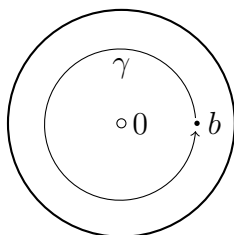


不確定特異接続のモジュライ空間と 一般モノドロミー保存変形

稲場 道明 (京都大学)

1 穴あき円板上の正則接続

$\Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ を単位円板とする．穴あき円板 $\Delta \setminus \{0\}$ 上の正則ベクトル束 E と正則接続 ∇ の対 (E, ∇) のことを単に接続と呼ぶことにする．これは $\Delta \setminus \{0\}$ の基本群 $\pi_1(\Delta \setminus \{0\}, b)$ の表現に対応する．



$$\left\{ (E, \nabla) : \begin{array}{l} E: \text{rank } r \text{ holomorphic vector bundle on } \Delta \setminus \{0\} \\ \nabla: E \longrightarrow E \otimes \Omega_{\Delta \setminus \{0\}}: \text{holomorphic connection} \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \\ \left\{ \rho: \pi_1(\Delta \setminus \{0\}, b) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow GL_r(\mathbb{C}) : \text{representation} \right\} / \sim$$

原点 0 のまわりを 1 周回る loop γ は、 $\pi_1(\Delta \setminus \{0\}, b)$ の生成元となる． $\Delta \setminus \{0\}$ 上の正則接続 (E, ∇) に対し、対応する表現 ρ は行列 $\rho(\gamma)$ で決まる．これを (E, ∇) のモノドロミー行列という．

上の対応における (E, ∇) は、原点での挙動を考えていない． (E, ∇) を原点で有理型となるように拡張するとどうなるかを、以下考えていこう．

2 単位円板上の確定特異接続

$\Delta \setminus \{0\}$ 上の正則接続 (E, ∇) を原点 0 で高々 1 位の極を持つ有理型接続に拡張することを考える．この場合は、Deligne による Riemann-Hilbert 対応の最

も簡単な局所版として、以下の対応関係で書ける。

$$\left\{ (E, \nabla) \left| \begin{array}{l} E: \text{rank } r \text{ holomorphic vector bundle on } \Delta \\ \nabla: E \longrightarrow E \otimes \Omega_{\Delta}(\{0\}): \text{meromorphic connection} \\ 0 \leq \text{Re}(\lambda) < 1 \text{ for } \forall \lambda: \text{eigenvalue of } \text{res}_{z=0}(\nabla) \end{array} \right. \right\} \\ \leftrightarrow \\ \left\{ \rho: \pi_1(\Delta \setminus \{0\}, b) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow GL_r(\mathbb{C}) : \text{representation} \right\} / \sim$$

以下は、上の対応の最も典型的な例である。

$$d - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_r \end{pmatrix} \frac{dz}{z} \leftrightarrow \rho(\gamma) = \begin{pmatrix} e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda_r} \end{pmatrix} \\ \left(\text{この場合 } \begin{pmatrix} z^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & z^{\lambda_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 \log z} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_r \log z} \end{pmatrix} \text{ が解の基本行列} \right)$$

以下の例も (典型的な) 補足例として挙げる。

$$d - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{dz}{z} \leftrightarrow \rho(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 2\pi\sqrt{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \left(\text{この場合 } \begin{pmatrix} 1 & \log z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ が解の基本行列} \right)$$

3 不確定特異接続

定義 3.1 Δ 上の有理型接続 $\nabla: E \longrightarrow E \otimes \Omega_{\Delta}(m\{0\})$ 極の位数 m が 2 以上のとき、この接続 (E, ∇) を不確定特異接続 (irregular singular connection) という。

定義 3.1 の記号のもとで、 $E \cong \mathcal{O}_{\Delta}^{\oplus r}$ となり、正則関数の行列 $A(z)$ を用いて $\nabla = d + A(z)dz/z^m$ と書ける。

定義 3.2 上の状況で、 $A(0)$ が r 個の相異なる固有値を持つとき、接続 ∇ は $z=0$ で generic unramified であるという。

不確定特異接続を原点で完備化したものに対し, Hukuhara-Turrittin の定理というある種の分類定理がある. これを generic unramified の場合に述べると以下ようになる.

