

Hilbert 変換による非線形変調波列の解析

—ダウンシフト現象に関する一考察—

岐阜大・工・共通 田中光宏 (TANAKA Mitsuhiro)

§1. ダウンシフト現象とは？

細長い水槽の一端で、一定振幅、一定振動数で単色波を起こし続けると、できる波列はその振幅と振動数で決まるある種の変調攪乱に対して不安定であり、下流に行くに従い波列が乱れ、ついには一様波列とは程遠い状態になる。この現象は変調不安定、sideband 不安定、もしくはこの現象をはじめて詳細に研究した研究者の名を取って Benjamin-Feir 不安定などと呼ばれている。しかし意外なことに、さらにその下流にいくと、この増大した変調攪乱もしだいに初期のレベルにまで減少し、また再びはじめのようなほぼ一様な波列に回帰する (FPU 回帰)。

しかしながら、注意深く観測すると、一様な波列に回帰した時点での振動数が、初期のそれに比べて低振動数側にシフトしている場合があるという実験事実が Lake et al. (1977) によって初めて報告された。この現象は「変調波列のダウンシフト現象」と呼ばれている。Lake et al. は、ダウンシフトは波列のパラメタにより、起こる場合と起こらない場合があり、その両者の間にも見られる相違は、「砕波」の有無であると報告している。このことから、ダウンシフト現象を再現するためには、十分な非線形性と並んで、砕波をモデルする何らかの散逸機構の導入が必要であろうと考えられているが、未だ完全な理解には至っていないのが現状である。

海洋での風波の発達過程においても、よく似たスペクトルのピークの低振動数側へのシフトが観測されており、この現象は、海洋表面を通しての運動量輸送、物質輸送や波浪推算などにも大きな影響を及ぼしている可能性があるという意味からもその解明は重要であろうと思われる。

§2. 本研究の動機

準単色の、すなわちスペクトル幅の狭い、弱非線形の水面波列の発展を記述する方程式としては非線形 Schrödinger 方程式 (NLS 方程式)

$$i \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\omega_0}{2k_0} \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\omega_0}{8k_0^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \omega_0 k_0^2 |A|^2 A = 0, \quad (2.1)$$

が良く知られている。ここで k_0, ω_0 はそれぞれ搬送波の波数および振動数で、今考えている無限に深い水の表面を伝播する重力波の場合、両者は線形分散

関係 $\omega_0 = \sqrt{gk_0}$ で結ばれている。また $A(x, t)$ は波列の複素振幅で、自由表面変位 $\eta(x, t)$ とは

$$\eta(x, t) = \text{Re} \left[A(x, t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \right] + O(A^2), \quad (2.2)$$

の関係にある。しかし NLS 方程式では、初期に単色な搬送波に対称的に加えられた変調成分（ここでは、upper および lower sideband の事）は、いつまでも対称的な発展しか示さず、したがって、ここで問題としているダウンシフト現象の解明に役立たない。

一方、Dysthe (1979) は NLS 方程式の導出と同じ準単色、弱非線形の仮定の基で、解析をもう一次進めて、NLS に対する補正を取り込んだ新しい振幅方程式（Dysthe 方程式）

$$\begin{aligned} i \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\omega_0}{2k_0} \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\omega_0}{8k_0^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \omega_0 k_0^2 |A|^2 A \\ = \frac{i}{16} \frac{\omega_0}{k_0^3} \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} + \frac{i\omega_0 k_0}{4} A^2 \frac{\partial A^*}{\partial x} \\ - \frac{3i\omega_0 k_0}{2} |A|^2 \frac{\partial A}{\partial x} + k_0 A \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{z=0}, \end{aligned} \quad (2.3a)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad (-\infty < z < 0) \quad (2.3b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\omega_0}{2} \frac{\partial |A|^2}{\partial x}, \quad (z = 0), \quad (2.3c)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \rightarrow 0. \quad (z \rightarrow -\infty) \quad (2.3d)$$

を導出した。この式は、NLS 方程式の示し得なかった両 sideband の非対称的發展、すなわち lower sideband の upper sideband に対する優先的な増幅を再現することができ、ダウンシフト現象の解明の基礎とするにふさわしい性質を持っているように思われる。しかし、残念ながらこの Dysthe 方程式においても、一変調周期が終わり、変調がおさまった時点では両 sideband は、NLS の場合と同様、初期の低いエネルギーレベルまで戻ってしまい、やはりこれだけではダウンシフト現象を再現することはできない。

そこで、Trulsen & Dysthe (1990) は、「ダウンシフトが起こる時には、必ず砕波が観測される」という Lake et al. (1977) の報告にかんがみて、

$$i \frac{\omega_0 (a_0 k_0)^2}{2\tau} A \left[\left(\frac{|A|}{A_c} \right)^7 - 1 \right] H(|A| - A_c), \quad (2.4)$$

