

Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程式の楕円ソリトン解

若松 大誠 (Taisei Wakamatsu)¹, 丸野 健一 (Ken-ichi Maruno)², Shangshuai Li³,
Da-jun Zhang³

1. 早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 (School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University)

2. 早稲田大学 理工学術院 (Faculty of Science and Engineering, Waseda University)

3. Department of Mathematics, Shanghai University

1 はじめに

浅水波を記述する多ソリトン解を持つ可積分なソリトン方程式として KdV 方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.1)$$

がよく知られている [1, 2]. また, KdV 方程式を空間方向へ 2 次元拡張した方程式として KP 方程式

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + u_{yy} = 0 \quad (1.2)$$

も知られており, 浅水波やプラズマ中の波動などを扱う際に登場する [3, 4]. KdV 方程式 (1.1) や KP 方程式 (1.2) は変数変換 $u = 2(\log \tau)_{xx}$ により, それぞれ

$$D_x(D_t + D_x^3)\tau \cdot \tau = 0 \quad (1.3)$$

$$(D_x(D_t + D_x^3) + D_y^2)\tau \cdot \tau = 0 \quad (1.4)$$

といった双線型形式で表され, 広田の直接法により多ソリトン解が得られる. ここで用いた D_x や D_y , D_t は D-operator と呼ばれ以下で定義される [5]:

$$D_x^m D_t^n f(x, t) \cdot g(x, t) = \frac{\partial^m}{\partial y^m} \frac{\partial^n}{\partial s^n} f(x + y, t + s) g(x - y, t - s) \Big|_{y=0, s=0} \quad (1.5)$$

ソリトンの発見以降の爆発的な研究の進展の後, KP 方程式を含む KP 階層とその簡約のソリトン方程式に関する統一的な理論として, τ 関数, 頂点作用素, 双線型恒等式, Lax 方程式, 佐藤方程式などに関するいわゆる佐藤理論が発見された [6, 7].

1974 年, Kuznetsov と Mikhaïlov は KdV 方程式の楕円ソリトン解を逆散乱法によって発見した [8]. “楕円ソリトン解” とは, Lamé type plane wave factor (Lamé type PWF) $\Phi_x(k) = \frac{\sigma(x+k)}{\sigma(x)\sigma(k)} e^{-\zeta(k)x}$ から構成される, 楕円関数で表される周期波の上を進行するソリトン解のことを指す [9]. ただし, ζ, σ は Weierstrass の ζ, σ 関数であり, 以降登場する $\wp$ も同様に Weierstrass の $\wp$ 関数とする.

最近, Nijhoff と Atkinson は Adler-Bobenko-Suris(ABS) 格子方程式の, Yoo-Kong と Nijhoff は Lattice Potential KP 方程式の楕円ソリトン解を離散 Lamé type PWF と Cauchy 行列を用いて導出した [10, 11]. これらの発見により楕円ソリトン解に再度注目が集まり, 2022 年に Li と Zhang は KdV 方程式, KP 方程式の楕円ソリトン解を双線型形式を用いて導出した [9]. そして 2023 年,

算は Darboux 変換を用いて楕円ソリトン解を再構成し, Li と Zhang が確立した枠組みを佐藤理論の観点から説明した [12]. また頂点作用素を用いた構成方法も研究が行われており, 2024 年に中屋敷は KP 階層の楕円関数解と頂点作用素を用いて楕円ソリトン解を導出した [13]. 本論文では, Li と Zhang が提案した方法を用いて KdV 方程式の KP 方程式とは異なる 2 次元拡張にあたる Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程式の楕円ソリトン解とそのロンスキアン表示を導出する.

2 準備

2.1 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程式

Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff (CBS) 方程式

$$u_z = \frac{1}{4}u_{xxy} + \frac{1}{2}(\partial_x^{-1}u_y)u_x + uu_y \quad (2.1)$$

は 1975 年に Calogero が発見した方程式で, Bogoyavlenskii と Schiff は Calogero とは異なるアプローチでこの方程式を導出した. 特に Schiff は Self-dual Yang-Mills 方程式からのリダクションでこの方程式を導出し, Bogoyavlenskii はソリトン解や Lax 形式

$$\hat{L}_z = [\hat{M}, \hat{L}] \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \hat{L} := \partial_x^2 + u \\ \hat{M} := \hat{L}\partial_y + \frac{1}{2}(\partial_x^{-1}u_y)\partial_x + \frac{3}{4}u_y \end{cases} \quad (2.3)$$

などを求めた [14–16]. また, 1998 年に兪らは trilinear 形式を用いてソリトン解を構成した [17]. その後, 2001 年に池田, 高崎は CBS 方程式を高次元化して CBS 階層を構築し, 伊達の方法を用いて N ソリトン解を導出した [18]. 他にも Lax 形式や頂点作用素について扱い, その代数構造についても議論した. また池田, 高崎は変数変換 $u = 2(\log \tau)_{xx}$ によって双線型形式

$$\begin{cases} (D_x^4 - 4D_x D_t) \tau \cdot \tau = 0 \\ (D_y D_x^3 + 2D_y D_t - 6D_z D_x) \tau \cdot \tau = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

