いる. また, 式 (13) は周期 2π の強制振動系なので UPO の周期は 2π の整数倍であり, 今回は周期 $T = 2\pi$ の UPO を目標軌道とする.

4.2 初期条件の設定

有限次元のシステムの数値計算を行う際には, 次元の数 (状態変数の数) だけ初期値を与えれば良い. 一方, 時間遅れ (むだ時間) T を含む無限次元のシステムの場合には, 区間 $-T \leq t \leq 0$ での初期条件を関数として与える必要がある.

本報告では, 制御入力時刻 $t = 0$ で投入することとし, DFC 法のシステム (2) における初期条件を

$$\begin{cases} (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \\ y(t) = 0 \quad (-T \leq t < 0) \end{cases} \quad (15)$$

と設定し, 有限次元のシステム (10), (11) における初期条件を

$$(x(0), y(0), y_2(0), \dots, y_n(0)) = (x_0, y_0, 0, \dots, 0) \quad (16)$$

と設定する.

以下では, 式 (15), (16) における (x_0, y_0) の値を変化させて, 解軌道の初期条件と収束先の関係を調べる.

4.3 周期アトラクタ

ここでは, 各システムにおける, 定常状態での解の収束先 (アトラクタ) を調べる. Duffing 方程式に対して, DFC 法と有限次元 (5-8 次元) で近似した DFC 法を適用した場合の周期 2π の周期アトラクタを, それぞれ図 4, 5 に示す. ここで, フィードバックゲイン K の値は, カオス制御の入力信号として十分大きな値である $K = 1.1$ とした. また, 各周期アトラクタ上にプロットされた点は, 周期 2π のストロボ点である.

まず, DFC 法の周期アトラクタは, 制御入力が消えており, 元のシステム (13) の UPO に一致している. 一方で, 有限次元 (5-8 次元) の場合は, 制御入力が残っているため, 元のシステム (13) の UPO から少しずれている. 5-8 次元の中では, 8 次元のシステムの周期アトラクタが最も DFC 法の周期アトラクタの形に似ており, 高次元ほど似ているという傾向が見られる. また, 6, 8 次元の場合では, DFC 法の場合と同様に原点に対して対象な周期アトラクタが 1 組存在しているが, 5, 7 次元の場合では, 原点に対して対象な周期アトラクタが二組存在してお

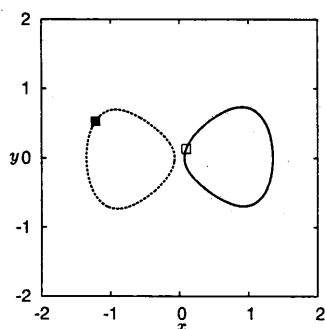


図4 DFC法で安定化された周期 2π の周期アトラクタ。制御入力が消えているため、対象とする Duffing 方程式の UPO と一致している。 $\delta = 0.16, \alpha = 1, B = 0.27, K = 1.1$ 。

り、定性的な違いが見られる。

これらの結果より、DFC 法の場合と有限次元 (5–8 次元) の場合では、定常状態の解の挙動に大きな違いは見られない。以下では、これらのシステムにおいて、定常状態の解の収束先が初期条件にどのように依存するかを調べる。

4.4 引き込み領域

ここでは、システムの定常状態における解の収束先であるアトラクタと、初期条件の関係性について調べる。図 6, 7 に、それぞれ図 4, 5 の周期アトラクタの引き込み領域を示す。横軸と縦軸は、式 (15), (16) におけるそれぞれ x_0 と y_0 である。これは、これらの図のいずれかの点を初期条件 (15), (16) における $(x(0), y(0))$ にとった場合に、解軌道が定常状態においてそれぞ