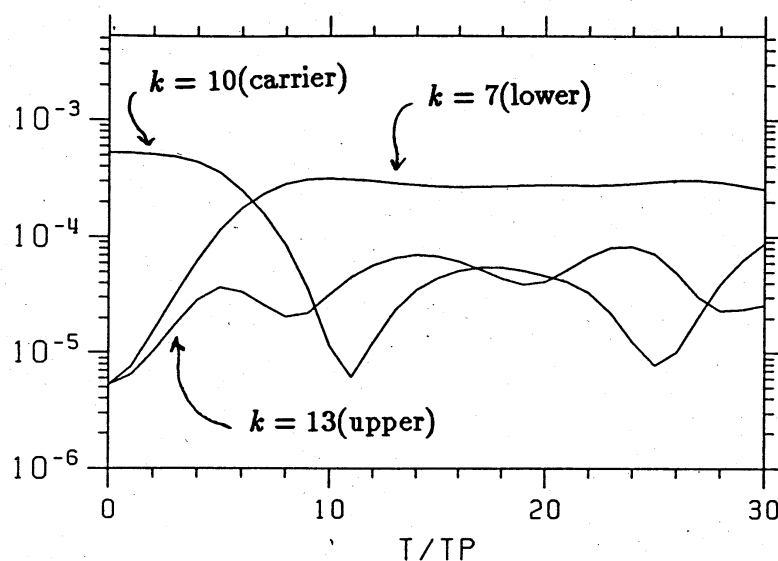


図1: Dysthe 方程式+砕波 ($k_0 = 10, k_M = 3, ak = 0.23, A_c = 0.35$).

なる項を Dysthe 方程式に付加し、その結果図1で示すようにダウンシフト現象の再現に成功した。ここで、 A_c, τ, γ は適当な定数、また H はヘビサイド関数である。この付加項は、変調波列の振幅 $|A|$ が臨界値 A_c を超える部分のみを、ある特性時間で強制的に A_c にまで緩和する役割を持っている。

以前、ある研究集会で Dysthe に会う機会があり、彼自身に、「どうしてこの付加項でダウンシフト現象が再現できたのでしょうか？」と聞いたところ、彼は「何らかの意味で、upper sideband が lower sideband に比べ、砕波が起こるような大振幅な波の付近に集中する傾向があり、したがって砕波によって選択的に散逸させられるのではないだろうか？」というようなことを言った(と私は理解した。何しろ不得意な英語による議論なので...)。「でも Fourier 解析の立場では、ある波数モードの空間分布なんて概念はそもそも存在しない。もしそのようなイメージが正しいなら、どういった解析でそれを確認する事ができるのでしょうか？」と質問すると、「wavelet 解析を使えば何とかなのではないか？」というような返事が帰ってきた。最近になってこの事を思い出し、変調波列の解析に wavelet 解析を適用してみようと考え始めたが、そもそも両 sideband はよく似た空間スケールの成分なので、それを wavelet 解析で分離するのはほとんど不可能であるという事を知り、いきなり行き詰まってしまった。そんな折、たまたま海の波の解析に「Hilbert 変換」を使っている NASA の研究者の講演を聴く機会があり、Hilbert 変換なら局所的な波数も定義することができ、変調波列に関して、Fourier 解析では得られない何か新しい知見が得られるのではないかと試みたのが今回の発表である。ただし、まだまだ「ただ使ってみた」という段階で、これから詰めなければいけない部分ばかりというのが現状である事を最初にお断りしておく。

§3. Hilbert 変換の復習

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が複素平面 $z = x + iy$ の上半平面で正則な時、実軸上では

$$v(x, 0) = -\mathcal{H}[u(x, 0)], \quad (3.1)$$

が成り立つ。ただし、 $\mathcal{H}[\]$ は「Hilbert 変換」を表わし、任意の実関数 $w(x)$ に対して

$$\mathcal{H}[w(x)] \equiv \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(x')}{x' - x} dx', \quad (3.2)$$

で定義される。ここで $\mathcal{P}$ は Cauchy の主値の意味。

特に、三角関数の Hilbert 変換は単純で、

$$\begin{Bmatrix} \cos kx \\ \sin kx \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{Bmatrix} -\sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix}, \quad (3.3)$$

の置き換えに対応している。したがって、 $u(x, y)$ が実軸 $y = 0$ 上で、周期 2π の周期関数で、

$$u(x, 0) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (3.4)$$

のように Fourier 級数表示される場合には、対応する $v(x, y)$ の実軸上での値は簡単に

$$v(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos kx + a_k \sin kx), \quad (3.5)$$