定理 3.1 (Hukuhara-Turrittin (generic unramified case)) (E, ∇) は単位円板 Δ 上の不確定特異接続で, $z = 0$ で generic unramified とする. このとき, (E, ∇) の原点での完備化 $(E, \nabla) \otimes \mathbb{C}[[z]]$ は以下と同型になる.

$$\Rightarrow (E, \nabla) \otimes \mathbb{C}[[z]] \xrightarrow[\sim]{\exists P(z)} (\mathbb{C}[[z]]^{\oplus r}, d + \Lambda(z)),$$

$$\text{where } \Lambda(z) = \begin{pmatrix} \lambda_1(z) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r(z) \end{pmatrix}, \quad \lambda_k(z) \in \sum_{l=0}^{m-1} \mathbb{C} z^l dz / z^m$$

$$k = 1, \dots, r.$$

ここで $\lambda := (\lambda_1(z), \dots, \lambda_r(z))$ を $z = 0$ における ∇ の exponents という.

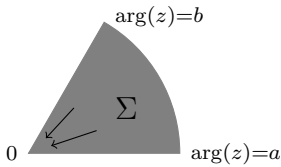
注意 3.1

- (1) 素朴な 1 周回るモノドロミー $\ker(\nabla|_{\Delta \setminus \{0\}})$ や exponents λ だけでは, 有理型不確定特異接続 ∇ を復元することはできない.
- (2) 不確定特異接続 (E, ∇) を復元するには, Stokes data と呼ばれるものが必要となる. 以下では, Stokes data がどのように導出されるかを見よう.

4 Stokes data の導出

穴あき単位円板の中で扇型の領域 (sector) を考える :

$$\Sigma = \{z \in \Delta \setminus \{0\} \mid a < \arg(z) < b\}$$



$(\mathcal{O}_\Delta^{\oplus r}, \nabla)$ が Δ 上の generic unramified connection のとき, その解 $\ker \nabla|_{\Delta \setminus \{0\}}$ は $\Delta \setminus \{0\}$ の各点の近傍で r 次元のベクトル空間となる. その基底を並べた行列を ∇ の fundamental solution という. ∇ の基本解として漸近性質を持つものが取れるという次の定理が出発点となる.

定理 4.1 (証明は Wasow のテキスト ([9]) にある) (E, ∇) は $z = 0$ のみで極を持つ Δ 上の有理型接続で, 定理 3.1 の formal な同型 $P(z)$ を持つとする. このとき, $\Delta \setminus \{0\}$ の各点を含む sector Σ とその上の ∇ の基本解 $Y_\Sigma(z)$ が存在して, 以下の漸近性質を満たす.

$$Y_\Sigma(z) \exp \left(\int \Lambda(z) \right) \underset{\text{asymototic}}{\sim} P(z) \quad (\text{as } z \rightarrow 0 \text{ on } \Sigma) \quad (*)$$

$$\left(\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lim_{z \rightarrow 0, z \in \Sigma} \frac{1}{|z|^N} \left\| Y_\Sigma(z) \exp \left(\int \Lambda(z) \right) - \sum_{j=0}^N P_j z^j \right\| = 0 \right) \\ \text{for any } N > 0, \text{ where } P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j z^j.$$

注意 4.1 (1) 上の定理 4.1 (あるいは定理 3.1) における $P(z)$ は $\mathbb{C}[[z]]$ に係数をもつ行列で表せるが, 通常は発散級数 (収束半径が 0) となる.

(2) Theorem 3.1. の右辺に現れる接続 $d + \Lambda(z)$ を (形式) 標準接続と呼ぼう. この標準接続は

$$\exp \left(- \int \Lambda(z) \right) = \begin{pmatrix} e^{-\int \lambda_1(z)} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\int \lambda_r(z)} \end{pmatrix}$$

を基本解に持つ. $e^{-\int \lambda_1(z)}, \dots, e^{-\int \lambda_r(z)}$ は z の角 $\arg(z)$ に応じて $z \rightarrow 0$ の時の増大度が変化する. すなわち sector Σ の取り方によって $\exp(-\int \Lambda(z))$ の漸近性質が変わる.

