

確率論的地震動予測地図で用いられるモデルについて

河合 伸一 (独立行政法人 防災科学技術研究所)
Shinichi Kawai, National Research Institute
for Earth Science and Disaster Prevention

1. はじめに

確率論的地震動予測地図とは、今後地震によって、強い揺れに見舞われる確率が全国どの程度であるか、または、ある確率を想定したときにその確率に達するのは揺れの大きさがいくつ以上のときかなどを地図上に示したものである。各地点での確率を求めるために、地震の発生 of 長期的な確率評価と、地震が発生したときに生じる強震動を回帰分析で求めることによる確率評価を行っている。それらを組み合わせることによって各地点での揺れの大きさの確率分布が求められ、これらの情報から確率論的地震動予測地図が作成される。今回は、確率論的地震動予測地図で用いられるいくつかのモデルについて紹介する。

2. 強震動の評価に用いられる確率モデル

N は 0 以上の整数値をとる離散型確率分布に従い、 $N \geq 1$ のとき、 $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ は独立に、0 以上の値をとる同じ連続型確率分布に従うとする。いま、

$$Y = \begin{cases} 0 & (N = 0) \\ \max_{1 \leq i \leq N} Y_i & (N = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

とするとき、 Y の確率分布を求める。

$Y \geq 0$ だから、 $y < 0$ のとき $P(Y \leq y) = 0$ である。

$y \geq 0$ のときを考える。このとき、 $P(Y \leq y | N = 0) = 1$ である。これを用いて、

$$\begin{aligned} (2.1) \quad P(Y \leq y) &= \sum_{l=0}^{\infty} P(Y \leq y | N = l) P(N = l) \\ &= P(N = 0) + \sum_{l=1}^{\infty} P\left(\max_{1 \leq i \leq N} Y_i \leq y \mid N = l\right) P(N = l) \\ &= P(N = 0) + \sum_{l=1}^{\infty} P\{(Y_1 \leq y) \cap \dots \cap (Y_l \leq y)\} P(N = l) \\ &= P(N = 0) + \sum_{l=1}^{\infty} \{P(Y_1 \leq y) \cdots P(Y_l \leq y)\} P(N = l) \\ &= P(N = 0) + \sum_{l=1}^{\infty} \{P(Y_1 \leq y)\}^l P(N = l). \end{aligned}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \{P(Y_1 \leq y)\}^l P(N=l).$$

これより、ある地震の発生回数を N 、 N 回の地震それぞれの揺れの大きさを $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ とすると、ある地震の発生回数 N が従う確率分布と、揺れの大きさ Y_1 が従う確率分布をそれぞれ求めれば、 Y の確率分布を求めることができる。

3. 地震の発生確率に関するモデル

いま、ある地震について、最後にこの地震が起きた時刻を 0 とし、最後に地震が起きてからある基準日までの経過時間を t_0 とする。基準日から期間 τ でこの地震が起こる回数が従う確率分布を求める。時刻 t までに地震が発生する回数を $N(t)$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} P(N=n) &= P\{N(t_0+\tau) - N(t_0) = n \mid N(t_0) = 0\} \\ &= P\{N(t_0+\tau) = n \mid N(t_0) = 0\} \end{aligned}$$

である。 $P_n \equiv P\{N(t_0+\tau) \geq n \mid N(t_0) = 0\}$ とすると、

$$\begin{aligned} (3.1) \quad P\{N(t_0+\tau) = n \mid N(t_0) = 0\} &= P\{N(t_0+\tau) \geq n \mid N(t_0) = 0\} \\ &\quad - P\{N(t_0+\tau) \geq n+1 \mid N(t_0) = 0\} \\ &= P_n - P_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

となる。

地震発生間隔が独立に指数分布に従うときはポアソン過程となり、地震の発生回数はポアソン分布に従う。よって、

$$P\{N(t_0+\tau) = n \mid N(t_0) = 0\} = e^{-\lambda\tau} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

である。ここで、 λ は地震の発生頻度で、地震の平均発生間隔の逆数で推定している。ポアソン過程では、地震の発生確率は評価期間 τ のみに依存し、地震の最新発生時期には依存しない。従って、最新発生時期が不明の地震についてはポアソン過程を考えている。このとき、