が得られることを示した. この双線型形式に広田の直接法を用いて次の N ソリトン解が導出される:

$$\tau_N = \sum_{\{\mu_k\}_{k=1}^N \in \{0,1\}^N} \exp \left[\sum_{i=1}^N \mu_i \theta_i + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mu_i \mu_j A_{ij} \right] \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} \theta_j = k_j x + \frac{1}{4}k_j^3 t + \ell_j y + \frac{1}{4}k_j^2 \ell_j z + \theta_j^{(0)} \\ e^{A_{ij}} = \left(\frac{k_i - k_j}{k_i + k_j} \right)^2 \end{cases} \quad (2.6)$$

兪らが提案した解との違いは, θ_j に $\frac{1}{4}k_j^3 t$ があるかどうかだけである. また $N \geq 2$ のとき, $k_i = k_j$ となるような定数の取り方を行うことで, 図 2 のような V 字型ソリトン解が得られることもこの方程式の特長の 1 つとして挙げられる [19].

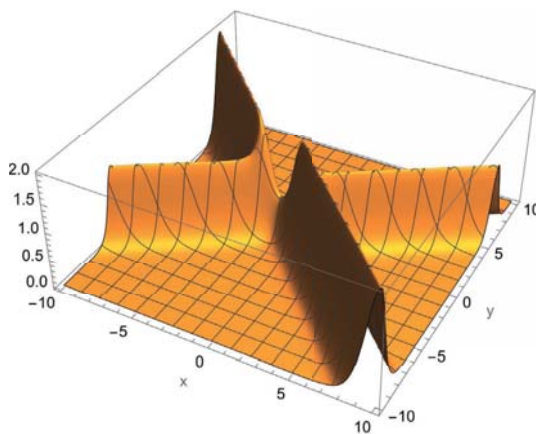


図 1: 2 ソリトン解

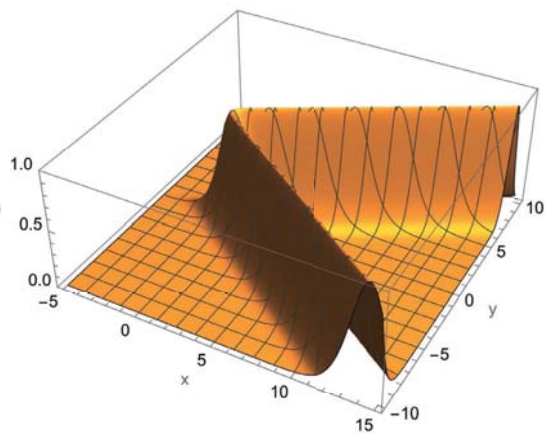


図 2: V 字型ソリトン解

($z = 0, k_1 = -1.6, k_2 = -2, \ell_1 = 2.5, \ell_2 = -2$) ($z = 0, k_1 = k_2 = -1.4, \ell_1 = 2.5, \ell_2 = -2$)

そして双線型形式 (2.4) や N ソリトン解 (2.5) から分かる通り, CBS 方程式は KdV 方程式

$$u_t = \frac{3}{2}uu_x + \frac{1}{4}u_{xxx} \quad (2.7)$$

を拡張した方程式の 1 つとして知られており, その拡張は Toroidal Lie 代数を用いて説明される [18, 20].

2.2 KdV 方程式の楕円ソリトン解

この節では主に, Li, Zhang が導出した KdV 方程式の楕円ソリトン解について紹介する [9]. KdV 方程式 (2.7) において, 変数変換

$$u = -2\wp(x) + 2(\log \tau)_{xx} \quad (2.8)$$

を考えると, 双線型形式

$$(D_x^4 - 4D_x D_t - 12\wp(x)D_x^2) \tau \cdot \tau = 0 \quad (2.9)$$

が得られる. そしてこの双線型形式より, 楕円 N ソリトン解

$$\tau_N = \sum_{\{\mu_k\}_{k=1}^N \in \{0,1\}^N} \frac{\sigma(x + 2\sum_{i=1}^N \mu_i k_i)}{\sigma(x) \prod_{j=1}^N \sigma^{\mu_j}(2k_j)} \exp \left[\sum_{i=1}^N \mu_i \theta_i(x, t) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mu_i \mu_j A_{ij} \right] \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} \theta_j = -2\zeta(k_j)x + \wp'(k_j)t + \theta_j^{(0)} \\ e^{A_{ij}} = \left(\frac{\sigma(k_i - k_j)}{\sigma(k_i + k_j)} \right)^2 \end{cases} \quad (2.11)$$

やそのロンスキアン表示

$$\tau_{\text{Wr}} = \det(\varphi, \varphi_x, \varphi_{xx}, \dots, \varphi_{(N-1)x}) \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} \varphi_j = a_j^+ \varphi_j^+ + a_j^- \varphi_j^- \\ \varphi_j^\pm = \frac{\sigma(x \pm k_j)}{\sigma(x)\sigma(\pm k_j)} e^{\mp \gamma_j} = \Phi_x(\pm k_j) e^{\mp \gamma_j} \\ \gamma_j = \zeta(k_j)x - \frac{1}{2}\wp'(k_j)t + \gamma_j^{(0)} \end{cases} \quad (2.13)$$

が導出される. ただし, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)^\top$ とし, φ_j は KdV 方程式 (2.7) の Lax 形式

$$\hat{L}_t = [\hat{M}, \hat{L}] \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} \hat{L} := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u \\ \hat{M} := \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{3}{2}u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{4}u_x \end{cases} \quad (2.15)$$

が両立条件となる線型固有値問題

$$\begin{cases} \hat{L}\varphi = \lambda\varphi \\ \varphi_t = \hat{M}\varphi \end{cases} \quad (2.16)$$

に定常解 $u = -2\wp(x)$, 固有値 $\lambda = \wp(k_j)$ を代入して得られる微分方程式の解となっている.