で与えられる。

今 $Z(x) \equiv u(x, 0) + iv(x, 0)$ を振幅 $a(x)$ と位相 (偏角) $\phi(x)$ を使って、

$$Z(x) = a(x)e^{i\phi(x)}, \quad (3.6)$$

と書く時、

$$\frac{dZ}{dx} = \left[\frac{da}{dx} + ia \frac{d\phi}{dx} \right] e^{i\phi(x)}, \quad (3.7)$$

より

$$\frac{1}{Z} \frac{dZ}{dx} = \frac{1}{a} \frac{da}{dx} + i \frac{d\phi}{dx}. \quad (3.8)$$

したがって、

$$\kappa(x) \equiv \frac{d\phi}{dx} = \text{Im} \left[\frac{1}{Z} \frac{dZ}{dx} \right]. \quad (3.9)$$

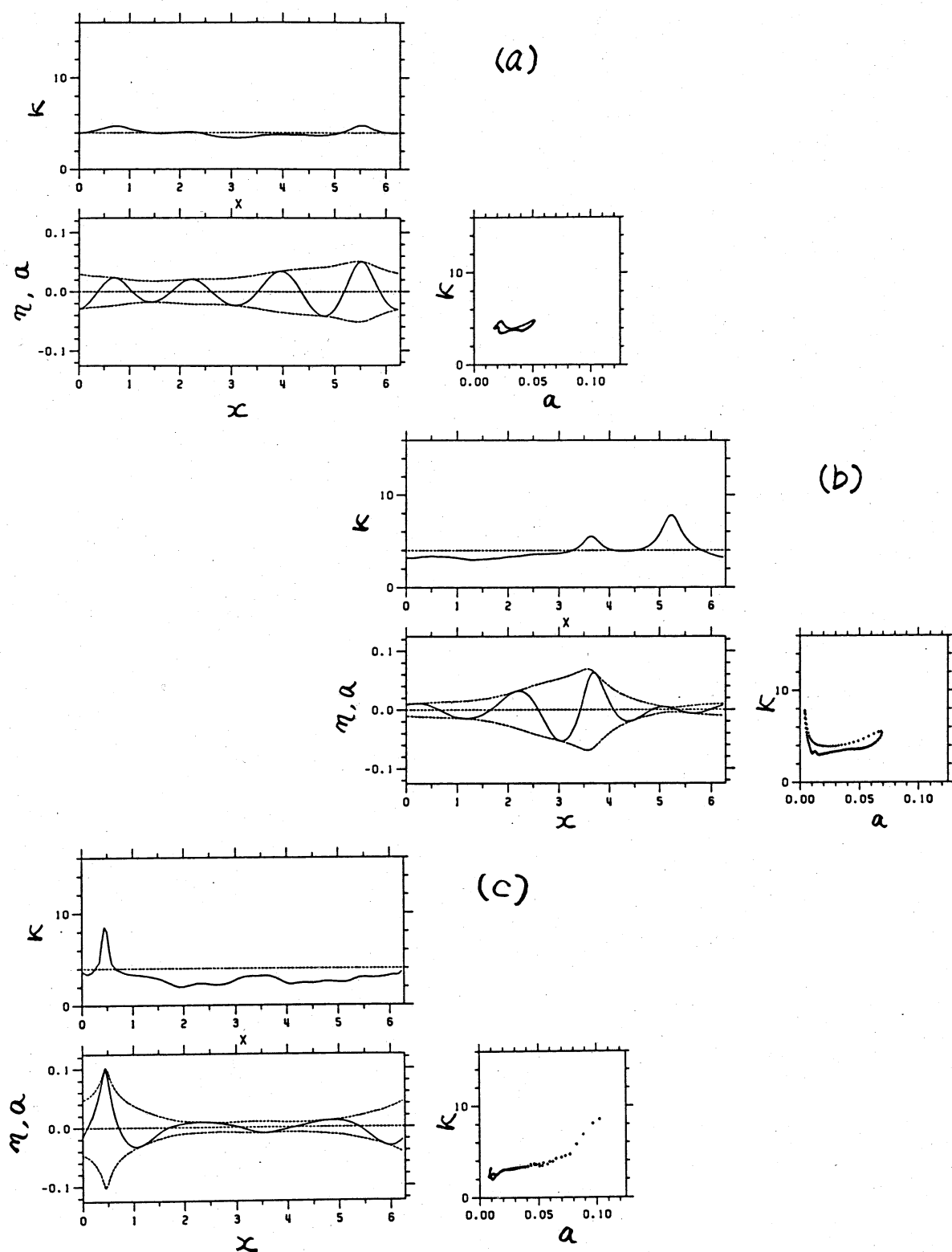


図2: 水面波形 $\eta(x)$ 、振幅関数 $a(x)$ 、波数分布 $\kappa(x)$ 及び $a-\kappa$ 図。
 $k_0 = 4$, $k_M = 1$, $a_0 k_0 = 0.125$.
 (a) $t = 29.70T_p$, (b) $t = 50.70T_p$, (c) $t = 62.67T_p$.