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= \sum_{l=0}^{\infty} \{P(Y_1 \leq y)\}^l P(N=l) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \{P(Y_1 \leq y)\}^l e^{-\lambda\tau} \frac{(\lambda\tau)^l}{l!} \\ &= e^{-\lambda\tau} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda P(Y_1 \leq y) \tau)^l}{l!} \\ &= e^{-\lambda\tau} e^{\lambda P(Y_1 \leq y) \tau} \\ &= e^{-\lambda \{1 - P(Y_1 \leq y)\} \tau} \\ &= e^{-\lambda P(Y_1 > y) \tau} \end{aligned}$$

となる。

一方、更新過程として、地震発生間隔が独立に逆ガウス分布 $IG(\mu, \lambda)$ に従う場合を考える。確率密度関数は、

$$f(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} e^{-\frac{\lambda}{2\mu^2 x}(x-\mu)^2} \quad (x > 0),$$

確率分布関数は、標準正規分布の分布関数 Φ を用いて、

$$F(x) = \Phi \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{x}} \left(\frac{x}{\mu} - 1 \right) \right\} + e^{\frac{2\lambda}{\mu}} \Phi \left\{ -\sqrt{\frac{\lambda}{x}} \left(\frac{x}{\mu} + 1 \right) \right\} \quad (x > 0)$$

となる。なお、地震の発生確率の計算では、 $\lambda = \mu/\alpha^2$ とし、このときの確率分布を BPT (Brownian Passage Time) 分布と呼んでいる。地震の発生間隔が BPT 分布に従うとき、平均 μ 、分散 $(\alpha\mu)^2$ となり、平均発生間隔 μ からのばらつき具合を α であらわしている。地震発生確率は下式の (3.2) を (3.1) に代入して求める。

$$P_0 = 1$$

$$(3.2) \quad P_1 = \frac{F_X(t_0 + \tau) - F_X(t_0)}{1 - F_X(t_0)},$$

$$P_n = \frac{1}{1 - F_X(t_0)} \int_{x=t_0}^{t_0+\tau} f_X(x) F_Y(t_0 + \tau - x) dx \quad (n = 2, 3, \dots)$$

ここで、 $X \sim IG(\mu, \lambda)$ 、 $Y/(n-1) \sim IG(\mu, (n-1)\lambda)$ である（詳しくは [1] を参照）。

4. 揺れの大きさに関する回帰モデルについて

ある地震の揺れの大きさ Y として、地震波の最大速度を取る場合、 Y を予測する式としては、過去の地震のデータから作成された、地震の規模（マグニチュード） m 、震源の深さ d 、断層から地図上の評価地点までの最短距離 r と Y の回帰式（距離減衰式）

$$(4.1) \quad \ln Y = \mu(m, d, r) + \epsilon$$

を用いる。ここで、 ϵ は平均 0、分散 σ^2 の正規分布に従う。 σ^2 は適当に推定された値を用いる。このとき、 $\ln Y$ は平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布に従う。このとき、 Y は対数正規分布に従う（詳しくは [2] を参照）。

一方、揺れの大きさとして計測震度を用いる場合は、計測震度を I とすると、(4.1) 式の $\ln Y$ を用いた回帰式で予測する。回帰式としては、 $\ln Y$ の 1 次式

$$I = \alpha_1 + \beta_1 \ln Y + \epsilon_1$$

または 2 次式

$$I = \alpha_2 + \beta_2 \ln Y + \gamma_2 (\ln Y)^2 + \epsilon_2$$

を用いる（回帰係数の値、及び誤差項の分散の値については [3], [4] を参照）。 Y を既知の定数とした場合は、 I の確率を容易に求めることができるが、 Y を未知の確率変数とした場合は $\ln Y$ と I を求める回帰式を同時に考慮する必要がある、特に I を求める回帰式が $\ln Y$ の 2 次式のときは複雑になる。

5. 確率論的地震動予測地図での各地点の評価について

確率論的地震動予測地図では、日本列島を約 1km のメッシュに分割して、それぞれの地点での評価結果を地図上に表示している。

地図上のある地点について、ある基準日からの評価期間 τ に、地震による揺れの大きさが少なくとも 1 回 y を超える確率 $P(Y > y; \tau)$ を求める。このとき、1 回も y を超えない確率は $P(Y \leq y; \tau)$ となり、

$$(5.1) \quad P(Y > y; \tau) = 1 - P(Y \leq y; \tau)$$

となる。以下、 $P(Y \leq y; \tau)$ を求めることを考える。

いま、日本に影響を及ぼすと考えられる地震を $E_1, E_2, \dots, E_n$ とし、それぞれ独立に発生すると仮定する。ある基準日からの評価期間 τ に、 k 番目の地震による揺れの大きさが 1 回も y を越えない確率を $P(Y_k \leq y; \tau)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) とすると、