(3) 定理 4.1 の漸近関係式 (*) の左辺 $Y_\Sigma(z) \exp(\int \Lambda(z))$ は, ∇ の基本解 $Y_\Sigma(z)$ と, 標準接続 $d + \Lambda(z)$ の基本解 $\exp(-\int \Lambda(z))$ との ‘比較’ を表している. 漸近関係式 (*) は, この解の比較が sector Σ 上では有界となることを言っている.

$\Delta \setminus \{0\}$ の別の sector Σ' を取り, ∇ の Σ' 上の基本解 $Y_{\Sigma'}(z)$ で, 漸近性質

$$Y_{\Sigma'}(z) \exp \left(\int \Lambda(z) \right) \sim P(z) \quad (\text{as } z \rightarrow 0 \text{ on } \Sigma')$$

を満たすものを取る. このとき, $\Sigma \cap \Sigma'$ 上で

$$Y_{\Sigma'}(z) = Y_\Sigma(z) C_{\Sigma, \Sigma'} \quad (\exists C_{\Sigma, \Sigma'} \text{ constant in } z)$$

と書ける.

$C_{\Sigma, \Sigma'}$ を Stokes matrix と呼ぶことにする. $\{C_{\Sigma, \Sigma'}\}_{\Sigma, \Sigma'}$ は $\ker \nabla|_{\Delta \setminus \{0\}}$ の貼り合わせデータとなるが, 貼り合わせを定める ∇ の基本解 $Y_\Sigma(z)$ が定理 4.1 の

漸近性質 (*) を満たすという制約がある．この制約付きの貼り合わせデータ $\{C_{\Sigma, \Sigma'}\}_{\Sigma, \Sigma'}$ を Stokes data とみなすことにする．

不確定特異接続の局所理論の代表的な定理として, Deligne, Malgrange, Sibuya の定理がある．これは, (局所的な) 不確定特異有理型接続と, Stokes data との間の一対一対応を与える定理である．人によって意見が違うかもしれないが, Babbitt と Varadarajan によるテキスト [1] に読みやすくまとめられていると思う．標準接続との formal な同型を踏まえて $\{C_{\Sigma, \Sigma'}\}$ を Stokes data と呼んだが, 実際定式化するには, より正確な考察を要する．[1, Theorem 4.5.1] では, 貼り合わせデータ $C_{\Sigma, \Sigma'}$ を標準接続の underlying bundle の上に移して考える．また, [1, Theorem 4.7.3] では, Stokes line に沿った $\ker \nabla|_{\Delta \setminus \{0\}}$ の filtration を用いて Stokes data の定式化をしている．

5 局所一般モノドロミー保存変形

接続の族 $\{(E, \nabla)\}$ に対し, 対応する Stokes matrix を一定に取れるとき, 一般モノドロミー保存変形と呼ぶことにしよう．射影直線上の自明束上の generic unramified connection の一般モノドロミー保存変形の定める微分方程式を記述したのが, Jimbo, Miwa, Ueno の結果 ([8]) であった．これは大域的に記述した完成度の高いものだが, ここでは簡単のため, 局所版の形で述べておく．

定理 5.1 (Jimbo, Miwa and Ueno (local version)) Δ 上の generic unramified connection の族 $\{(E, \nabla)\}$ に対し, 以下は同値．

- (1) Stokes matrix $C_{\Sigma, \Sigma'}$ たちを, (E, ∇) の moduli parameter に関して (局所) 定数に取れる．
- (2) 接続 (E, ∇) の族を (局所的に) 可積分接続

$$\nabla^{flat} = d + A(z, t) \frac{dz}{z^m} + \sum B_i(z, t) \frac{dt_i}{z^{m-1}}$$

に拡張できる (ただし $t = (t_1, \dots, t_N)$ は moduli parameters)．

注意 5.1 上の定理 5.1 は簡潔に述べるために細かい設定を省略して書いているが, 詳細は [7] の中で述べている．

定義 5.1 Δ 上の有理型接続 (E, ∇) の族が定理 5.1 の同値条件を満たすとき, 局所モノドロミー保存変形 (local generalized isomonodromic deformation) と呼ぶことにする．

6 分岐有理型接続

generic unramified connection に対しては, Jimbo, Miwa, Ueno による一般モノドロミー保存変形の記述が明快に記述され, 後で述べるモジュライ空間の上で定式化することも比較的容易である. 一方, generic unramified ではない接続の典型的なものとして, ramified connection (分岐接続) がある. Hukuhara-Turrittin の定理 (定理 3.1) や Malgrange-Sibuya の定理は, 分岐接続をも含む形で確立しているので, 一般モノドロミー保存変形は分岐接続の場合も同様に考えられる. ただ, その記述が明快に与えられていたとも言い切れないと思うので, 以下にその流れを述べる.