3 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程式の楕円ソリトン解

3.1 双線型形式と楕円 1, 2 ソリトン解

CBS 方程式 (2.1) において, 変数変換

$$u = -2\wp(x) + 2(\log \tau)_{xx} \quad (3.1)$$

を考えると, 双線型形式

$$\begin{cases} (D_x^4 - 4D_x D_t - 12\wp(x)D_x^2)\tau \cdot \tau = 0 \\ (D_y D_x^3 + 2D_y D_t - 6D_z D_x - 6\wp(x)D_y D_x)\tau \cdot \tau = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

が得られる. 第一式は KdV 方程式の双線型形式 (2.9) と同じ式であり, 直接的な計算により以下の楕円 1, 2 ソリトン解をもつことがわかる. (使用した関係式は付録 1 に.)

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 1 + \Phi_x(2k_1)e^{\theta_1} \\ \tau_2 &= 1 + \Phi_x(2k_1)e^{\theta_1} + \Phi_x(2k_2)e^{\theta_2} + a_{12} \frac{\sigma(x+2k_1+2k_2)}{\sigma(x)\sigma(2k_1)\sigma(2k_2)} e^{\theta_1+\theta_2} \\ &\begin{cases} \Phi_x(k) = \frac{\sigma(x+k)}{\sigma(x)\sigma(k)} \\ a_{ij} = \left(\frac{\sigma(k_i - k_j)}{\sigma(k_i + k_j)} \right)^2 \\ \theta_j = -2\zeta(k_j)x + \wp'(k_j)t + \ell_j y + \wp(k_j)\ell_j z + \theta_j^{(0)} \end{cases} \end{aligned}$$

また楕円 2 ソリトン解において, $k_1 = k_2$ とすると $a_{12} = 0$ となり, 図 4 のような V 字型楕円ソリトン解が得られる.

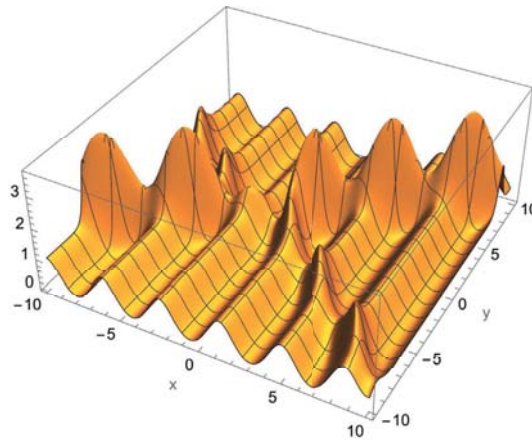
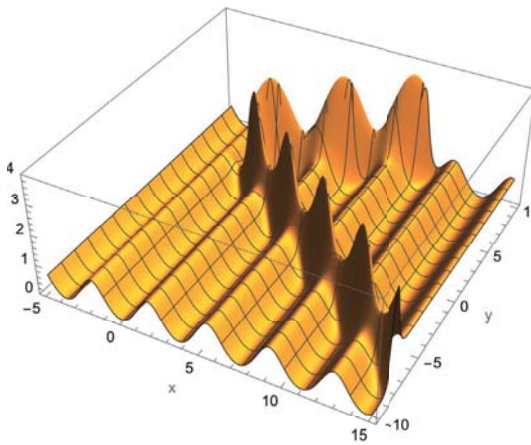
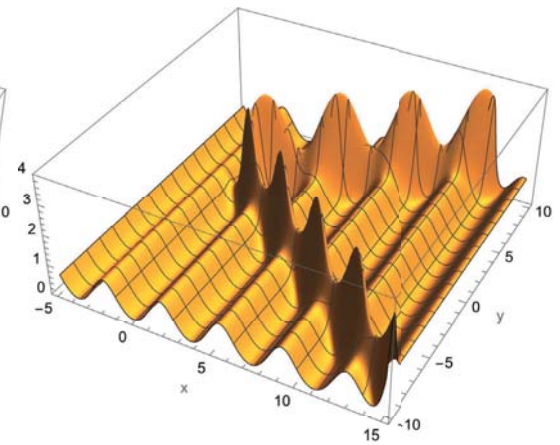


