

修正重力におけるブラックホール エントロピー上限とメモリー効果

松田 泰亮

京都大学 基礎物理学研究所

令和7年

Contents

1	Introduction	7
2	修正重力理論	11
2.1	The scalar-tensor theory	11
2.1.1	Background equations	13
2.2	Jordan frame vs. Einstein frame	14
2.2.1	Jordan frame	14
2.2.2	Einstein frame	15
2.3	Matter energy-momentum tensor in different frames	16
2.3.1	完全流体	17
2.3.2	Massive and massless particles	17
2.4	Einstein-Gauss-Bonnet 重力	19
3	一般相対性を超えた重力理論における共変なエントロピー上限	21
3.1	Wald entropy	21
3.1.1	準備としての定理の証明	22
3.1.2	ブラックホール第一法則	25
3.2	Bousso bound in Gauss bonnnet gravity	28
3.2.1	Bousso bound	28
3.3	Extention of Bousso bound to D-dimensional GR	30
3.3.1	beyond GR gravity への拡張	34
3.4	Simple examples	35
3.5	Wald entropy	35
3.5.1	$f(R)$ gravity	36
3.5.2	Canonical scalar-tensor theory	38
3.6	Lovelock gravity	40
3.6.1	Wald-Jacobson-Myers entropy and covariant entropy bound	40
3.6.2	EGB gravity with spherical symmetry	42
3.6.3	Proof in EGB gravity with spherical symmetry	43
3.6.4	Corollary: generalized second law in EGB gravity with spherical symmetry	44
3.7	Summary of this part	45
4	スカラー・テンソル理論における宇宙的メモリー効果について	47
4.0.1	Linear perturbations of ScalarTensortheory	47
4.1	The retarded gravitational field	51
4.2	The minimal coupling and constant scalar background limit	53

4.3	The coupled wave equations on a curved spacetime	55
4.3.1	Foliation of the spacetime	56
4.3.2	Geodetic intervals and van Vleck-Morette determinants	58
4.3.3	Fundamental solutions	59
4.3.4	グリーン関数	61
4.3.5	Application: scalar perturbations in scalar-tensor theory	61
4.4	Cosmological scalar memory effect	63
4.5	Summary	65
5	Summary	67

Abstract

重力を記述する理論として Einstein-Hilbert 作用を採用した一般相対論は多くの観測結果と整合する結果を残している。しかしながら、この作用を変更し、より正確な重力理論を得ることができるのではないかという試みが、主に二つの動機からなされている。一つは、一般相対論が量子重力理論の低エネルギー有効理論であり、考える物理現象のエネルギーのスケールを上昇させることによって、低エネルギーの領域では考える必要のなかった高階微分項等の項が量子補正として現れることが期待されるという動機である。もう一つは、ダークエネルギーの候補を始めとする現在の宇宙論における未解決問題を解決する方法として重力の作用を変更することを候補とするという動機である。一般相対論の観測と整合する部分に影響を与えないまま未解決問題に対して影響を与えるように重力の作用を変更することが可能であれば、それをもって宇宙論の問題に対する解答とすることができる。真の重力を一つに断定することは困難であり、現在重力理論の修正の仕方として様々な候補が挙げられている。それらの候補のいずれが真の重力理論かを決定することが現時点で不可能であっても、各々の理論の性質を調べることは、今後真の重力理論探索するに当たって有益である。

本研究においては二つの観点から既存の重力理論の性質を調べる。第1章でイントロダクションを行い、第2章で本研究に登場するいくつかの修正重力理論を紹介する。第3章では、重力を修正する一つ目の動機である、古典的な重力理論は量子重力理論の低エネルギー有効理論であるという観点から、特に Einstein-Gauss-Bonnet 重力について調べる。ブラックホールの熱力学的性質は重力の量子性に端を発しているという予想がなされており、その帰結として、物質のエントロピーがその物質の占める領域の面積によって上限を与えられるという予想がいくつかの形で提唱されている。そのような予想のうち、Bousso[1] は、一般共変性を指導原理として、重力の理論が満たすべき性質として Bousso bound と呼ばれる物質のエントロピーの上限の仕方を定式化した。Bousso bound は D 次元時空において面積 A を持つ $D-2$ 次元超曲面から内向きに発せられる測地線によって構成された $D-1$ 次元光的超曲面上に分布する物質のエントロピーが、 $A/4$ を上限とすると主張している。この主張には完全な証明は与えられていないがいくつかの条件を課した上での証明は与えられており、量子重力の有効理論として重力理論が満たすと予想される性質の一つである。本研究では Einstein-Gauss-Bonnet 重力におけるブラックホールエントロピーの形を一つ仮定し、そのエントロピーについて、一般相対論で与えられたのと同じ Bousso bound の証明を満たすことおよび Generalized second law というブラックホールエントロピーが満たすべき性質を満たすことを示した。また、第4章においては、二つ目の動機に関連して、宇宙論的背景で重力の変更により観測可能な量の受ける変化を調べるという観点から、重力波による観測可能な現象としてメモリー効果に注目した。メモリー効果とは重力波の伝搬によって、二つの観測者の距離が瞬時かつ永久に変化するという効果である。本研究においては、Wald and Tolish[2] による宇宙論的な背景におけるメモリー効果の研究を Scalar-Tensor 理論に応用し、スカラー場と重力が結合した場合においてメモリー効果を宇宙論的な背景で計算する方法を与えた。

Chapter 1

Introduction

一般相対論は、その予言が既存の観測結果と整合しており、そのため重力の標準理論として受け入れられている。一方、いくつかの動機によって、一般相対論の作用を修正し、新たな重力の理論を考える試みがなされている [3]。

動機の一つに、一般相対論がより高エネルギーな理論に対する有効理論と捉えることが自然であることが挙げられる。つまり、初期宇宙などの高エネルギーの系においても重力を記述可能な理論が存在すると仮定し、その理論の低エネルギー有効理論が一般相対論になっているという主張である。一般相対論が整合している観測結果は、現在観測可能な程度のエネルギースケールに属する現象であり、初期宇宙などの高エネルギーの領域を記述する系ではその整合性は保証されていない。そのみならず、高エネルギーの系における重力を記述する理論として一般相対論を受け入れることは妥当ではないと思われる。

その理由の一つに、重力が他の力と同様に量子化されることが予想されていることが挙げられる。重力がどのような形で量子化されるのかは未解決の問題であり、多くの候補が挙げられている [4][5][6][7][8]。しかし、少なくとも整合性のある量子重力の理論は高エネルギーの系に対しても適応可能な理論であることが求められる。一方で一般相対論は繰り込み不可能な理論であり、紫外発散を除去できない。よって、高エネルギーの領域を記述する理論として一般相対論をそのまま使うことはふさわしくない。一般相対論の作用を修正することで、重力の量子効果を取り入れた新たな有効モデルを構築し、初期宇宙などの高エネルギー、強重力の系における現象を解析する試みがなされている。