$\Delta_z = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $\Delta_w = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$ を単位円板とし, z, w がそれぞれの座標とする.

$$p: \Delta_w \ni w \mapsto w^r = z \in \Delta_z$$

は解析的な分岐被覆である.

分岐接続 (ramified connection) の定義を以下で与える.

定義 6.1 Δ_z 上の有理型接続 (E, ∇) が以下の同型を持つとき, ∇ は $z = 0$ で generic ν -ramified であるという.

$$(E, \nabla) \otimes \mathbb{C}[[z]] \xrightarrow[\sim]{\exists} (\mathbb{C}[[w]], \nabla_{\nu(w)}) \quad (\#)$$

ただし $\nabla_{\nu(w)}$ は

$$\begin{array}{ccc} \nabla_{\nu(w)}: & \mathbb{C}[[w]] & \longrightarrow & \mathbb{C}[[w]] \otimes dz/z^m \\ & \Psi & & \Psi \\ & f(w) & \mapsto & df(w) + f(w)\nu(w) \end{array}$$

で定まる接続で,

$$\begin{aligned} \nu(w) &= \nu_0(z) + \nu_1(z)w + \cdots + \nu_{r-1}(z)w^{r-1}, \\ \nu_0(z) &\in (\mathbb{C} + \mathbb{C}z + \cdots + \mathbb{C}z^{m-1})dz/z^m, \\ \nu_1(z) &\in (\mathbb{C}^\times + \mathbb{C}z + \cdots + \mathbb{C}z^{m-2})dz/z^m, \\ \nu_2(z), \dots, \nu_{r-1}(z) &\in (\mathbb{C} + \mathbb{C}z + \cdots + \mathbb{C}z^{m-2})dz/z^m. \end{aligned}$$

注意 6.1 上の定義において, $\nu_1(z)$ の先頭項の係数は 0 ではない.

(#) で与えられた同型 $(E, \nabla) \otimes \mathbb{C}[[z]] \xrightarrow{\sim} (\mathbb{C}[[w]], \nabla_{\nu(w)})$ は,

$$\varpi: p^*(E, \nabla) \otimes_{\mathcal{O}_{\Delta_w}} \mathbb{C}[[w]] \longrightarrow \bigoplus_{\sigma \in \text{Gal}(\Delta_w/\Delta_z)} (\mathbb{C}[[w]], \nabla_{\nu(w)})^\sigma$$

を誘導する． ϖ は generically isomorphic なので，ベクトル束の elementary transform でとらえることができる．すなわち， $p^*(E)$ に elementary transform を施したベクトル束を E' とすれば，formal な同型

$$(E', \nabla') \otimes \mathbb{C}[[w]] \cong \bigoplus_{\sigma \in \text{Gal}(\Delta_w / \Delta_z)} (\mathbb{C}[[w]], \nabla_{\nu(w)})^\sigma \otimes (\mathcal{O}_{\Delta_w}, \nabla_{-\nu_0(z)})$$

を持つような Δ_w 上の有理型接続 ∇' が $p^*(\nabla)$ から誘導される．しかも (E', ∇') は Δ_w 上の generic unramified connection となる．この対応 $(E, \nabla) \mapsto (E', \nabla')$ は，実質的に shearing transformation として知られていた．

(実際の (E', ∇') の構成は以下の様にする．合成

$$\varphi: p^*(E) \longrightarrow p^*(E)|_{w^{r-1}=0} \xrightarrow{\varpi|_{w^{r-1}=0}} \text{Im}(\varpi|_{w^{r-1}=0})$$