これによって、各 x に対して「局所的な振幅」 $a(x)$ と、「局所的な波数」 $\kappa(x)$ を定義する事ができる。また、両端の位相差

$$[\phi] \equiv \phi(2\pi) - \phi(0) = \int_0^{2\pi} \kappa dx, \quad (3.10)$$

から

$$\text{波の数} \equiv [\phi]/2\pi, \quad (3.11)$$

によって「波の数」を定義する事ができる。

これより、ある時刻の空間波形 $\eta(x, t) (0 \leq x \leq 2\pi)$ が与えられた時、Hilbert 変換を使うことにより、各 x に対して局所的な振幅及び波数を与えることができ、またその空間波形に含まれる波の数を一義的に定義することができる。

§4. 大振幅領域への高波数成分の集中

図 2 は、Dold (1992) の境界積分法によって計算した水面波形と、これから Hilbert 変換を適用して求めた局所振幅 $a(x)$ および局所波数 $\kappa(x)$ を示している。図に示したケースでは、搬送波波数 $k_0 = 4$, 搬送波のステープネス $a_0 k_0 = 0.125$, 変調波数 $k_M = 1$, 変調の振幅 $a_M = a_0/10$ としている。時刻はそれぞれ (a) $29.70T_p$, (b) $50.70T_p$, (c) $62.67T_p$ である (T_p は搬送波の一周周期)。各時刻の 3 つの図は、左下が水面波形 η (実線) と振幅関数 a (点線)、左上が波数分布 κ 、右下が x をパラメタとした $a-\kappa$ 図である。ちなみにこのケースでは図 2c の直後に砕波が起こり、 $\eta(x)$ は多価関数になる。

これらの図を見ると、 $\kappa(x)$ の大きな値は、 $a(x)$ が大きい領域と小さい領域へ集中する傾向があるように見える。 $\kappa(x)$ の定義 (3.9) から、小振幅領域では必然的に大きな $|\kappa|$ が現れるので、図 2b で見られる小振幅領域での大きな $|\kappa|$ は物理的実体を持たない見かけの現象であろう。一方、図 2c で見られる大振幅領域での大きな $|\kappa|$ は物理的な現象と考えられる。

しかしながら、Hilbert 変換が与える「波数」 $\kappa(x)$ に対して、はたしてどの程度 Fourier 解析での波数と同じようなイメージを持っているのか？この計算結果を、「大振幅領域には高波数成分が集まる傾向がある」という言葉でまとめてしまっているものかどうか？そもそも Hilbert 変換が与える局所的な波数の「物理的な」意味とは何だろうか？…など考えていくと、当初の目的であった「砕波領域へ upper sideband 成分が集まる事の確認」を達成するためには、まだまだ考え直さないといけない部分が多いようである。

§5. 振幅関数の「節」の出現と、波の生成消滅

図 3 は $k_0 = 7$ の搬送波に、 $k_M = 2$ の変調をかけたものの時間発展を示している。搬送波の振幅 a_0 は、加えた変調が最大増幅に対応するように選んであり、この場合、 $a_0 k_0 = 1/7 \approx 0.143$ となる。また変調の初期振幅は $a_0/10$