別の動機として、重力を修正することによって現在知られている宇宙論の未解決問題を解決しようとすることが挙げられる [9]。解決が望まれる問題の例として宇宙の加速膨張がある。宇宙の加速膨張を説明する機構としてダークエネルギーが導入されているが、いかにしてダークエネルギーを導入するかは明らかではない。一つの手法として、一般相対論における宇宙定数をダークエネルギーとして採用する Λ -CDM model があるが、この手法にはいくつかの問題点が指摘されている。第一に、宇宙膨張を再現するためには真空のエネルギー密度は 10^{-47}GeV^4 程度であることが要請されるが、この値は場の量子論による真空のエネルギーの値 10^{74}GeV^4 と乖離している [10]。第二に、現在における宇宙定数のエネルギーと物質のエネルギーの値はほぼ同じオーダーである。物質のエネルギー密度が時間により変化する一方で宇宙定数のエネルギーは一定であり、これら二つの値が現在において一致するには宇宙初期におけるパラメータの fine-tuning が要請される。これらの問題から、 Λ -CDM model はダークエネルギーの問題に関する最終的な解決策ではなく、他の方法を考えることには有効性がある。その方法の一つとして重力の理論を修正することが挙げられる。重力の作用を修正することで宇宙定数の代わりとなる新たな項を運動方程式に追加することができる。

上記の問題意識をはじめとする一般相対論による重力の記述の不完全性を補完するため、数多くの修正重力理論が提唱されている。しかしながら、それらのうちどれが重力を記述する最もふさわしい理論であるかは現在明らかではない。その理由の一端に、一般相対論の破綻が顕著になると予想される高エネルギー、強重力の系での観測によってのみでは、一つの修正重力理論及びそのパラメータを観測と整合する重力の理論として一意に定めることはできないことが挙げられる。修正重力の動機において述べたように、重力を真に記述する理論とは量子重力理論などの高エネルギーの重力理論の有効作用として導かれ、強重力系に適用可能な理論である。したがって真の重力理論は各エネルギーの段階においては高エネルギーの理論から一意に定まるはずである。したがって、複数の修正重力理論が観測による制限を生き残っているとき、それらの理論のうちどれが最も高エネルギーの理論から得られる有効理論としてふさわしいか議論する方法があれば、観測技術の発展によりさらなる制限以外の方法で重力理論に制限をかけることができる。

量子重力理論から有効理論として導かれる重力理論が満たすべき性質を求めることができる、それを用いてふさわしくない理論を除外することができると期待される。このようなふさわしくない理論を取り除く手法は、仮に量子重力理論とそこから低エネルギー有効理論を求める方法が定まっていれば必要ない。しかし、現在量子重力理論の構築に成功しておらず、また未来においてそれらが成立するかが明らかでない以上、代替手法や、より効率よく真の重力理論の探究を行う方法としてこのようなふり落としを行うことは有効であると考えられる。

このアプローチで修正重力を見つけるにあたって、私は重力の持つ性質や現象が、理論の変更によってどのように変化するか、あるいはそれらの現象や性質のどの部分が変化しないのか把握することが重要であると考えた。一般相対論で成立する重力の性質や現象が、ある特定の修正重力理論を考えたときに変化するとき、その変化が、高エネルギーの理論から得られる重力理論としてふさわしくないものであれば、その修正重力理論は真の重力理論の候補から外すことが可能であり、逆に真の重力理論としてふさわしいものであればその理論を有力な候補としてみなし、重点的に解析を行うことが可能である。

どのような性質を持っていれば真の重力理論としてふさわしいかを完全に確信を持って定めることは困難である。しかしながら、一般相対論で確認されている性質や現象のうち、その起源が重力の量子性に期待されるものや、量子重力の理論的性質と関連するものは、量子重力の有効理論として現れる修正重力理論にも受け継がれていくのではないかと期待できる。本研究ではこのような側面を持つ重力理論の二つのトピックについて、一般相対論を超えた理論による解析を行い、作用の変更によって扱うトピックがいかに変化したかを調べる。

一つ目のトピックはブラックホールの熱力学的性質である。このトピックは重力を修正する一つ目の動機である量子重力の有効理論としての重力理論の側面に関連している。ブラックホールの持つ特異な性質に、その面積がいかなる物理過程でも減少しないというものがある [11]。この減少しないという特異な性質は、熱力学における孤立系のエントロピーと同じであり、ブラックホールの性質をよく研究された熱力学と類推して調べることが試みられた。それらの試みの一つに、Hawking ら [12] によるブラックホール第一法則の発見がある。Hawking らは、ブラックホールを持つ時空の持つ二つの保存量である時空の質量 M 及び角運動量 J の、計量の変分 δg_{ab} に伴う変化量 δM 及び δJ がブラックホールの面積の変化量 δA と

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega \delta J \quad (1.0.1)$$

の形で結びついていることを指摘した。ここで κ はブラックホールの表面重力、 Ω は角速度である。(1.0.1) はブラックホールの持つ保存量及び面積の変化量が相互に関連している

ことを示している。最初の予想通りブラックホールの面積 A が熱力学の系におけるエントロピーに対応し、時空の質量 M が内部エネルギーに対応していると考えれば、(1.0.1) は熱力学の第一法則におけるエントロピーと内部エネルギーの関係式に対応しているといえる。この対応関係の発見によってブラックホールが熱力学的性質を持つことはより強く信じられるようになった。

ブラックホールの熱力学的性質がどこからくるのかはまだ分かっていないが、その起源を量子重力に求められるのではないかと期待されている。ブラックホールが熱力学的物体であるならば、黒体輻射を行うことが期待されるが、古典的にはこのような輻射は発見されなかった。しかし Hawking[13] は量子効果を一部取り入れた解析を行い、このような輻射が存在することを発見した。したがってブラックホールの熱力学的性質を完全に記述するためには量子性を取り入れる必要がある。これがブラックホールの熱力学的性質の起源を量子重力に求める第一の理由である。第二の理由として、ブラックホールのエントロピーが面積のみで決定されるという特異な性質がある。通常の熱力学系における物質のエントロピーはその系の体積に比例する。一方でブラックホールのエントロピーはその面積のみに比例している。エントロピーはその系のとりうる量子状態の対数で与えられる。もし量子重力が $3+1$ 次元の理論でなく、 $2+1$ 次元の理論であるならば、ブラックホールのエントロピーが面積という二次元の量で与えられることは自然である。このような、理論の実際の自由度が、理論を考える時空の自由度より一つ小さいことをホログラフィーという。ホログラフィーは量子重力に予想される性質の一つであり、ブラックホールの熱力学的性質が重力の量子性を起源とする根拠となっている。

二つ目のトピックは重力波のメモリー効果である。メモリー効果とは重力波の現象の一つであり、重力の伝搬によって2つの観測者の位置が瞬時かつ永久に変化する効果である。メモリー効果は Zel'dovich と Ponarev[14] らによって最初にその存在を提唱され、その後 Christodoulou[15] によって、Einstein 方程式の非線形性がさらなるメモリー効果を導くことが示された。メモリー効果は複数の意味で興味深い対象である。第一に、メモリー効果は観測可能な効果であるということである [16][17][18]。第二に、メモリー効果は重力に関連する他のトピックと深く関連していることが知られている。漸近平坦な時空において、メモリー効果は無限遠近傍における計量の変化によって表すことができるが、その計量の変化は、時空の漸近平坦性を保つ変化であることが知られている [19]。このような変換を漸近対称性 [20] とよぶ。従ってメモリー効果と漸近対称性は等価である。また、この漸近対称性は、Soft-theorem と呼ばれる重力子の散乱振幅 [21] における関係式と等価であることが知られている [22]。Soft theorem は、極めてエネルギーの低い重力子 (soft graviton) を含む散乱過程を考えると、重力子が存在することによる散乱振幅への寄与が、散乱過程に関連するその他の粒子の寄与と分離できることを主張する定理である。理論の持つ対称性として漸近対称性を許した場合、漸近ゲージ対称性に関する Ward-Takahashi 恒等式が Soft-theorem と等価であることが知られている。従って漸近対称性を通じてメモリー効果と Soft-theorem は関連しており、重力波による観測可能な現象を通じて重力子の散乱に関する性質をチェックできる可能性がある。