を考え， $(E', \nabla') := (\ker \varphi, p^*(\nabla)|_{\ker \varphi}) \otimes (\mathcal{O}_{\Delta_w}, \nabla_{-\nu_0(z)})$. とおく．)

命題 6.1 Δ_z 上の有理型接続の族 $\{(E, \nabla)\}$ について，以下は同値．

- (i) (E, ∇) から誘導される Δ_w 上の接続 (E', ∇') の族が (局所的に) 可積分接続

$$\nabla^{flat} = d + A'(w, t) \frac{dw}{w^{mr-r}} + \sum B_i(w, t) \frac{dt_i}{w^{mr-r-1}}$$

に拡張できる (ただし $t = (t_1, \dots, t_N)$ は (E, ∇) の moduli parameter とする).

- (ii) Δ_z 上の接続 (E, ∇) の族が可積分接続

$$\nabla^{flat} = d + A(z, t) \frac{dz}{z^m} + \sum B_i(z, t) \frac{dt_i}{z^{m-1}}$$

に拡張できる (ただし $t = (t_1, \dots, t_N)$ は moduli parameter).

定理 5.1 を踏まえ，上の同値条件をみたすとき，分岐接続 (E, ∇) の族を局所一般モノドロミー保存変形と呼ぶことにする．

7 目的と先行結果

ここまで一般モノドロミー保存変形を局所解析的に導入して説明した．実際に一般モノドロミー保存変形を確立した Jimbo, Miwa, Ueno による結果 ([8]) 射影直線上の自明束上で大域的に構成されていた．これを一般種数に拡張す

る場合、(代数幾何的な) モジュライ空間を用いて定式化するのが自然な流れとなる。

具体論を述べる前に、先行研究 (一つの視点から見た代表的結果) を挙げる。

$\mathbb{P}^1$ 上の自明束上の不確定接続のモジュライ空間の構成とその上の一般モノドロミー保存変形の構成については、

- 不分岐接続の場合の P. Boalch による結果 ([2]),
- 分岐接続の場合の C. Bremer and D. Sage による結果 ([3])

がある。これらは、大域的にはモジュライ空間全体を覆ってはいないが、一方で不確定特異点に関してはより精密に扱っている。

一般種数の場合に拡張すると同時に、大域的な問題を解決できたのが確定特異点の場合で、

- I-, K. Iwasaki and M.-H. Saito ([4], [6])

において、モノドロミー保存変形に一定の満足のある説明ができたと思う。一般不分岐不確定接続の場合は

- I-, M.-H. Saito ([5])

においてのモジュライ空間と一般モノドロミー保存変形の定式化を行っている。

8 大域的な設定とモジュライ空間

接続のモジュライ空間を定式化するため、以下の設定を固定して考える。

- C : smooth projective curve over $\mathbb{C}$ of genus g
- $D = D_{\text{reg}} \sqcup D_{\text{un}} \sqcup D_{\text{ram}}$: effective divisor on C .
 D_{reg} is reduced, $D_{\text{un}} = \sum_{x \in D_{\text{un}}} m_x x$, $D_{\text{ram}} = \sum_{x \in D_{\text{ram}}} m_x x$ with $m_x \geq 2$ for $x \in D_{\text{un}} \cup D_{\text{ram}}$.
- $z \in \mathcal{O}_{C,x}$: uniformizing parameter at $x \in D_{\text{ram}}$
- $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathcal{O}_{D_{\text{reg}}}^r$: regular singular exponent
- $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r) \in \Omega_C^1(D)|_{D_{\text{un}}}^r$: generic unramified exponent
- $\nu = \nu_0(z) + \nu_1(z)w + \dots + \nu_{r-1}(z)w^{r-1}$: ramified exponent

ここで、次で与えられる d は整数であると仮定する.

$$d := - \sum_{x \in D_{\text{reg}}} \sum_{k=1}^r \lambda_k |x| - \sum_{x \in D_{\text{un}}} \sum_{k=1}^r \text{res}_x(\mu_k |_{m_x x}) - \sum_{x \in D_{\text{ram}}} (r \text{res}_x(\nu_0(z)) + \frac{r-1}{2}) \quad (\text{FR})$$

以下の接続 (E, ∇) のモジュライ空間を考える.