図 3: 楕円 2 ソリトン解

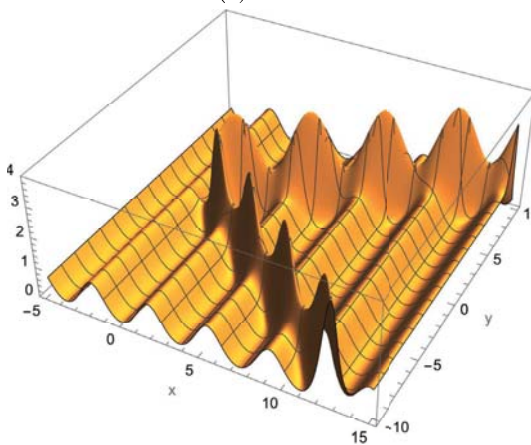
($z = 0, k_1 = 1, k_2 = 1.3, \ell_1 = 2, \ell_2 = -1$)



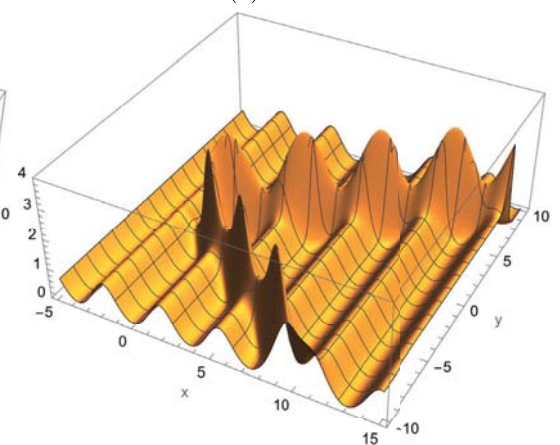
(a) $z = -4$



(b) $z = -2$



(c) $z = 0$



(d) $z = 2$

図 4: V 字型楕円ソリトン解の時間変化 ($k_1 = k_2 = 1, \ell_1 = 2.5, \ell_2 = -2$)

3.2 楕円ソリトン解のロンスキアン表示

CBS 方程式の双線型形式 (3.2) より, 楕円ソリトン解のロンスキアン表示 (以降, これをロンスキアン解という.)

$$\tau_{\text{Wr}} = \det(\varphi, \varphi_x, \varphi_{xx}, \dots, \varphi_{(N-1)x}) \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} \varphi_j = a^+ \varphi_j^+ + a_j^- \varphi_j^- \\ \varphi_j^\pm = \frac{\sigma(x \pm k_j)}{\sigma(x) \sigma(\pm k_j)} e^{\mp \gamma_j} = \Phi_x(\pm k_j) e^{\mp \gamma_j} \\ \gamma_j = \zeta(k_j)x - \frac{1}{2} \wp'(k_j)t + \ell_j y + \wp(k_j) \ell_j z + \gamma_j^{(0)} \end{cases} \quad (3.4)$$

をもつことが示される. ただし, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)^\top$ とし, KdV 方程式の場合と同様に Lax 形式 (2.2) が両立条件となる固有値方程式と時間発展方程式

$$\begin{cases} \hat{L}\varphi = \lambda\varphi \\ \varphi_z = \hat{M}\varphi \end{cases} \quad (3.5)$$

に定常解 $u = -2\wp(x)$, 固有値 $\lambda = \wp(k_j)$ を代入して得られる微分方程式

$$\begin{cases} \varphi_{jxx} = (\wp(k_j) + 2\wp(x))\varphi_j \\ \varphi_{jt} = \varphi_{jxxx} - 3\wp(x)\varphi_{jx} - \frac{3}{2}\wp'(x)\varphi_j \\ \varphi_{jz} = \wp(k_j)\varphi_{jy} \end{cases} \quad (3.6)$$

の解となっている. ここで, KdV 方程式も同時にみたす必要があるため第 2 式を追加している. これより, $\tau_{\text{Wr}} = |0, 1, \dots, N-1| = |\widehat{N-1}|$ といった記法を用いると,

$$\tau_{\text{Wr}} = |\widehat{N-1}| \quad (3.7)$$

$$\partial_x \tau_{\text{Wr}} = |\widehat{N-2}, N| \quad (3.8)$$

$$\partial_x^2 \tau_{\text{Wr}} = |\widehat{N-3}, N-1, N| + |\widehat{N-2}, N+1| \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \partial_x^3 \tau_{\text{Wr}} &= |\widehat{N-4}, N-2, N-1, N| + 2|\widehat{N-3}, N-1, N+1| \\ &\quad + |\widehat{N-2}, N+2| \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \tau_{\text{Wr}} &= |\widehat{N-4}, N-2, N-1, N| - |\widehat{N-3}, N-1, N+1| \\ &\quad + |\widehat{N-2}, N+2| - 3\wp(x)|\widehat{N-2}, N| - \frac{3}{2}N^2\wp'(x)|\widehat{N-1}| \end{aligned} \quad (3.11)$$

であり,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(D_y D_x^3 + 2D_y D_t - 6D_z D_x - 6\wp(x)D_y D_x) \tau_{\text{Wr}} \cdot \tau_{\text{Wr}} \\ &= 3 \left((|\widehat{N-4}, N-2, N-1, N|_y + |\widehat{N-2}, N+2|_y) |\widehat{N-1}| \right. \\ &\quad \left. - (|\widehat{N-4}, N-2, N-1, N| + |\widehat{N-2}, N+2|) |\widehat{N-1}|_y \right) \\ &\quad - 3 \left((|\widehat{N-3}, N-1, N|_y + |\widehat{N-2}, N+1|_y) |\widehat{N-2}, N| \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(|\widehat{N-3}, N-1, N| + |\widehat{N-2}, N+1|)|\widehat{N-2}, N|_y) \\
& -6(|\widehat{N-2}, N|_z|\widehat{N-1}| - |\widehat{N-2}, N||\widehat{N-1}|_z) \\
& -12\phi(x)(|\widehat{N-2}, N|_y|\widehat{N-1}| - |\widehat{N-2}, N||\widehat{N-1}|_y)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