本論文は以下のように構成される。第三章は発表済みの論文 [30] に基づく。ブラックホール熱力学を一般相対論から別の理論に拡張する手法である Wald entropy を説明し、量子重力から導かれる重力理論に望む性質として Bousso bound を説明する。そして、Gauss-Bonnet 重力におけるブラックホールエントロピーの定式化と、それを用いた Bousso bound の証明を行う。第四章は発表済みの論文 [53] に基づく。宇宙論的背景におけるメモリー効果の解析を行う。第五章では結果をまとめ、進展について議論する。

Chapter 2

修正重力理論

この章では後の章に登場する修正重力の理論について簡単に説明する。

2.1 The scalar-tensor theory

線形運動項を持ち、高階微分項を持たないスカラーテンソル理論を最初に紹介する。物質場が直接メトリックに結合する Jordan フレームでの作用は

$$S_J[\tilde{g}, \phi, \psi] = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} F(\phi) \tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{K}(\phi) \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \tilde{V}(\phi) \right] + S_m[\tilde{g}, \psi] \quad (2.1.1)$$

で与えられる。ここで $M_{\text{Pl}} = (8\pi G)^{-1/2}$ は縮小プランク質量, $\tilde{R}$ は Jordan フレームにおけるリッチスカラー, $F, \tilde{K}$ そして $\tilde{V}$ はそれぞれスカラー場の関数であり、 S_m は物質場の作用で、 ψ は考慮されている全ての物質場と粒子を網羅して表している。(2.1.1) は作用の重力に関する部分で、Jordan フレームにおけるメトリック $\tilde{g}_{\mu\nu}$ とスカラー場 ϕ で構成される。

$g_{\mu\nu}$ を Einstein フレームにおけるメトリックとする共形変換、

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = F(\phi)^{-1} g_{\mu\nu}, \quad (2.1.2)$$

によって Einstein フレームにおける作用は

$$S_E[g, \varphi, \psi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right] + S_m[\tilde{g}, \psi] \quad (2.1.3)$$

となる。ここで

$$\varphi \equiv \int \sqrt{K(\phi)} d\phi, \quad K \equiv \frac{\tilde{K}}{F} + \frac{3}{2} M_{\text{Pl}}^2 \left(\frac{F_{,\phi}}{F} \right)^2, \quad V \equiv \frac{\tilde{V}}{F^2} \quad (2.1.4)$$

と定義する。(2.1.3) における $\tilde{g}$ は (2.1.2) であり、 ϕ は φ の関数である。

等価であるはずの二つの作用 (2.1.1) と (2.1.3) を比べると、 $g_{\mu\nu}$ に対する作用と $\tilde{g}_{\mu\nu}$ に対する作用が異なっていることがわかる。この差異は物質場のカップリングが異なることからくる。すなわち、Jordan frame においては物質場は $\tilde{g}_{\mu\nu}$ にのみ結合しているが、Einstein frame においては $g_{\mu\nu}$ と φ にも結合している。よく知られているように、これこそが一般相対論における Einstein-Hilbert Action と同じ作用であらわされているにもかかわらずスカラーテンソル理論が修正重力の一種だと考えられている理由である。

計算を容易にするため、全ての計算を Einstein frame で行い、最終的に Jordan フレームでの量に変換する。Jordan フレームと Einstein フレームにおける変換の詳細は Appendix 2.2 に示す。アインシュタイン方程式は作用 (2.1.3) の $g^{\mu\nu}$ に関する変分をとることで導き出せて

$$M_{\text{Pl}}^2 G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(\varphi)} + T_{\mu\nu}^{(\text{m})}; \quad T_{\mu\nu}^{(\text{m})} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{m}}}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.1.5)$$

となる。ここで $G_{\mu\nu}$ は Einstein テンソルであり、 $T_{\mu\nu}^{(\text{m})}$ は物質場のエネルギー運動量テンソル (Appendix 2.3 参照)。スカラー場のエネルギー運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu}^{(\varphi)} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi + V(\varphi) \right] \quad (2.1.6)$$

で与えられる。作用 (2.1.3) の φ に関する変分をとることで

$$\square \varphi - V_{,\varphi} = \frac{F_{,\varphi}}{2F} T^{(\text{m})}; \quad T^{(\text{m})} = g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}^{(\text{m})} \quad (2.1.7)$$

を得る。

物質場のソースとして二種類のものを考える。一つは宇宙のエネルギー密度を生み出す完全流体であり、もう一方は重力波を生み出す理想的なソースとして導入される、単一粒子と同じ作用を持ったソースである。物質場のエネルギー運動量テンソルは二つの部分

$$T_{\mu\nu}^{(\text{m})} = T_{\mu\nu}^{(\text{F})} + T_{\mu\nu}^{(\text{P})} \quad (2.1.8)$$

に分離することができる。物質場の保存則から

$$\nabla_\mu T^{(\text{F})\mu}{}_\nu = -\frac{F_{,\varphi}}{2F} T^{(\text{F})} \nabla_\nu \varphi, \quad (2.1.9)$$

$$\nabla_\mu T^{(\text{P})\mu}{}_\nu = -\frac{F_{,\varphi}}{2F} T^{(\text{P})} \nabla_\nu \varphi. \quad (2.1.10)$$

が得られる。完全流体のエネルギー運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu}^{(\text{F})} = (\rho + p) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (2.1.11)$$

ρ と p はそれぞれ Einstein フレームにおけるエネルギー密度と圧力、 U_μ は $g^{\mu\nu} U_\mu U_\nu = -1$ で規格化された四次元運動量である。

粒子のエネルギー運動量テンソルは

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(\text{P})} = & \sum_{l,\text{in}} T_{\mu\nu}^{(M,l)} + \sum_{n,\text{in}} T_{\mu\nu}^{(N,n)} \\ & + \sum_{l',\text{out}} T_{\mu\nu}^{(M,l')} + \sum_{n',\text{out}} T_{\mu\nu}^{(N,n')} \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

であり、上つきの添字 M と N はそれぞれ massive と massless の粒子を表し、

$$T_{\mu\nu}^{(M,\text{in})} = m u_\mu u_\nu \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}(t)) \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{d\tau}{dt} \Theta(-t), \quad (2.1.13)$$

$$T_{\mu\nu}^{(N,\text{in})} = k_\mu k_\nu \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}(t)) \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{ed\lambda}{dt} \Theta(-t), \quad (2.1.14)$$

である。 $u_\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ は massive な粒子の四次元運動量で、 $k^\mu = \frac{dx^\mu}{ed\lambda}$ は massless particles の四次元運動量。また、 τ は proper time で t は粒子の局所的な時間座標であり、重力波が発生するイベントである粒子同士の衝突の時刻が $t = 0$ となるようにとられている。“in” のラベルは粒子が過去向きの Light cone $t < 0$ 中のものであることをしめし、“out” は粒子が未来向きの Light cone $t > 0$ 中のものであることを示す。従って、out のエネルギー運動量テンソルは Eqs. (2.1.13) および (2.1.14) において $\Theta(-t)$ と $\Theta(t)$ を入れ替えたものと同じである。