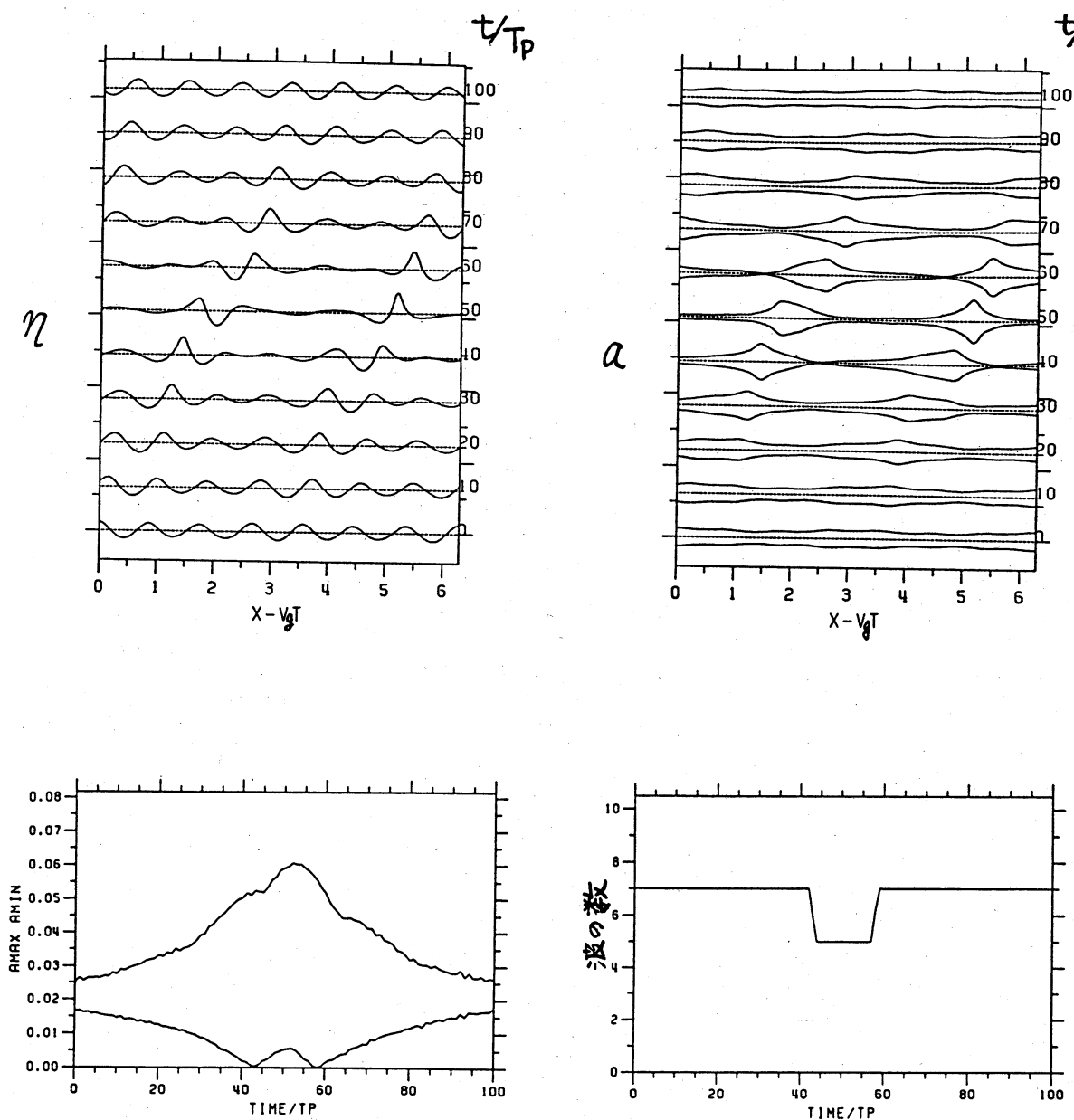


図3: 変調波列の時間発展.

(a) 水面波形 η 、(b) 振幅関数 a 、(c) 振幅関数の最大値と最小値、
(d) 波の数. $k_0 = 7$, $k_M = 2$, $a_0 k_0 = 0.143$.

としている。数値スキームは Dommermuth-Yue (1987) の「高次スペクトル法」と West et al. (1987) のスキームを適当に融合した独自のスキームを使っている。このスキームは、オイラー的であるために自由表面は x の一価関数と仮定されており、したがって $\eta(x)$ が多価になる「砕波」は表現できない。しかし、非線形性の次数は任意に大きくすることが可能であり、また Fourier 表現に基づく擬スペクトル法を用いていることから、ほぼ full-nonlinear な計算を高速に行なうことができる。

図 3a は、 $t=0$ から $t=100T_p$ まで $10T_p$ ごとの表面波形 $\eta(x)$ を示している。ここで T_p は搬送波の一周期。図 3b は図 3a で示した波形に対する「振幅関数」 $a(x)$ 、すなわち包絡波形を示している。図 3a,b では、波群の運動に対する非線形性の効果が分かりやすいように、各時刻の波形は k_0 に対応する線形波の群速度 $v_g(k_0)$ で移動する座標系 $x - v_g(k_0)t$ の関数として書いてある。図 3c は各時刻における $a(x)$ の最大値と最小値を時間の関数として書いたものであり、したがって 2 本のカーブの縦軸方向の間隔が大きいほど、強く変調されているということになる。図 3d は「波の数」の時間変化をプロットしたものである。

このケース以外にも、パラメタの値をさまざまに変えて同様の計算を行なったが、結果は図 3 で示したものと定性的に大きく変わる点はなかった。これらの計算から得られた結果とそれに基づいた考察をまとめると、以下のようになる。