となる. この式の右边が 0 になることを示す. まず, 行列式に対する Jacobi の恒等式 [5](式の形に合うよう少し変形している)

$$\begin{vmatrix} x & x_n \\ A & y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & z_1 \\ A & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & y_1 \\ A & y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & x_{n+1} \\ A & z \end{vmatrix} = |A| \begin{vmatrix} x & x_n & x_{n+1} \\ a & y_1 & z_1 \\ A & y & z \end{vmatrix} \tag{3.13}$$

$x = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_{n-1})$, $a = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_{n-1})$, $A : (n-1)$ 次正方行列
 $y = (y_2 \ y_3 \ \cdots \ y_n)^\top$, $z = (z_2 \ z_3 \ \cdots \ z_n)^\top$

を用いると,

$$\begin{aligned}
& |\widehat{N-2}, N|_y|\widehat{N-1}| - |\widehat{N-2}, N||\widehat{N-1}|_y \\
& = - \begin{vmatrix} \varphi_2 & \varphi_{2x} & \cdots & \varphi_{2(N-2)x} \\ \varphi_3 & \varphi_{3x} & \cdots & \varphi_{3(N-2)x} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_N & \varphi_{Nx} & \cdots & \varphi_{N(N-2)x} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_{1x} & \cdots & \psi_{1Nx} \\ \varphi_1 & \varphi_{1x} & \cdots & \varphi_{1Nx} \\ \varphi_2 & \varphi_{2x} & \cdots & \varphi_{2Nx} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_N & \varphi_{Nx} & \cdots & \varphi_{NNx} \end{vmatrix} + \cdots
\end{aligned} \tag{3.14}$$

となる. ただし, $\psi_y = \varphi_{j_y}$ であり, 対称性より ψ_1 が現れる項のみ考えている. ここで,

$$|\widehat{N-2}|_2 = \begin{vmatrix} \varphi_2 & \varphi_{2x} & \cdots & \varphi_{2(N-2)x} \\ \varphi_3 & \varphi_{3x} & \cdots & \varphi_{3(N-2)x} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_N & \varphi_{Nx} & \cdots & \varphi_{N(N-2)x} \end{vmatrix}, \quad |\widehat{N}|_\psi = \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_{1x} & \cdots & \psi_{1Nx} \\ \varphi_1 & \varphi_{1x} & \cdots & \varphi_{1Nx} \\ \varphi_2 & \varphi_{2x} & \cdots & \varphi_{2Nx} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_N & \varphi_{Nx} & \cdots & \varphi_{NNx} \end{vmatrix} \tag{3.15}$$

といった記法を新たに導入し, 同様に他の項も計算すると,

$$\begin{aligned}
& |\widehat{N-2}, N|_y|\widehat{N-1}| - |\widehat{N-2}, N||\widehat{N-1}|_y \\
& = -|\widehat{N-2}|_2|\widehat{N}|_\psi + \cdots
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
& |\widehat{N-2}, N|_z|\widehat{N-1}| - |\widehat{N-2}, N||\widehat{N-1}|_z \\
& = -\phi(k_1)|\widehat{N-2}|_2|\widehat{N}|_\psi + \cdots
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
& |\widehat{N-2}, N+1|_y|\widehat{N-2}, N| - |\widehat{N-2}, N+1||\widehat{N-2}, N|_y \\
& = -|\widehat{N-2}|_2|\widehat{N-2}, N, N+1|_\psi + \cdots
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
& |\widehat{N-2}, N+2|_y|\widehat{N-1}| - |\widehat{N-2}, N+2||\widehat{N-1}|_y \\
& = -|\widehat{N-2}|_2|\widehat{N-1}, N+2|_\psi + \cdots
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
& |\widehat{N-3}, N-1, N|_y|\widehat{N-2}, N| - |\widehat{N-3}, N-1, N||\widehat{N-2}, N|_y \\
& = -|\widehat{N-3}, N|_2|\widehat{N}|_\psi + \cdots
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
& |\widehat{N-4}, N-2, N-1, N|_y |\widehat{N-1}| - |\widehat{N-4}, N-2, N-1, N| |\widehat{N-1}|_y \\
& = -|\widehat{N-4}, N-2, N-1|_2 |\widehat{N}|_\psi + \cdots
\end{aligned} \tag{3.21}$$

となる. また, φ_j の条件式 (3.6) の第 1 式 $\varphi_{j,xx} = (\wp(k_j) + 2\wp(x))\varphi_j$ と列基本変形によって,