2.1.1 Background equations

(2.1.3) によって表される背景の重力場の配位について、空間的に平坦な FLRW メトリックと一様なスカラー場

$$\begin{aligned} ds^2 &= \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= -\bar{N}(\tau)^2 d\tau^2 + a(\tau)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad \bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\tau), \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

を考える。ここで $\bar{N}$ と a は lapse と scale factor。また、バーのついた量は τ にのみ依存するそれぞれの背景場の量を表す。

物質場における完全流体については、一様で等方な配位を考える。すなわち、

$$\bar{T}_{\mu\nu}^{(F)} = (\bar{\rho} + \bar{p}) \bar{U}_\mu \bar{U}_\nu + \bar{p} \bar{g}_{\mu\nu}; \quad \bar{U}_0 = -\bar{N}, \quad \bar{U}_i = 0. \quad (2.1.16)$$

物質場における単一粒子の形をしたソースは背景場ではノンゼロの値を持たず、摂動の段階でのみ現れる。

背景場に関するアインシュタイン方程式 Eqs. (2.1.5) は Friedmann 方程式、

$$3M_{\text{Pl}}^2 H^2 = \bar{\rho} + \bar{p}_\varphi, \quad (2.1.17)$$

$$-M_{\text{Pl}}^2 (2\dot{H} + 3H^2) = \bar{p} + \bar{p}_\varphi, \quad (2.1.18)$$

を導く。ここでドット・は cosmic time に関する微分 $d/(\bar{N}d\tau)$ であり、 $H = \dot{a}/a$ はハッブルパラメータである。背景場におけるスカラー場のエネルギー密度と圧力は

$$\bar{\rho}_\varphi = \frac{1}{2} \dot{\bar{\varphi}}^2 + \bar{V}, \quad \bar{p}_\varphi = \frac{1}{2} \dot{\bar{\varphi}}^2 - \bar{V} \quad (2.1.19)$$

で与えられる。

スカラー場 (2.1.7) の運動方程式は

$$\ddot{\bar{\varphi}} + 3H\dot{\bar{\varphi}} + \bar{V}_{,\varphi} = \frac{\bar{F}_{,\varphi}}{2\bar{F}} (1 - 3w) \bar{\rho} \quad (2.1.20)$$

であり、完全流体に関する保存則は (2.1.9)

$$\dot{\bar{\rho}} + 3H(1 + w)\bar{\rho} = -\frac{\bar{F}_{,\varphi}}{2\bar{F}} (1 - 3w) \bar{\rho} \dot{\bar{\varphi}} \quad (2.1.21)$$

である。ここで状態方程式のパラメータを $w \equiv \bar{p}/\bar{\rho}$ とおいた。単粒子に似たソース (2.1.10) に対する保存則は背景場のレベルでは自明に成立する。

2.2 Jordan frame vs. Einstein frame

この節では、Jordan フレームにおけるスカラーテンソル理論の作用から始める。このとき、物質はメトリックに直接結合される。共形変換を行い、Einstein フレームでの対応する作用を書き下す。そうして得られた作用を本研究の作用として用いる。この作業は非常によく知られている (例えば、[23, 24, 25, 26, 27] とその引用を参照)。ここでは論文の自己完結性を保つために紹介する。

2.2.1 Jordan frame

Jordan フレーム作用全体は物質はメトリックに直接結合され、

$$S_J[\tilde{g}, \phi, \psi] = S_g[\tilde{g}, \phi] + S_m[\tilde{g}, \psi]; r \quad (2.2.1)$$

$$S_g[\tilde{g}, \phi] = S_{F, \tilde{R}}[\tilde{g}, \phi] + S_\phi[\tilde{g}, \phi]. \quad (2.2.2)$$

を得る。ここで、 $\tilde{g}_{\mu\nu}$ と ϕ は Jordan フレームにおける重力セクターの力学変数であるのメトリックとスカラー場であり、 ψ は考察中のシステムに存在するすべての場と粒子をまとめて表している。作用の重力の部分は

$$S_{F, \tilde{R}}[\tilde{g}, \phi] = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} F(\phi) \tilde{R}, \quad (2.2.3)$$

$$S_\phi[\tilde{g}, \phi] = - \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2} \tilde{K}(\phi) \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \tilde{V}(\phi) \right] \quad (2.2.4)$$

によって定義され、ここで $M_{\text{Pl}} = (8\pi G)^{-1/2}$ は縮小プランク質量、 $\tilde{R}$ は Jordan フレームにおけるリッチスカラー、 F , $\tilde{K}$ そして $\tilde{V}$ はそれぞれスカラー場の関数であり、物質場の作用は

$$S_m[\tilde{g}, \psi] = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{L}_m(\tilde{g}_{\alpha\beta}, \psi) \quad (2.2.5)$$

であり、 $\mathcal{L}_m$ は物質場のラグランジアン密度である。

(2.2.1) の作用をメトリックに関して変分をとり、関係式

$$\delta_{\tilde{g}} S_{F, \tilde{R}}[\tilde{g}, \phi] = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[F(\phi) \tilde{G}_{\mu\nu} + \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\square} F - \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu F \right] \delta \tilde{g}^{\mu\nu} \quad (2.2.6)$$

を用いると、Einstein 方程式

$$M_{\text{Pl}}^2 F(\phi) \tilde{G}_{\mu\nu} = \tilde{T}_{\mu\nu}^{(\phi)} + M_{\text{Pl}}^2 \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu F - M_{\text{Pl}}^2 \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\square} F + \tilde{T}_{\mu\nu}^{(m)} \quad (2.2.7)$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\mu\nu}^{(\phi)} &= \frac{-2}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta S_\phi}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} \\ &= \tilde{K}(\phi) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \tilde{g}_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \tilde{K}(\phi) \tilde{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + \tilde{V}(\phi) \right], \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

$$\tilde{T}_{\mu\nu}^{(m)} = \frac{-2}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta S_m}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}}. \quad (2.2.9)$$

(2.2.1) を ϕ に関して変分すると

$$\begin{aligned} \delta_\phi S_J[\tilde{g}, \phi, \psi] &= \delta_\phi S_g[\tilde{g}, \phi] \\ &= \left[\tilde{K}(\phi) \tilde{\square} \phi + \frac{\tilde{K}_{,\phi}}{2} \tilde{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - \tilde{V}_{,\phi} + \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} F_{,\phi} \tilde{R} \right] \delta \phi = 0 \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

を得る。ここで物質場の作用 $S_m[\tilde{g}, \psi]$ は Jordan フレームにおけるスカラー場 ϕ とは独立であることを用いた。また、物質場の保存則は

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{T}^{(m)\mu}_\nu = 0 \quad (2.2.11)$$

である。

2.2.2 Einstein frame

以下の共形変換

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = F(\phi)^{-1} g_{\mu\nu} \quad (2.2.12)$$