$$M_{C,D}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) = \left\{ (E, \nabla) \left| \begin{array}{l} E: \text{algebraic vector bundle on } C \text{ of rank } r, \\ \nabla: E \longrightarrow E \otimes \Omega_C^1(D): \text{rational connection,} \\ \text{the exponents of } \nabla \text{ along } D_{\text{reg}}, D_{\text{un}} \\ \text{and } D_{\text{ram}} \text{ are } \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \text{ and } \boldsymbol{\nu}, \text{ respectively} \end{array} \right. \right\}$$

注意 8.1 (1) 実際には確定特異点 (D_{reg}) において (E, ∇) の放物構造と呼ばれる付加構造込みでモジュライ空間を定式化して考える.

(2) 分岐不確定特異点 (D_{ram}) において, generic ν -ramified という条件を formal な同型 $(E, \nabla) \otimes \mathbb{C}[[z]] \cong (\mathbb{C}[[w]], \nabla_\nu)$ で考えると, モジュライ空間の構成や変形理論を展開する際に都合が悪い. そこで, 実際には D_{ram} への制限 $(E, \nabla)|_{D_{\text{ram}}}$ の情報のみを用いて, モジュライ空間の定式化を行う (詳しくは [7]).

このモジュライ空間について, 以下が示せる ([7]).

定理 8.1 (i) $M_{C,D}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu})$ は, $2r^2(g(C) - 1) + 2 + r(r - 1) \deg D$ 次元の準射影非特異代数多様体である.

(ii) $M_{C,D}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu})$ 上には標準的な symplectic 形式 $\omega_{M_{C,D}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu})}$ が存在する.

9 大域的な一般モノドロミー保存変形

大域的な一般モノドロミー保存変形を考えるために, 接続のモジュライ空間の族を考えることにする. まず

$$\mathcal{T}_{\boldsymbol{\lambda}} := \left\{ (C, D = D_{\text{reg}} \sqcup D_{\text{un}} \sqcup D_{\text{ram}}, \bar{z}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}); \begin{array}{l} \bar{z} \in \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^{m_x+1} \text{ for } x \in D_{\text{ram}} \\ \boldsymbol{\mu}: \text{unramified exponent along } D_{\text{un}} \\ \boldsymbol{\nu}: \text{ramified exponent along } D_{\text{ram}} \\ \text{the residue parts of } \boldsymbol{\mu} \text{ and } \boldsymbol{\nu} \text{ are fixed} \\ \text{so that (FR) is satisfied} \end{array} \right\}$$

とおき、これを独立変数の空間とみなすことにする。

適当な étale 射 $\tilde{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{T}_\lambda$ を取れば、universal family $(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \rightarrow \tilde{\mathcal{T}}$ が存在する。 $\tilde{\mathcal{T}}$ 上には接続のモジュライ空間の族

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(\lambda) := \coprod_{(C, D, \bar{z}, \mu, \nu) \in \tilde{\mathcal{T}}} M_{C, D}(\lambda, \mu, \nu) \xrightarrow{\pi_{\tilde{\mathcal{T}}}} \tilde{\mathcal{T}}$$

が乗り、 $\pi_{\tilde{\mathcal{T}}}$ は smooth morphism となる。 $\pi_{\tilde{\mathcal{T}}}$ の微分を取ると、

$$d\pi_{\tilde{\mathcal{T}}}: T_{\mathcal{M}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(\lambda)} \rightarrow \pi_{\tilde{\mathcal{T}}}^* T_{\tilde{\mathcal{T}}}$$

は接束の間の全射となる。

定理 9.1 $d\pi_{\tilde{\mathcal{T}}}$ の splitting $\Phi: \pi_{\tilde{\mathcal{T}}}^* T_{\tilde{\mathcal{T}}} \rightarrow T_{\mathcal{M}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(\lambda)}$ (すなわち $d\pi_{\tilde{\mathcal{T}}} \circ \Phi = \text{id}_{T_{\tilde{\mathcal{T}}}}$) であって、部分束 $\text{Im}(\Phi) \subset T_{\mathcal{M}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(\lambda)}$ が可積分条件

$$[\text{Im } \Phi, \text{Im } \Phi] \subset \text{Im } \Phi$$

を満たすものが存在し、 $\text{Im } \Phi$ の定める $\mathcal{M}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(\lambda)$ 上の foliation の leaf が一般モノドロミー保存変形となる。