- (1) 必ず 2 つの異なる時刻で、振幅関数に「節」— すなわち $a(x) = 0$ となる点— が現れる。
- (2) 波の数は、最初の節の出現の直後に k_M だけ減少し、第 2 の節の出現の直前に k_M だけ増えて、もとの数に戻る。
- (3) 波の数が変化するためには、振幅関数に節が現れることが必要である。
大きな波が突然消えるなんてことは起こらないはずなのだから、これは考えてみれば当たり前の事なのかも知れない。
- (4) 今まで「ダウンシフトには砕波による散逸が不可欠」という観測事実にこだわりすぎて、ついつい大振幅領域に何か手を加える事ばかり考えてきた嫌いがあるが、ダウンシフトの実際の主人公、すなわち消えてなくなる波はむしろ小さな波であり、ダウンシフトの解明には、もっと小振幅領域に着目した取り扱いが必要なのかも知れない。
- (5) 「第 2 の節」さえ現れなければ波の数は減ったまま、もとに戻るチャンスがなく、したがってダウンシフト現象が起こるはずである。どんな力学的要素が、「第 2 の節」の出現を抑える効果があるであろうか？

図 4a は節が出現する 2 つの時刻の間隔 T_I —これは上で述べたように、ほぼ波の数が減っている時間間隔に相当するが— を $a_0 k_0$ の関数としてプロットしたものである。図 4b は、「変調に関係する時間スケールは、 $a_0 k_0$ のマイナス 2 乗に比例する」という弱非線形変調理論からの示唆を考慮して、 $T_I(a_0 k_0)^2$

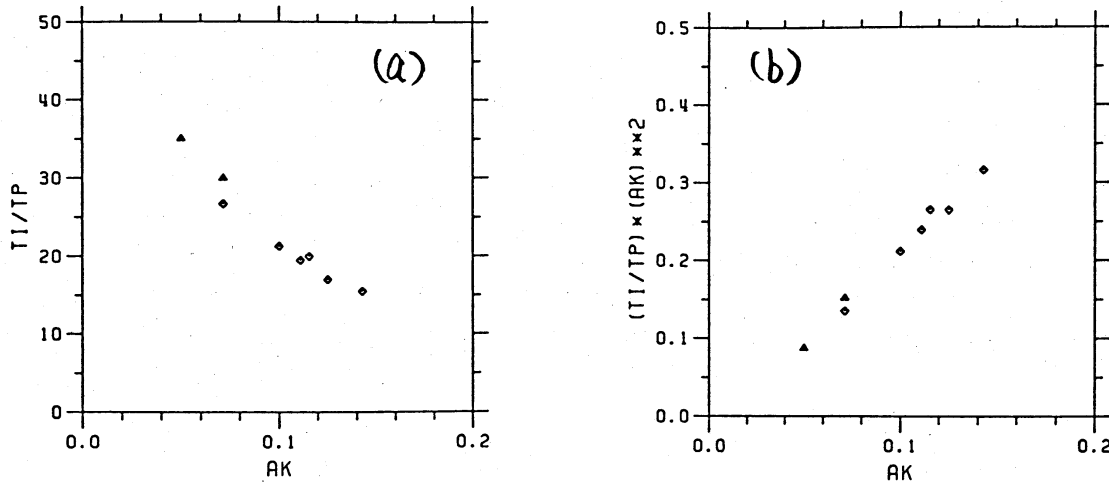


図4: 節が現れる2つの時刻の間隔.

(a) T_I/T_P vs. $a_0 k_0$. (b) $T_I/T_P (a_0 k_0)^2$ vs. $a_0 k_0$.

を $a_0 k_0$ に対してプロットしたものである。これらによると T_I は、 $(a_0 k_0)^{-2}$ ではスケールされていないようであり、むしろほぼ $(a_0 k_0)^{-1}$ に近いように見える。このあたりのことは、まだまだ今後の検討が必要と思われる。

§6. 消えた波はどこへ? —複素空間への拡張—

Hilbert 変換は、もともと上半平面における正則関数を相手にしているので、これを用いる事によって、実軸上のデータ $u(x, 0)$ から上半平面の任意の点での値 $u(x, y)$ を知ることができる。複素関数 $f(z) \equiv u(x, y) + iv(x, y)$ の実軸上での値 $f(x)$ の上半平面への解析接続は

$$f(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{(x - x')^2 + y^2} dx', \quad (6.1)$$

によって与えられる。この $f(x)$ から $f(z)$ への変換は、係数が実数なので、 $f(z)$ を $u(x, y)$ に、 $f(x)$ を $u(x, 0)$ にそれぞれ置き換えてもそのまま成立する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} \cos kx' \\ \sin kx' \end{Bmatrix} \frac{dx'}{(x - x')^2 + y^2} = \frac{\pi}{y} e^{-ky} \begin{Bmatrix} \cos kx \\ \sin kx \end{Bmatrix}, \quad (k \geq 0, y > 0), \quad (6.2)$$