により、Einstein フレームに移行することができる。ここで $g_{\mu\nu}$ は Einstein フレームにおけるメトリックである。したがって

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{\mu\nu} &= F g^{\mu\nu}, \quad \sqrt{-\tilde{g}} = F^{-2} \sqrt{-g}, \\ \tilde{R} &= F \left[R + 3 \frac{F_{,\phi}}{F} \tilde{g}^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + 3 \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \left(\frac{F_{,\phi\phi}}{F} - \frac{3}{2} \frac{F_{,\phi}^2}{F^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

ここで R は $g_{\mu\nu}$ に伴うリッチスカラーである。Einstein フレームにおける重力の作用は

$$S_g[g, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} R - \frac{1}{2} K(\phi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]$$

の形をとる。ここで

$$K \equiv \frac{\tilde{K}}{F} + \frac{3}{2} M_{\text{Pl}}^2 \left(\frac{F_{,\phi}}{F} \right)^2, \quad V \equiv \frac{\tilde{V}}{F^2} \quad (2.2.13)$$

と定義した。スカラー場を

$$\varphi = \int \sqrt{K(\phi)} d\phi \quad (2.2.14)$$

と再定義すると、スカラー場の運動項は Einstein フレームにおいて正準な形の作用

$$S_E[g, \varphi, \psi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right] + S_m[\tilde{g}, \psi]. \quad (2.2.15)$$

を持つ。ここで $\tilde{g}$ は (2.2.12) によって与えられ、 ϕ は φ の関数である。

物質場が存在しない場合、(2.2.1) と (2.2.15) の二つの作用は古典的には完全に等価である。物質の作用は Einstein フレームにおいてはスカラー場 ϕ に依存するが、Jordan フレームにおいてはスカラー場 φ に依存しない。この点がスカラーテンソル理論が一般相対論に物質場を加えたのみだけではなく、修正重力の一種だと考えられている理由である。

Einstein フレームのアインシュタイン方程式は作用 (2.2.15) の $g^{\mu\nu}$ に関する変分をとることで導き出せて

$$M_{\text{Pl}}^2 G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(\varphi)} + T_{\mu\nu}^{(\text{m})} \quad (2.2.16)$$

を得る。ここで、

$$T_{\mu\nu}^{(\varphi)} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + V(\varphi) \right], \quad (2.2.17)$$

$$T_{\mu\nu}^{(\text{m})} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{m}}}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.2.18)$$

スカラー場に関する変分をとるときに、 S_{m} のスカラー場への依存性を考慮する必要がある。しかし、スカラー場への依存は共形変換 (2.2.12) によってもたらされるだけなので、チェーンルールを使えばよい。そして、スカラー場 φ に対する作用 (2.2.15) の変分をとると、スカラー場の運動方程式

$$\square \varphi - V_{,\varphi} = \frac{F_{,\varphi}}{2F} T^{(\text{m})} \quad (2.2.19)$$

を得る。ここで、 $T^{(\text{m})} = g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}^{(\text{m})}$ は Einstein フレームのエネルギー運動量テンソルのトレース。

さらに、ビアンキ恒等式から $\nabla_\mu G^\mu{}_\nu = 0$ が導き出され、これより $\nabla_\mu (T^{(\varphi)\mu}{}_\nu + T^{(\text{m})\mu}{}_\nu) = 0$ がわかる。スカラー場のエネルギー運動量テンソルの具体形 (2.2.17) より、 $\nabla_\mu T^{(\varphi)\mu}{}_\nu = -(\square \varphi - V_{,\varphi}) \nabla_\nu \varphi$ が導かれ、これに Eq. (2.2.19) を用いると

$$\nabla_\mu T^{(\text{m})\mu}{}_\nu = -\frac{F_{,\varphi}}{2F} T^{(\text{m})} \nabla_\nu \varphi \quad (2.2.20)$$

が導かれる。

ここで、我々は物質場の形を仮定しておらずこの節の全ての結果はあらゆるタイプの物質場に適応できることに注意する。また、物質のエネルギー運動量テンソルに異なる寄与が与えられた場合は、それぞれの寄与に対して個別に保存則が成立することにも注意する。

2.3 Matter energy-momentum tensor in different frames

前節では一般の物質場を議論したが、この節では完全流体と相対論的粒子という二つの異なる物質のソースについてより詳細に議論する。これらの物質場のソースについて、Jordan フレームと Einstein フレームにおける量の関係性を導く。

Eq. (2.2.12) を用いると、Eq. (2.2.18) で定義された Einstein フレームにおけるエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}^{(\text{m})}$

$$T_{\mu\nu}^{(\text{m})}(g, \varphi, \psi) = \frac{1}{F(\varphi)} \tilde{T}_{\mu\nu}^{(\text{m})}(\tilde{g}, \psi), \quad (2.3.1)$$

$$\tilde{T}_{\mu\nu}^{(\text{m})} = -\frac{2}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta(\sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{L}_{\text{m}})}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}}$$

を得る。ここで $\tilde{T}_{\mu\nu}^{(m)}$ は Eq. (2.2.9) で与えられる Jordan フレームにおけるエネルギー運動量テンソル。この関係式は全ての種類の物質場について成立する。

次の小節において、完全流体及び相対論的粒子と同じ形を持つソースという特別なケースについて個別に議論する。

2.3.1 完全流体

Jordan フレームでは、完全流体のエネルギー運動量テンソル $\tilde{T}_{\mu\nu}^{(F)}$ は

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{\mu\nu}^{(F)}(\tilde{g}, \tilde{U}) &= (\tilde{\rho} + \tilde{p})\tilde{U}_\mu\tilde{U}_\nu + \tilde{p}\tilde{g}_{\mu\nu}, \\ \tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{U}_\mu\tilde{U}_\nu &= -1\end{aligned}\tag{2.3.2}$$

で与えられる。ここで、 $\tilde{U}_\mu$, $\tilde{\rho}$, そして $\tilde{p}$ はそれぞれ Jordan フレームにおける四次元運動量、エネルギー密度、圧力である。

また、Einstein フレームでは、

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu}^{(F)}(g, U) &= (\rho + p)U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu}, \\ g^{\mu\nu}U_\mu U_\nu &= -1\end{aligned}\tag{2.3.3}$$

が成立する。ここで U_μ , ρ , そして p はそれぞれ Einstein フレームにおける四次元運動量、エネルギー密度、圧力である。

二つのフレーム間の関係式を見つけるために、四次元運動量の規格化 Eqs. (2.3.2) 及び (2.3.3) が

$$U_\mu \equiv \sqrt{F}\tilde{U}_\mu.\tag{2.3.4}$$

であることに注意する。この結果と (2.3.1) を用いると

$$\rho = F^{-2}, \tilde{\rho} \quad p = F^{-2} \tilde{p}\tag{2.3.5}$$

を得る。

2.3.2 Massive and massless particles

粒子のエネルギー運動量テンソルについては、我々の知る限り、Jordan フレームと Einstein フレームにおける物理量の関係はまだ完全に導出されていない。そこで、ここではその詳細について述べる。我々は、共形変換のもとで不変な相対論的粒子の作用から出発する。したがって、共形変換の前と後の物理量の関係を系統的に求めることができる。

Jordan フレームでは、相対論的粒子の作用は

$$S_J^{(P)} = \frac{1}{2} \int d\tilde{\lambda} \left[\frac{1}{\tilde{e}} \left(\tilde{g}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tilde{\lambda}} \frac{dx^\beta}{d\tilde{\lambda}} \right) - \tilde{e} \tilde{m}^2 \right]\tag{2.3.6}$$