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{j=2}^N (\wp(k_j) + 2\wp(x)) \right) |\widehat{N-2}|_2 \\
& = \begin{vmatrix} (\wp(k_2) + 2\wp(x))\varphi_2 & \varphi_{2x} & \cdots & \varphi_{2(N-2)x} \\ (\wp(k_3) + 2\wp(x))\varphi_3 & \varphi_{3x} & \cdots & \varphi_{3(N-2)x} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\wp(k_N) + 2\wp(x))\varphi_N & \varphi_{Nx} & \cdots & \varphi_{N(N-2)x} \end{vmatrix} \\
& + \begin{vmatrix} \varphi_2 & (\wp(k_2) + 2\wp(x))\varphi_{2x} & \varphi_{2xx} & \cdots & \varphi_{2(N-2)x} \\ \varphi_3 & (\wp(k_3) + 2\wp(x))\varphi_{3x} & \varphi_{3xx} & \cdots & \varphi_{3(N-2)x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_N & (\wp(k_N) + 2\wp(x))\varphi_{Nx} & \varphi_{Nxx} & \cdots & \varphi_{N(N-2)x} \end{vmatrix} \\
& \vdots \\
& + \begin{vmatrix} \varphi_2 & \varphi_{2x} & \cdots & \varphi_{2(N-3)x} & (\wp(k_2) + 2\wp(x))\varphi_{2(N-2)x} \\ \varphi_3 & \varphi_{3x} & \cdots & \varphi_{3(N-3)x} & (\wp(k_3) + 2\wp(x))\varphi_{3(N-2)x} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \varphi_N & \varphi_{Nx} & \cdots & \varphi_{N(N-3)x} & (\wp(k_N) + 2\wp(x))\varphi_{N(N-2)x} \end{vmatrix} \\
& = \begin{vmatrix} \varphi_2 & \varphi_{2x} & \cdots & \varphi_{2(N-4)x} & (\wp(k_2) + 2\wp(x))\varphi_{2(N-3)x} & \varphi_{2(N-2)x} \\ \varphi_3 & \varphi_{3x} & \cdots & \varphi_{3(N-4)x} & (\wp(k_3) + 2\wp(x))\varphi_{3(N-3)x} & \varphi_{3(N-2)x} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_N & \varphi_{Nx} & \cdots & \varphi_{N(N-4)x} & (\wp(k_N) + 2\wp(x))\varphi_{N(N-3)x} & \varphi_{N(N-2)x} \end{vmatrix} \\
& + \begin{vmatrix} \varphi_2 & \varphi_{2x} & \cdots & \varphi_{2(N-3)x} & (\wp(k_2) + 2\wp(x))\varphi_{2(N-2)x} \\ \varphi_3 & \varphi_{3x} & \cdots & \varphi_{3(N-3)x} & (\wp(k_3) + 2\wp(x))\varphi_{3(N-2)x} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \varphi_N & \varphi_{Nx} & \cdots & \varphi_{N(N-3)x} & (\wp(k_N) + 2\wp(x))\varphi_{N(N-2)x} \end{vmatrix} \\
& = |\widehat{N-4}, N-1, N-2|_2 + |\widehat{N-3}, N|_2 \\
& = -|\widehat{N-4}, N-2, N-1|_2 + |\widehat{N-3}, N|_2
\end{aligned} \tag{3.22}$$

となる. ちなみに, 式変形では $\varphi_{j,xx} = (\wp(k_j) + 2\wp(x))\varphi_j$ の両辺を x で微分したものをを用いており, 列基本変形と合わせると, 行列式の微分と似た操作 (各列に対して 1 回ではなく 2 回微分している) になっていることがわかる. これまでの計算結果をまとめると,

$$\begin{aligned}
& (D_y D_x^3 + 2D_y D_t - 6D_z D_x - 6\wp(x) D_y D_x) \tau_{\text{Wr}} \cdot \tau_{\text{Wr}} = 0 \\
& \Leftrightarrow -|\widehat{N-1}, N+2|_\psi + |\widehat{N-2}, N, N+1|_\psi \\
& \quad + (2(N+1)\wp(x) + 2\wp(k_1) + \wp(k_2) + \cdots + \wp(k_N)) |\widehat{N}|_\psi = 0
\end{aligned}$$

となる. そして (3.22) と同じ操作により,

$$(2(N+1)\wp(x) + 2\wp(k_1) + \wp(k_2) + \cdots + \wp(k_N)) |\widehat{N}|_\psi$$

$$\begin{aligned}
&= |\widehat{N-1}, N+2|_\psi + |\widehat{N-2}, N+1, N|_\psi \\
&= |\widehat{N-1}, N+2|_\psi - |\widehat{N-2}, N, N+1|_\psi
\end{aligned}$$

となるため, τ_{Wr} が双線型形式 (3.2) をみたすことがわかる.