である事に注意すると、

$$u(x, 0) = \sum_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (6.3)$$

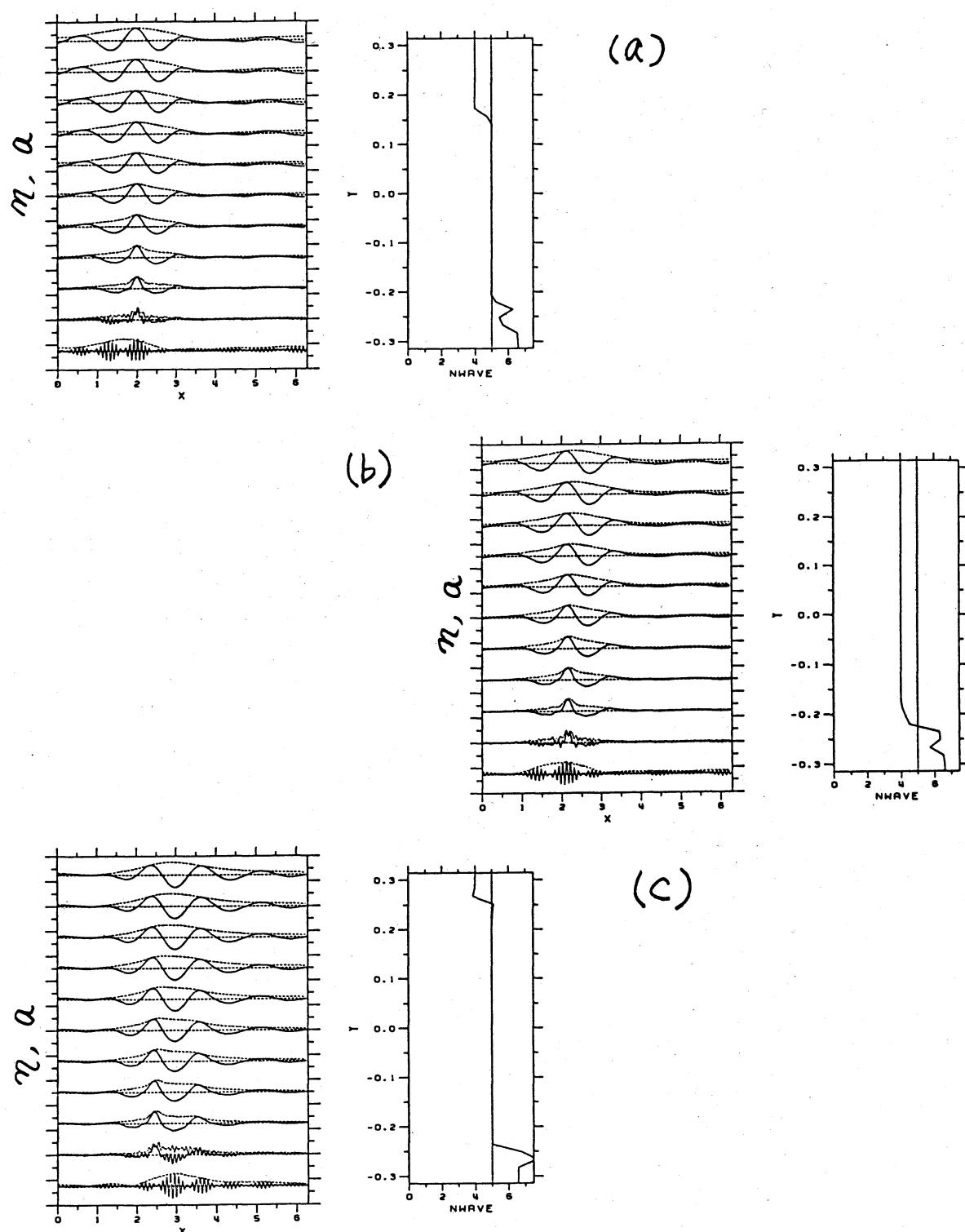


図5: 複素平面に拡張した波形、振幅関数および波の数。
 $k_0 = 5, k_M = 1, a_0 k_0 = 0.1$.
 (a) $t = 80T_p$, (b) $t = 90T_p$, (c) $t = 110T_p$.