で与えられる。ここで $\tilde{m}$ は粒子の質量であり、 $\tilde{\lambda}$ は曲線のパラメータで、 $\tilde{e}$ は補助場である。

最初に $\tilde{m} \neq 0$ の場合について考える。この場合、 $\tilde{e}$ の解は運動方程式から

$$\tilde{e} = \frac{1}{\tilde{m}} \sqrt{-\tilde{g}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tilde{\lambda}} \frac{dx^\beta}{d\tilde{\lambda}}}\tag{2.3.7}$$

と得られる。この結果を作用 (2.3.6) に代入すると、massive 粒子に対する作用

$$S_J^{(M)} = -\tilde{m} \int d\tilde{\lambda} \sqrt{-\tilde{g}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tilde{\lambda}} \frac{dx^\beta}{d\tilde{\lambda}}} . \quad (2.3.8)$$

を得る。massive 粒子に関してはパラメータ $\tilde{\lambda}$ は単に固有時間を $\tilde{\tau}$ にとる。

massless(null) 粒子 $\tilde{m} = 0$, に関しては、作用 (2.3.6) は

$$S_J^{(N)} = \frac{1}{2} \int d\tilde{\lambda} \frac{1}{\tilde{e}} \left(\tilde{g}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tilde{\lambda}} \frac{dx^\beta}{d\tilde{\lambda}} \right) . \quad (2.3.9)$$

となる。massive 粒子の場合と違って、補助場 $\tilde{e}$ は運動方程式で解が定まらない。一方で、 $\tilde{e}$ に関する運動方程式は Hamiltonian constraint

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tilde{\lambda}} \frac{dx^\beta}{d\tilde{\lambda}} = 0 . \quad (2.3.10)$$

を与える。このとき曲線のパラメータ $\tilde{\lambda}$ をアフィンパラメータに選ぶことができる。しかしながら、 $\tilde{e}$ を表式に残し、 $\tilde{e}d\tilde{\lambda}$ をアフィンパラメータとして扱うこととする。この場合、 $\tilde{e}$ の自由度を残すことによって、 $\tilde{e}d\tilde{\lambda}$ という曲線のパラメータを変化させる自由度を残すことができる。

Einstein フレームにおいては、作用は

$$S_E^{(P)} = \frac{1}{2} \int d\lambda \left[\frac{1}{e} \left(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right) - e m^2 \right] \quad (2.3.11)$$

で与えられる。ここで m は相対論粒子の Einstein フレームにおける質量を表す。

作用 (2.3.6) 及び (2.3.11) の右辺第一項に注目し、共形変換 (2.2.12) を行くと

$$\tilde{e} d\tilde{\lambda} = F^{-1} e d\lambda . \quad (2.3.12)$$

を得る。この結果を用い、また作用 (2.3.6) 及び (2.3.11) の第二項を比較すると、Einstein フレームと Jordan フレームにおける粒子の質量の関係

$$\tilde{m} = \sqrt{F} m . \quad (2.3.13)$$

を得る。

massive 粒子の場合、 $\tilde{e}$ が運動方程式 (2.3.7) で固定されており、曲線のパラメータを massive 粒子の固有時間 $\tilde{\lambda} = \tilde{\tau}$ に選ぶことができる。すると、Eqs. (2.3.7) 及び (2.3.12) から

$$\tilde{e} = \frac{e}{\sqrt{F}}, \quad d\tilde{\tau} = \frac{d\tau}{\sqrt{F}}; \quad e = \frac{1}{m} \sqrt{-g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}} . \quad (2.3.14)$$

を得る。最後に、作用 (2.3.8) 及び (2.3.9) を $\tilde{g}_{\mu\nu}$ に関して変分をとると、

$$\tilde{T}_{\mu\nu}^{(M)} = \tilde{m} \tilde{u}_\mu \tilde{u}_\nu \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{d\tilde{\tau}}{dt} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}(t)) , \quad (2.3.15)$$

$$\tilde{T}_{\mu\nu}^{(N)} = \tilde{k}_\mu \tilde{k}_\nu \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\tilde{e} d\tilde{\lambda}}{dt} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}(t)) \quad (2.3.16)$$

を得る。ここで、 $\tilde{u}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tilde{\tau}}$ は Jordan フレームにおける massive 粒子の四次元運動量であり、 $\tilde{k}^\mu = \frac{dx^\mu}{\tilde{e}d\lambda}$ は Jordan フレームにおける massless 粒子の四次元運動量である。

Einstein フレームにおいては、

$$T_{\mu\nu}^{(M)} = m u_\mu u_\nu \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{d\tau}{dt} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}(t)), \quad (2.3.17)$$

$$T_{\mu\nu}^{(N)} = k_\mu k_\nu \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{ed\lambda}{dt} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}(t)) \quad (2.3.18)$$

を得る。ここで、 $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ は Einstein フレームにおける massive 粒子の四次元運動量で、 $k^\mu = \frac{dx^\mu}{ed\lambda}$ は Einstein フレームにおける massless 粒子の四次元運動量である。

massive 粒子においては、(2.3.14) の結果を用いて

$$\tilde{u}^\mu = \sqrt{F} u^\mu, \quad \tilde{u}_\mu = \frac{u_\mu}{\sqrt{F}} \quad (2.3.19)$$

であり、massless 粒子では

$$\tilde{k}^\mu = F k^\mu, \quad \tilde{k}_\mu = k_\mu \quad (2.3.20)$$

である。本節ではこれらの結果を作用から導き出した。しかし、測地線方程式を見ると、運動方程式のレベルでアフィンパラメータ $\tilde{e}d\lambda$ と $ed\lambda$ の関係を見つけることも可能である [28]。実際、四次元運動量 $\tilde{k}_\mu$ を持つ massless 粒子が Jordan フレームでアフィンパラメータ $\tilde{e}d\lambda$ の測地線方程式 $\tilde{k}^\alpha \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{k}_\mu = 0$ を満たすと、Einstein フレームにおいてアフィンパラメータ $ed\lambda$ の測地線方程式 $k^\alpha \nabla_\alpha k_\mu = 0$ を満たしていることがわかる。

2.4 Einstein-Gauss-Bonnet 重力

3章で取り扱う Einstein-Gauss-Bonnet 重力について説明する。 D 次元における作用は

$$S = \frac{1}{16\pi} \int (d^D x R + \alpha_2 (R^2 - 4R^{ab} R_{ab} + R^{abcd} R_{abcd})) \quad (2.4.1)$$

である。被積分関数の第二項を Gauss-Bonnet term とよぶ。これは Lovelock 重力

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \left(d^D x \sum_{n=0}^{[D/2]} \alpha_{(n)} \left(\frac{1}{2^n} \delta^{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n}_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_n \beta_n} \right) R^{\mu_1 \nu_1}_{\alpha_1 \beta_1} \dots R^{\mu_n \nu_n}_{\alpha_n \beta_n} \right) \quad (2.4.2)$$

において $n = 2$ までの項に限定した場合である。よく知られている事実として、 $D = 4$ のとき、Gauss-Bonnet termn の変分は全微分項となる (例えば [29] の Appendix B を参照されたい)。すなわち、 $g_{\mu\nu}$ に微小変換