3.3 楕円 N ソリトン解

今回得られた CBS 方程式のロンスキアン解は KdV 方程式のロンスキアン解 (2.13) と指数部以外同じであり, Li, Zhang と同様の手順で楕円 N ソリトン解が求められる. 具体的には, ロンスキアン解 (3.3) について, $a_k^+ = 1$, $a_j^- = (-1)^j$ とすると

$$\varphi_j = (\varepsilon_j)^j \Phi_x(\varepsilon_j k_j) e^{-\varepsilon_j \gamma_j}, \quad \{\varepsilon_k\}_{k=1}^N \in \{1, -1\}^N \quad (3.23)$$

からなるロンスキアンに分解できる. このとき,

$$\begin{aligned}
f_\varepsilon &: \{\varepsilon_k\}_{k=1}^N \in \{1, -1\}^N \text{ から定まるロンスキアン} \\
|\varepsilon| &: \{\varepsilon_k\}_{k=1}^N \in \{1, -1\}^N \text{ に含まれる } 1 \text{ の個数}
\end{aligned}$$

とすると,

$$\tau_{\text{Wr}} = \sum_{n=0}^N \sum_{|\varepsilon|=n} f_\varepsilon = \sum_{n=0}^N f^{(n)} \quad (3.24)$$

と表される. ただし, $\sum_{|\varepsilon|=n} f_\varepsilon = f^{(n)}$ とおいた. そして,

$$\tau_N(x, t, y, z) := \frac{\tau_{\text{Wr}}(x + \sum_{i=1}^N k_i, t, y, z)}{f^{(0)}(x + \sum_{j=1}^N k_j, t, y, z)} \quad (3.25)$$

とすると τ_N は双線型形式 (3.2) をみたし,

$$\tau_N = \sum_{\{\mu_k\}_{k=1}^N \in \{0,1\}^N} \frac{\sigma(x + 2 \sum_{i=1}^N \mu_i k_i)}{\sigma(x) \prod_{j=1}^N \sigma^{\mu_j}(2k_j)} \exp \left[\sum_{i=1}^N \mu_i \theta_i(x, t) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mu_i \mu_j A_{ij} \right] \quad (3.26)$$

$$\begin{cases} e^{A_{ij}} = \left(\frac{\sigma(k_i - k_j)}{\sigma(k_i + k_j)} \right)^2 \\ \theta_j = -2\zeta(k_j)x + \wp'(k_j)t + \ell_j y + \wp(k_j)\ell_j z + \theta_j^{(0)} \end{cases} \quad (3.27)$$

となる.

4 おわりに

本論文では, Li と Zhang が提案した KdV, KP 方程式において双線型形式から楕円ソリトン解を求める方法を用いて CBS 方程式の楕円 N ソリトン解を導出した. また, その楕円 N ソリトン解のロンスキアン表示についても証明を与えた. CBS 方程式の特長の 1 つである, V 字型ソリトン解が同様に楕円ソリトン解の場合も得られることも示した. 今後の課題としては, CBS 階層 [18] への拡張や, 中屋敷が行った頂点作用素を用いた構成方法 [13] を本研究にも適用することなどが挙げられる.

その他にも, CBS 方程式とは異なる方程式において同様に楕円ソリトン解を構成できるかどうかを考えていきたい.

本研究は JSPS 科研費 JP22K03441, 23K22407, 日本学術振興会二国間交流事業 JPJSBP120247414, 早稲田大学特定課題 (研究基盤形成) の助成を受けたものです.

付録 1

Weierstrass の $\wp, \zeta, \sigma$ 関数について簡単に紹介する [21]. $\wp$ 関数は楕円関数であり, $\mathbb{R}$ 上一次独立な複素数 ω_1, ω_2 に対して

$$\wp(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2) = \wp(z) \quad (m, n \in \mathbb{Z}) \quad (4.1)$$

が成り立つ. また ζ, σ 関数は楕円関数ではないが,

$$\zeta(z + 2\omega_i) = \zeta(z) + 2\zeta(\omega_i) \quad (4.2a)$$

$$\sigma(z + 2\omega_i) = -\exp[2(z + \omega_i)\zeta(\omega_i)]\sigma(z) \quad (4.2b)$$

が成り立ち, 互いに

$$\zeta(z) = (\log \sigma(z))' = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} \quad (4.3)$$

$$\wp(z) = -\zeta'(z) \quad (4.4)$$

といった関係式で結ばれる. また $\wp, \zeta, \sigma$ には多くの関係式が存在し, 例えば

$$(\wp'(x))^2 = 4\wp^3(x) - g_2\wp(x) - g_3 \quad (4.5)$$

$$\wp(x) - \wp(y) = -\frac{\sigma(x-y)\sigma(x+y)}{\sigma^2(x)\sigma^2(y)} \quad (4.6)$$

$$\zeta(x+y) - \zeta(x) - \zeta(y) = \frac{1}{2} \frac{\wp'(x) - \wp'(y)}{\wp(x) - \wp(y)} = \eta_k(x) \quad (4.7)$$

$$\wp(x+y) + \wp(x) + \wp(y) = \left(\frac{1}{2} \frac{\wp'(x) - \wp'(y)}{\wp(x) - \wp(y)} \right)^2 \quad (4.8)$$

$$\zeta(x) + \zeta(y) + \zeta(z) - \zeta(x+y+z) = \frac{\sigma(x+y)\sigma(y+z)\sigma(z+x)}{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)\sigma(x+y+z)} \quad (4.9)$$

といったものがある. ただし, $g_2 = 60 \sum_{\omega \in \Omega'} \frac{1}{\omega^4}$, $g_3 = 140 \sum_{\omega \in \Omega'} \frac{1}{\omega^6}$ とする.