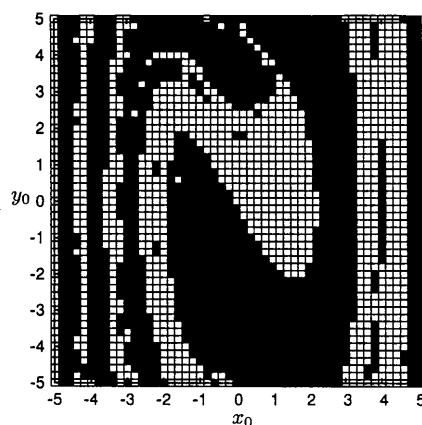


図6 DFC法における各周期アトラクタの引き込み領域。 $\delta = 0.16, \alpha = 1, B = 0.27, K = 1.1$ 。

れ図 4, 5 上の同じマークのプロット点を持った周期アトラクタに収束するということを意味している。

図 6 の DFC 法の場合は、原点に対して対象な 2 つの周期アトラクタの引き込み領域がなめらかな境界を持って区分けされており、両者が渦巻くような形となっている。また、図 7 の 6, 8 次元のシステムの場合も、DFC 法の場合と似たパターンの引き込み領域の構造を持っていることがわかる。5, 7 次元のシステムの場合においては、図 5 に示したように原点に対して対象な周期アトラクタが二組存在していたが、相平面上の右半平面同士、左半平面同士の 2 つの周期アトラクタの引き込み領域をそれぞれ合わせると、DFC 法の場合と似たパターンの引き込み領域の構造を持っていることがわかる。

以上より、有限次元のシステムにおける引き込み領域の構造は、周期アトラクタの形と同様に、高次元の場合ほど DFC 法の場合に近い形となっており、8 次元のシステムではかなり近い形となっている。このことは、定常状態の解の収束先と初期条件の関係性において、無限次元のシステム (DFC 法) と有限次元のシステムのダイナミクスに大きな違いがないことを示唆している。

5. おわりに

本報告では、無限次元のダイナミカルシステムで表される DFC 法を、Padé 近似を用いて有限次元のシステムに近似した。また、例として Duffing 方程式を用いて、数値実験によって両者の定常状態における収束先である周期アトラクタとその引き込み領域を比較することにより、カオス制御のダイナミクスを解析した。有限次元のシステムにおける周期アトラクタとその引き込み領域が、無限次元のシステムの場合と同様の形状を持っており、8 次元程度でその形をほぼ再現できることを示した。この結果から、カオス制御という観点において、無限次元のダイナミカルシステムのダイナミクスと有限次元のダイナミカルシステムのダイナミクスに大きな違いがないという可能性が考えられる。しかし、今回の結果は、一例を示したに過ぎないため、DFC 法における一般的なダイナミクスを調べるのが今後の課題である。

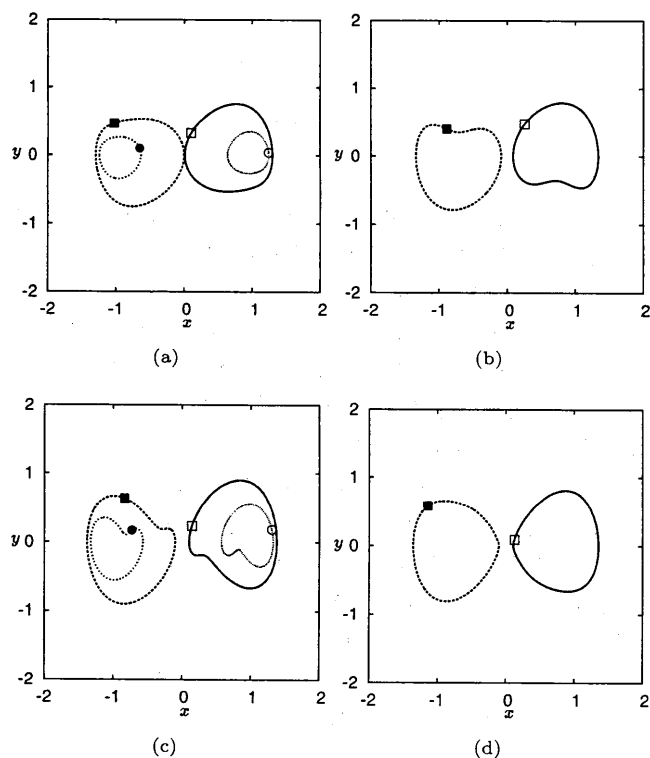


図5 有限次元で近似した場合の周期 2π の周期アトラクタ。制御入力が残っているため、対象とする UPO から少しずれている。 $\delta = 0.16, \alpha = 1, B = 0.27, K = 1.1$ 。(a) 5次元システム (b) 6次元システム (c) 7次元システム (d) 8次元システム。