$$(5.2) \quad P(Y \leq y; \tau) = \prod_{k=1}^n P(Y_k \leq y; \tau)$$

となる。 k 番目の地震について、いま、最新活動時期（ k 番目の地震が最後に起きた時期）を起点（時刻 0）とする。ある基準日までの経過年を t_{0k} とし、 t_{0k} から $t_{0k} + \tau$ までの期間 τ にこの地震の発生する確率について考える。時刻 t までに、地震の起こる回数を $N(t)$ とすると、 $N(t_{0k}) = 0$ である。 t_{0k} から $t_{0k} + \tau$ までにこの地震の発生する回数を N_k とし、 N_k 回の地震のそれぞれの揺れの大きさを $Y_{k1}, Y_{k2}, \dots, Y_{kN_k}$ とする。このとき、

$$Y_k = \begin{cases} 0 & (N_k = 0) \\ \max_{1 \leq i \leq N_k} Y_{ki} & (N_k = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

である。これを (5.2) に適用して、

$$P(Y_k \leq y; \tau) = \sum_{l=0}^{\infty} \{P(Y_{k1} \leq y)\}^l P(N_k = l) \quad (k = 1, \dots, n).$$

従って、 k 番目の地震が t_{0k} から $t_{0k} + \tau$ までの間に発生する回数の確率分布と、 k 番目の地震が発生したときの揺れの大きさの確率分布を求めれば、 $P(Y_k \leq y; \tau)$ を求めることができる。これをすべての地震について行い、 $P(Y_k \leq y; \tau)$ ($k = 1, \dots, n$) を (5.2) に代入して、 $P(Y \leq y; \tau)$ を求め、これを (5.1) に代入して、 $P(Y > y; \tau)$ を求める。これをすべてのメッシュについて行う。

$\alpha = P(Y > y; \tau)$ としたとき、 α を超過確率と呼んでいる。また、 y と α の関係を曲線のグラフで表したものをハザードカーブと呼んでいる。確率論的地震動予測地図では、地

図上のすべての評価地点についてハザードカーブを求め、揺れの大きさ y を固定したときの超過確率 α や、逆に超過確率 α を固定したときの揺れの大きさ y を地図上に表示している。

6. おわりに

文部科学省に設置された地震調査研究推進本部地震調査委員会では、平成17年3月23日に「全国を概観した地震動予測地図」を公表した ([5])。確率論的地震動予測地図は、基準日を更新したものが毎年公表されており、最新版は基準日を2008年1月1日としたものである。防災科学技術研究所では、この作成に資するため平成13年4月より、特定プロジェクト「地震動予測地図作成手法の研究」を行い、その成果を研究資料等で公表した (例えば [6])。特に、作成された地図や作成に用いたデータなどは、「地震ハザードステーション J-SHIS (Japan Seismic Hazard Information Station)」として、インターネットで公開している ([7])。

参考文献

- [1] 河合伸一 (2006) 確率論的地震動予測地図の作成手法について, 京都大学数理解析研究所講究録, No. 1506, pp. 197-201.
- [2] 司 宏俊, 翠川三郎 (1999) 断層タイプ及び地盤条件を考慮した最大加速度・最大速度の距離減衰式, 日本建築学会構造系論文集, No. 523, pp.63-70.
- [3] 翠川三郎, 藤本一雄, 村松郁栄 (1999) 計測震度と旧気象庁震度および地震動強さの指標との関係, 地域安全学会論文集, Vol. 1, pp.51-56.
- [4] 藤本一雄, 翠川三郎 (2005) 近年の強震記録に基づく地震動強さ指標による計測震度推定法, 地域安全学会論文集, Vol. 7, pp.241-246.
- [5] 地震調査研究推進本部地震調査委員会 (2006) 「全国を概観した地震動予測地図」報告書, http://www.jishin.go.jp/main/chousa/06_yosokuchizu/index.htm
- [6] 藤原広行, 河合伸一ほか (2005) 全国を対象とした確率論的地震動予測地図作成手法の検討, 防災科学技術研究所研究資料第 275 号.
- [7] 地震ハザードステーション J-SHIS, <http://www.j-shis.bosai.go.jp/> .