定理 9.1 における Φ を構成するアイディアを大雑把に述べよう (詳しくは [7])。

Zariski 開集合 $\mathcal{T}' \subset \tilde{\mathcal{T}}$ 上の局所的なベクトル場 $\xi \in T_{\tilde{\mathcal{T}}}|\mathcal{T}'$ を取る。ベクトル場は次の scheme の射に対応する。

$$\xi \Leftrightarrow I_\xi: \mathcal{T}'[\xi] := \mathcal{T}' \times \text{Spec } \mathbb{C}[\epsilon]/(\epsilon^2) \rightarrow \mathcal{T}'$$

適当な étale 射 $\mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(\lambda)$ を取れば、 $\mathcal{C}_{\mathcal{M}'}$ 上の universal family $(\tilde{E}, \tilde{\nabla})$ が存在する。

射 I_ξ により捻ったファイバー積 $\mathcal{M}'[\xi] := \mathcal{M}' \times_{\tilde{\mathcal{T}}} \mathcal{T}'[\xi]$, $\mathcal{C}_{\mathcal{M}'[\xi]} := \mathcal{C} \times_{\tilde{\mathcal{T}}} \mathcal{M}'[\xi]$ を考える。

次の命題が本質的となる。

命題 9.1 以下を満たす $(\tilde{E}, \tilde{\nabla})$ の horizontal lift と呼ばれる) 対 $(\mathcal{E}^\xi, \nabla^\xi)$ が同型を除いて一意的に存在する：

- $\mathcal{E}^\xi$ は $\mathcal{C}_{\mathcal{M}'[\xi]}$ 上のベクトル束
- $\nabla^\xi: \mathcal{E}^\xi \rightarrow \mathcal{E}^\xi \otimes \Omega_{\mathcal{C}_{\mathcal{M}'[\xi]}/\mathcal{M}'}^1(\tilde{D}_{\mathcal{M}'[\xi]})$: は ‘可積分接続’
- $(\mathcal{E}^\xi, \nabla^\xi) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{M}'}(\epsilon) \cong (\tilde{E}, \tilde{\nabla})$

命題 9.1 の $(\mathcal{E}^\xi, \nabla^\xi)$ は射 $\mathcal{M}'[\xi] \xrightarrow{I_{\Phi(\xi)}} \mathcal{M}'$ を誘導し、この射は目的のベクトル場 $\Phi(\xi) \in T_{\mathcal{M}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(\lambda)}$ を定める。

参考文献

- [1] D. G. Babbitt and V. S. Varadarajan, *Local moduli for meromorphic differential equations*, Astérisque No. 169–170 (1989), 217pp.
- [2] P. Boalch, *Symplectic manifolds and isomonodromic deformations*, Adv. Math. 163, no. 2 (2001), 137–205.
- [3] C. Bremer and D. Sage, *Isomonodromic deformations of connections with singularities of parahoric formal type*, Comm. Math. Phys. 313 (2012), no. 1, 175–208.
- [4] M.-a. Inaba, K. Iwasaki and M.-H. Saito, *Moduli of stable parabolic connections, Riemann-Hilbert correspondence and geometry of Painlevé equation of type VI. I*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 42 (2006), no. 4, 987–1089.
- [5] M.-a. Inaba and M.-H. Saito, *Moduli of unramified irregular singular parabolic connections on a smooth projective curve*, Kyoto J. Math. 53 (2013), no. 2, 433–482.
- [6] M.-a. Inaba, *Moduli of parabolic connections on curves and the Riemann-Hilbert correspondence*, J. Algebraic Geom. 22 (2013), no. 3, 407–480.
- [7] M.-a. Inaba, *Moduli space of factorized ramified connections and generalized isomonodromic deformation*, arXiv:2108.09667.
- [8] M. Jimbo, T. Miwa and K. Ueno, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. I. General theory and τ -function*, Phys. D 2 (1981), no. 2, 306–352.
- [9] W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Pure and Applied Mathematics, Vol. XIV Interscience Publishers, New York, 1965.