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.4.3)$$

$$\delta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} \quad (2.4.4)$$

を施したとき、

$$\eta^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \quad (2.4.5)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} : \epsilon_{1234} = 1 \text{ であり、添字に関して完全反対称} \quad (2.4.6)$$

を満たすテンソル $\eta^{\mu\nu\alpha\beta}$ を用いて

$$\delta\sqrt{-g} (R^2 - 4R^{ab}R_{ab} + R^{abcd}R_{abcd}) = \sqrt{-g} \nabla_\beta (g_{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\theta}^\mu R_{\pi\tau\gamma\sigma} \eta^{\mu\theta\gamma\sigma} \eta^{\pi\tau\alpha\beta}) \quad (2.4.7)$$

となる。従って 4 次元の場合 Gauss-Bonnet の変分の積分はゼロになり、運動方程式に寄与しない。

Chapter 3

一般相対性を超えた重力理論における共変なエントロピー上限

本章では修正重力理論において共変なエントロピー上限がどのような形を持つか知るため、エントロピーの上限としてブラックホールエントロピーを採用した generalized entropy bound を提唱し、いくつかの重力理論で一般相対論の場合と同様な証明が可能であることを見る。3.1 節及び 3.2 節で簡単なレビューを行い、3.3 節から本論文の内容に入る。この章は発表済みの論文 [30] に基づく。

3.1 Wald entropy

Bardeen, Carter, Hawking ら [12] によってブラックホールの熱力学性質が指摘されたとき、重力の理論としては一般相対論が採用されていた。その後、より広い範囲の理論におけるブラックホール熱力学を扱う手法として、Wald と Iyers [31] は全ての微分同相不変な理論はブラックホールの第一法則に似た関係式を満たす保存量を持つことを発見した。この節では Wald らの手法について解説し、本論文の主題の一つである修正された重力理論におけるブラックホールエントロピーを扱う準備とする。本節では時空を n 次元多様体 M で表し、 n -形式ラグランジアン

$$L = L(\phi, \nabla_{a_1} \phi, \nabla_{a_1} \nabla_{a_2} \phi, \dots, \nabla_{a_1} \nabla_{a_2} \cdots \nabla_{a_n} \phi, \psi) \quad (3.1.1)$$

を考えることとする。ここで ϕ はダイナミカルな場の全てをさし、重力のメトリックと他の場を合わせたものである。また、 ψ はダイナミカルでない背景場全てをさす。この節で扱うラグランジアンは全て微分同相写像に対して不変である。微分形式でラグランジアンを扱う場合、微分同相写像 $f(x) : M \rightarrow M$ に対してラグランジアンが不変であるとは、ラグランジアンが

$$L(f^*(\phi)) = f^*(L) \quad (3.1.2)$$

を満たすことである。ただし、 f^* は微分同相写像 f の微分形式に対する埋め込みである。以下、特定の Killing ベクトルに対応するネーターチャージが熱力学の第一法則に類似した式を満たすことを示す。従ってそのネーターチャージをブラックホールのエントロピーと考えることができる。

3.1.1 準備としての定理の証明

ブラックホールエントロピーがネーターチャージだと示す準備として、次の定理を証明する。

定理 3.1.1. Presymplectic current Θ を

$$\delta L = E_\phi \delta \phi + d\Theta. \quad (3.1.3)$$

と定義する。ここで δ は任意の場に対する変分である。このように定義した Presymplectic current Θ は

$$\Theta_{a_1 \dots a_{n-1}} = 2E_R^{abcd} \epsilon_{aa_1 \dots a_{n-1}} \nabla_b \delta g_{cd} + \Theta' \quad (3.1.4)$$

と表すことができる。ここで g_{ab} は多様体上のメトリックであり、 $\epsilon_{aa_1 \dots a_{n-1}}$ は n 次元多様体 M 上の体積形式である。すなわち、 M の任意の局所座標 $(x_1 \dots x_n)$ をとり、その座標における計量の行列式を $|g|$ としたとき

$$\epsilon = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (3.1.5)$$

を満たす。特に Θ'_s は

$$\Theta' = A^{ab}(\phi) \delta g_{ab} + \sum_{i=0}^{m-1} B_i(\phi)^{ab c d a_1 \dots a_n} \delta \nabla_{(a_1} \dots \nabla_{a_i)} R_{abcd} + \sum_{i=0}^{k-1} C_i(\phi)^{a_1 \dots a_n} \delta \nabla_{(a_1} \dots \nabla_{a_i)} \psi \quad (3.1.6)$$

の形をとる。ここで R_{abcd} は g_{ab} によって生成されるリーマン曲率テンソルである。

証明. Θ' は δ が微分の左側にある項のみによって構成され、 Θ の他の項は δ が微分の左側にある項を含まない。すなわち、この定理が主張するのは、 δ が微分の左側にある項が、リーマンテンソル R_{abcd} を独立な場として考えた時の運動方程式に比例するように Θ を取ることができるということである。従ってここで主張するのは、 Θ を、 δ を微分の右側に持つ全ての項がリーマンテンソル R_{abcd} を独立な場として考えたときの運動方程式に比例するようにとることができるということである。以下で証明を与える。 n -form のラグランジアン L が $L = L\epsilon$ と表されるとする。ここで M 上の体積形式である。このとき、 n 形式ラグランジアンの変分は

$$\delta L = \epsilon \left(\frac{\partial L}{\partial g_{ab}} \delta g_{ab} + \frac{\partial L}{\partial R_{abcd}} \delta R_{abcd} + \dots + \frac{\partial L}{\partial \nabla_{(a_1} \dots \nabla_{a_m)} R_{abcd}} \delta \nabla_{(a_1} \dots \nabla_{a_m)} R_{abcd} + \frac{\partial L}{\partial \psi} \delta \psi + \dots + \frac{\partial L}{\partial \nabla_{(a_1} \dots \nabla_{a_m)} \psi} \delta \nabla_{(a_1} \dots \nabla_{a_m)} \psi \right) \quad (3.1.7)$$

となる。ここで各項に対して部分積分を行う。例えば

$$\epsilon \frac{\partial L}{\partial \nabla_{(a_1} \dots \nabla_{a_i)} R_{abcd}} \delta \nabla_{(a_1} \dots \nabla_{a_i)} R_{abcd} \quad (3.1.8)$$

の項に対して部分積分を行うと以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\epsilon \frac{\partial L}{\partial \nabla_{(a_1 \dots \nabla_{a_i})} R_{abcd}} \delta \nabla_{(a_1 \dots \nabla_{a_i})} R_{abcd} &= \epsilon \left(\frac{\partial L}{\partial \nabla_{(a_1 \dots \nabla_{a_i})} R_{abcd}} \nabla_{a_1} (\delta \nabla_{(a_2 \dots \nabla_{a_i})} R_{abcd}) \right) \\
&\quad + \epsilon \cdot (\text{terms proportional to } \nabla \delta g) \\
&= \nabla_{a_1} \left(\epsilon \frac{\partial L}{\partial \nabla_{(a_1 \dots \nabla_{a_i})} R_{abcd}} \delta \nabla_{(a_2 \dots \nabla_{a_i})} R_{abcd} \right) \\
&\quad + \nabla_{a_1} (\epsilon (\text{terms proportional to } \delta g)) \\
&\quad - \epsilon \nabla_{a_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \nabla_{(a_1 \dots \nabla_{a_i})} R_{abcd}} \right) \delta \nabla_{(a_2 \dots \nabla_{a_i})} R_{abcd} \\
&\quad + \epsilon (\text{terms proportional to } \delta g) \\
&= dV - \epsilon \nabla_{a_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \nabla_{(a_1 \dots \nabla_{a_i})} R_{abcd}} \right) \delta \nabla_{(a_2 \dots \nabla_{a_i})} R_{abcd} \\
&\quad + \epsilon (\text{terms proportional to } \delta g) \tag{3.1.9}
\end{aligned}$$