最後に, 楕円 1, 2 ソリトン解を直接的な計算で示した際に使用した関係式を挙げる. $\rho_j = \Phi_x(2k_j)e^{\theta_j}$, $\theta_j = -2\zeta(k_j)x + \wp'(k_j)t + \theta_j^{(0)}$ に対して,

$$\rho_{jx} = \frac{-\wp'(k_j)}{\wp(x+k_j) - \wp(k_j)} \rho_j$$

$$\rho_{jxx} = 2\eta_k(x)\rho_{jx}$$

$$\rho_{jxxx} = (6\wp(x) + 2\wp(x+k_j) + 4\wp(k_j))\rho_{jx}$$

$$(\wp(x+2k_j) - \wp(x))\rho_j = (\eta_{k_j}(x+k_j) - \eta_{k_j}(x))\rho_{jx}$$

が成り立つ [9]. また, 楕円 2 ソリトン解の計算においては,

$$\begin{aligned}\wp(b) - \wp(a) &= (\zeta(\lambda) + \zeta(a) + \zeta(b) - \zeta(\lambda + a + b))(\zeta(\lambda + a) - \zeta(a) - \zeta(\lambda + b) + \zeta(b)) \\ &\quad - \sigma(x)\sigma(x + a + b + c)\sigma(a)\sigma(b - c) \\ &= \sigma(x + b)\sigma(x + a + c)\sigma(c)\sigma(a + b) - \sigma(x + c)\sigma(x + a + b)\sigma(b)\sigma(a + c)\end{aligned}$$

も有用であった.

参考文献

- [1] D.J. Korteweg and G. de Vries, “On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves”, *Phil. Mag.* (5), Vol.39 (1895), p.422-443.
- [2] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, “Interaction of ”Solitons” in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States”, *Phys. Rev. Lett.* Vol.15 (1965), p.240-243.
- [3] B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili, “On the stability of solitary waves in weakly dispersing media”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol.192:4 (1970), p.753-756.
- [4] Y. Kodama, 『Solitons in Two-Dimensional Shallow Water』, SIAM, 2018.
- [5] 広田 良吾, 『直接法によるソリトンの数理』, 岩波書店, 1992.
- [6] M. Sato, “Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifolds”, *RIMS Kokyuroku*, Vol.439 (1981), p.30-46.
- [7] T. Miwa, M. Jimbo and E. Date, 『Solitons: Differential Equations, Symmetries and Infinite Dimensional Algebras』, Cambridge University Press, 2012.
- [8] E. A. Kuznetsov and A.V. Mikhaïlov, “Stability of stationary waves in nonlinear weakly dispersive media”, *Sov. Phys. JETP*, Vol.40 (1974), p.855-859.
- [9] X. Li and D.J. Zhang, “Elliptic Soliton Solutions: Functions, Vertex Operators and Bilinear Identities”, *J. Nonlinear Sci.*, Vol.32 (2022), No.70 (53pp).
- [10] F.W. Nijhoff and J. Atkinson, “Elliptic N-soliton solutions of ABS lattice equations,”, *Int. Math. Res. Not.*, Vol.2010 (2010), p.3837-3895.
- [11] S. Yoo-Kong and F.W. Nijhoff, “Elliptic (N,N’)-soliton solutions of the lattice Kadomtsev-Petviashvili equation”, *J. Math. Phys.*, Vol.54 (2013), No.043511 (20pp).
- [12] S. Kakei, “Solutions to the KP hierarchy with an elliptic background”, 2023, arXiv: 2310.11679.
- [13] A. Nakayashiki, “Vertex operators of the KP hierarchy and singular algebraic curves.”, *Lett Math Phys*, Vol. 114 (2024), Article 82.
- [14] F. Calogero, “A method to generate solvable nonlinear evolution equations”, *Lettere al Nuovo Cimento*, Vol.14 (1975), p.443-447.
- [15] O.I. Bogoyavlenskii, “Breaking solitons in 2 + 1-dimensional integrable equations”, *Uspekhi Mat. Nauk*, Vol.45:4 (1990), p.1-86.

- [16] J. Schiff, “Integrability of Chern-Simons-Higgs vortex equations and a reduction of the self-dual Yang-Mills equations to three dimensions”, in: 『Painlevé Transcendents』, eds. D. Levi and P. Winternitz, NATO ASI Series B, Vol.278 (1992), p.393-405.
- [17] S. J. Yu, K. Toda, N. Sasa and T. Fukuyama, “N soliton solutions to the Bogoyavlenskii-Schiff equation and a quest for the soliton solution in (3+1) dimensions”, J. Phys. A, Vol. 31 (1998), p.3337-3347.
- [18] T. Ikeda and K. Takasaki, “Toroidal Lie algebras and Bogoyavlensky’s (2+1)-dimensional equation”, Int. Math. Res. Not., Vol.2001 (2001), p.329-369.
- [19] 戸田 晃一, “ある可積分な高次元 KdV 方程式について”, RIMS Kokyuroku, Vol.1483 (2006), p.210-221.
- [20] 池田 岳, “Bogoyavlensky 階層と toroidal Lie algebras”, RIMS Kokyuroku, Vol.1183 (2001), p.65-73.
- [21] E. T. Whittaker and G.N. Watson, 『A Course of Modern Analysis.』, Cambridge University, 1946.