と書ける 2π 周期の場合、(6.1) は

$$u(x, y) = \sum_k e^{-ky} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (6.4)$$

を与える。これを用いれば、実軸上の任意の一次元実データ $\eta(x)$ から 2 次元データ $\eta(x, y)$ を作り出すことができ、この y = 一定の切り口の波形に対して、振幅関数、波数分布、波の数などを計算することができる。

図 5 a, b, c の左図は波形（実線）及び振幅関数（点線）をさまざまな y について示したものであり、また右図は各 y = 一定での波形に含まれる波の数を y の関数としてプロットしたものである。図示したケースは、 $k_0 = 5$, $k_M = 1$, $a_0 k_0 = 0.1$ で、示した時刻はそれぞれ (a) $80T_p$, (b) $90T_p$, (c) $110T_p$ である。

図 5a が示すように、 $t = 80T_p$ では $y > 0.15$ の波形は 4 波しか含まないが、実際に観測される実軸に沿った波形、及びその周辺の波形は搬送波波数に等しい 5 波を含んでいる。しかし、時間とともに 4 波領域と 5 波領域の境界は次第に実軸に向かって下降し、ある時刻—実軸上の波形に第一の節が現れる時刻の直後—に実軸を横切り下半平面に移動する（図 5b 参照）。これにより、実測波形の波の数は 4 波に減少する。その後、この境界点はしばらくの間下半平面にとどまるが、再び上半平面に向かって移動を始め、ある時刻—実軸上の波形に第二の節が現れる時刻の直前—に実軸を横切り、上半平面に戻る。図 6 に、4 波領域と 5 波領域の境界点の y 座標を時間の関数として示した。

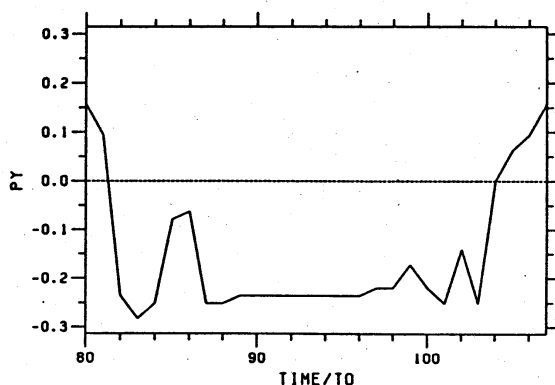


図 6：複素平面に拡張した振幅関数の節の位置の y 座標の時間変化

§7. 今後の課題

- Hilbert 変換の与える波数の物理的な意味をより明確に理解すること。
- 有効な「砕波モデル」の構築。
 - * 振幅関数に節が現れる 2 つの時刻は、必ずその間に最大変調の時刻を挟んでいる。最大変調時は波高も最大となり、最も砕波が起こりやすい時刻

である。もしここで砕波など何らかの非可逆な過程が起これば、その後の発展はポテンシャル理論のそれから大きくずれる可能性があるが、もしその結果、第2の節が出現しなくなれば、波の数は復活するチャンスを失い、ダウンシフトにつながることになる。どのような付加項が第2の節の出現を妨げる効果を持つであろうか？

- * ダウンシフトを再現した Trulsen & Dysthe (1990) の計算では、実軸を横切った節はその後下半面にとどまり続けているのだろうか？
- * もし本当に、ダウンシフト現象が砕波によるエネルギー散逸の結果として起こるのであれば、この現象は有用な「砕波モデル」を構築していく上で、一つの試金石としての役割を持っている。そういう観点からも、この現象の「数値的再現」にこだわるのも意味があるのではないか？
- 周期境界条件を課す事に問題はないのか？（造波境界条件での数値シミュレーションの必要性。）
- そもそもダウンシフト現象は、本当に実在するのだろうか？実験的報告が Lake et al. (1977) 以来ないのではないか？（より新しい精密な実験による検証の必要性）

参考文献

- Lake, B.M., Yuen, H.C., Rungaldier, H., & Ferguson, W.E. (1977) Non-linear deep water waves: theory and experiment. Part 2. Evolution of a continuous wave train. *J. Fluid Mech.* 83, 49-74.
- Dysthe, K.B. (1979) Note on a modification to the nonlinear Schrödinger equation for application to deep water waves. *Proc. R. Soc. Lond.* A369, 105-114.
- Trulsen, K. & Dysthe, K.B. (1990) Frequency down-shift through self modulation and breaking. *Water Wave Kinematics*, A. Torum & O.T. Gudmestad (eds.), Kluwer, 561-572.
- Dold, J.W. (1992) An Efficient Surface-Integral Algorithm Applied to Unsteady Gravity Waves. *J. Comp. Phys.* 103, 90-115.
- Dommermuth, D.G. & Yue, D.K.P. (1987) A high-order Spectral Method for the Study of Nonlinear Gravity Waves. *J. Fluid Mech.* 184, 267-288.
- West, B.J., Brueckner, K.A., Janda, R.S., Milder, D.M. & Milton, R.L.: A New Numerical Method for Surface Hydrodynamics. *J. Geophys. Res.* 92, 11803-11824.