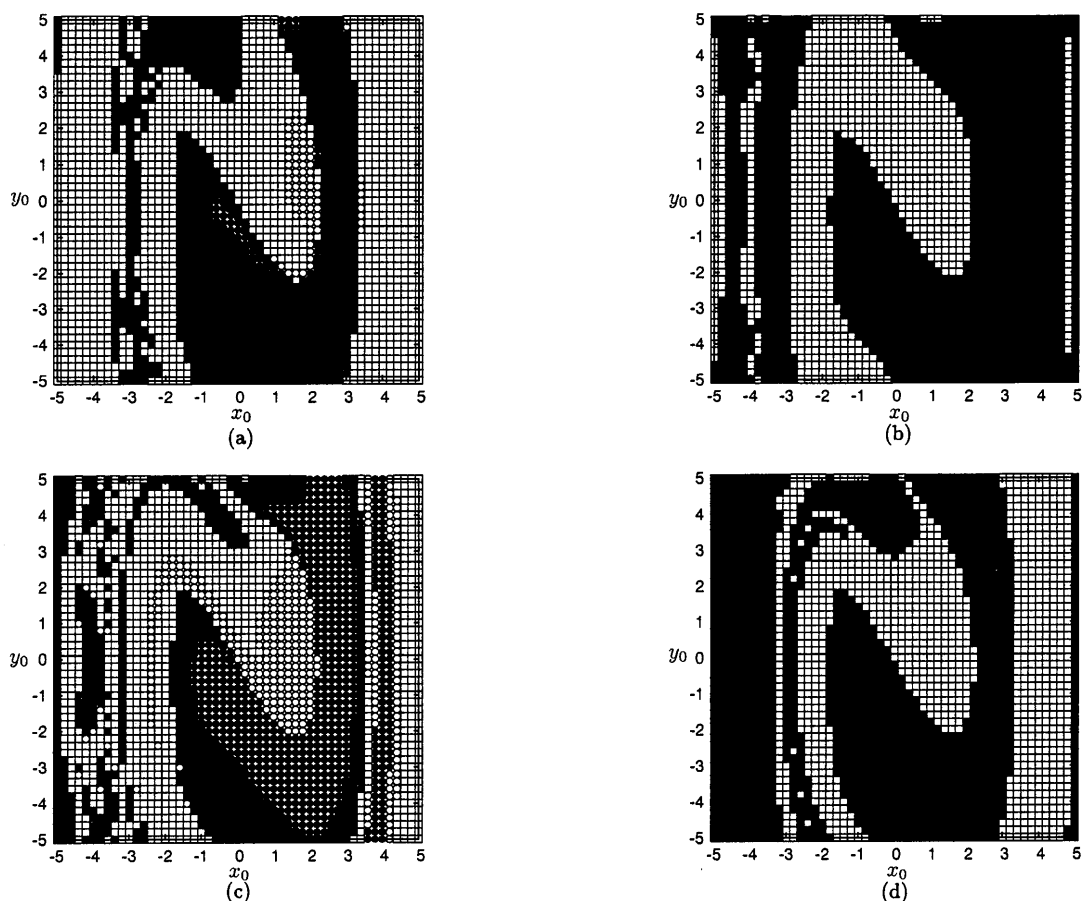


図 7 有限次元で近似した場合の各周期アトラクタの引き込み領域. $\delta = 0.16, \alpha = 1, B = 0.27, K = 1.1$. (a) 5次元システム (b) 6次元システム (c) 7次元システム (d) 8次元システム.

謝辞 本研究の一部は、総合科学技術会議により制度設計された最先端研究開発支援プログラム（FIRST 合原最先端数理モデルプロジェクト）により、日本学術振興会を通して助成を受けた。また、科研費（24500274）により助成を受けた。

文 献

- [1] E. Ott, C. Grebogi, and J. A. Yorke: Controlling chaos, *PRL*, 11, pp. 1196-1199, 1990.
- [2] K. Pyragas: Continuous control of chaos by self controlling Feedback, *Phys. Let. A*, 170, pp. 421-428, 1992.
- [3] 山末 耕平, 引原 隆士: 時間遅れフィードバック制御された磁気弾性系における解の収束と不変多様体, 信学技報, NLP2003-32, pp. 19-23, 2003.
- [4] 山末 耕平, 引原 隆士: 時間遅れフィードバック制御された Duffing 系に生じる複数の定常状態とカオス残存の関係, 信学技報, NLP2004-23, pp. 11-15, 2004.
- [5] 引原 隆士: 時間遅れを有する系の力学とその大域的位相構造: 時間遅れ制御則の応用に向けて, 数理解析研究所講究録, 第 1637 巻, pp. 1-11, 2009.
- [6] 山本 高志, 土居 伸二, 熊谷貞俊: Mackey-Glass 差分微分方程式の有限次元近似について, 信学技報, NLP2002-84, pp. 1-6, 2002.