ここで d は外微分であり、 V は $n-1$ 形式

$$V_{b_1 \dots b_{n-1}} = \epsilon_{a_1 b_1 \dots b_{n-1}} \left(\frac{\partial L}{\partial \nabla_{(a_1 \dots \nabla_{a_i})} R_{abcd}} \delta \nabla_{(a_2 \dots \nabla_{a_i})} R_{abcd} \right) + \epsilon (\text{terms proportional to } \delta g) \tag{3.1.10}$$

である。各項にこの変換を繰り返し施すと

$$\delta \mathbf{L} = \epsilon (A_g^{ab} \delta g_{ab} + E_R^{abcd} \delta R_{abcd} + E_\psi \delta \psi) + d\tilde{\Theta} \tag{3.1.11}$$

を得る。ここで A_g^{ab} は δg に比例する項の合計であり、 E_R^{abcd} は R_{abcd} に関する運動方程式

$$E_R^{abcd} = \epsilon \left(\frac{\partial L}{\partial R_{abcd}} - \nabla_{a_1} \frac{\partial L}{\partial \nabla_{a_1} R_{abcd}} + \dots + (-1)^m \nabla_{(a_1} \dots \nabla_{a_n)} \right) \tag{3.1.12}$$

である。 δR_{abcd} を δg を使って書き直し、 E_R^{abcd} の添字の反対称性を用いると

$$E_R^{abcd} \delta R_{abcd} = 2E_R^{abcd} \nabla_a \nabla_d \delta g_{bc} + E_R^{abcd} R_{abc}^e \delta g_{cd} \tag{3.1.13}$$

この表式を用いると、

$$\delta \mathbf{L} = \epsilon (\tilde{A}_g^{bc} \delta g_{bc} + 2\nabla_a \nabla_d E_R^{abcd} \delta g_{bc} + E_\psi \delta \psi) + d(2\mathbf{E}^{bcd} \nabla_d g_{bc} - 2\nabla_d \mathbf{E}^{bcd} \delta g_{bc} + \tilde{\Theta}) \tag{3.1.14}$$

を得る。ここで $\mathbf{E}^{bcd}$ は

$$(\mathbf{E}^{bcd})_{b_2 \dots b_n} = E_R^{abcd} \epsilon_{ab_2 \dots b_n} \tag{3.1.15}$$

で定義される $(n-1)$ 形式である。また $\tilde{A}^{bc}$ は

$$\tilde{A}^{bc} = A_g^{bc} + E_R^{pqr b} R_{pqr}^c \tag{3.1.16}$$

で定義される。(3.1.3) と (3.1.14) を比べると、

$$\Theta = 2\mathbf{E}_R^{bcd}\nabla_d\delta g_{bc} + \tilde{\Theta} - 2\nabla_d\mathbf{E}_R^{bcd}\delta g_{bc} \quad (3.1.17)$$

を得る。従って、 Θ' を

$$\Theta' = \tilde{\Theta} - 2\nabla_d\mathbf{E}_R^{bcd}\delta g_{bc} \quad (3.1.18)$$

と定義すると、この Θ' は (3.1.6) の形を満たす。したがって Θ は (3.1.4) の形にとることができる。

■

以下ではこの定理を用いて特定のキリングベクトルによって生成される微分同相変換に対するネーターカレントがブラックホールエントロピーになることを見る。カレント $(n-1)$ -form $\mathbf{J}$ を

$$\mathbf{J} = \Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) - \xi \cdot \mathbf{L} \quad (3.1.19)$$

と定義する。 ξ は任意のキリングベクトルである。ここで $\Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi)$ の一つ目の引数は Θ にどのような場が含まれているのかを示している。たとえば現在考えているラグランジアンに重力場のみが含まれている場合は ϕ は重力場 g_{ab} となる。また、二つ目の引数は (3.1.3) における変分 δ としてどのような変分をとっているかを示す。この場合は変分として ξ 方向のリー微分を行っている。 $(n-1)$ -form $\mathbf{J}$ をカレントと呼ぶのは、外微分を作用させた結果が運動方程式に比例し、したがって運動方程式が成立するときはゼロになるためである。実際 (3.1.19) の両辺に外微分を作用させると、

$$d\mathbf{J} = d\Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) - d(\xi \cdot \mathbf{L}) \quad (3.1.20)$$

$$= -\mathbf{E}_\phi \mathcal{L}_\xi\phi \quad (3.1.21)$$

となる。運動方程式が満たされている時この右辺は当然ゼロであり、カレント $(n-1)$ -form は閉形式である。また、local な場のみで構成されていることから、

$$\mathbf{J} = d\mathbf{Q} \quad (3.1.22)$$

を満たす $(n-2)$ -form $\mathbf{Q}$ が存在することが言える [32]。この $\mathbf{Q}$ は通常 of 解析力学におけるネーターチャージ（正確には時間一定面上での被積分関数）に相当するものである。したがって $\mathbf{Q}$ をネーターチャージ $(n-2)$ -form とよぶ。この $\mathbf{Q}$ の持つ性質として、 $\mathbf{Q}$ におけるキリングベクトル ξ の依存性を分離することができる。すなわち、以下の定理が成立する。

定理 3.1.2. $\mathbf{Q}$ は次のように分解することができる。

$$\mathbf{Q} = \mathbf{W}_c(\phi)\xi^c + \mathbf{X}^{cd}(\phi)\nabla_{[c}\xi_{d]} + \mathbf{Y}(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) + d\mathbf{Z}(\phi, \xi) \quad (3.1.23)$$

ここで、 $\mathbf{W}_c, \mathbf{X}^{cd}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ local な場とその微分によって構成される関数である。また、 $\mathbf{Y}$ は $\mathcal{L}_\xi\phi$ に、 $\mathbf{Z}$ は ξ に線形であるとする。また $\mathbf{Q}$ によって $\mathbf{W}_c, \mathbf{X}^{cd}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ は一意に決定されないが、 $\mathbf{X}^{cd}$ が

$$(\mathbf{X}^{cd})_{c_1\dots c_n} = -E_R^{abc}\epsilon_{abc_1\dots c_n}, \quad (3.1.24)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z} = 0 \quad (3.1.25)$$

を満たすように選ぶことができる。

証明. 前述のように Θ を選ぶと、

$$\mathbf{J} = 2\mathbf{E}_R^{bcd}\nabla_b(\nabla_c\xi_d + \nabla_d\xi_c) + \Theta'(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) - \xi \cdot \mathbf{L} \quad (3.1.26)$$

となる。この $\mathbf{J}$ に対して $\mathbf{J} = d\mathbf{Q}$ となる $\mathbf{Q}$ は ξ の二階以上の高階微分項を含まない。なぜなら、まず $\mathbf{J}$ に含まれる $\Theta'(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi)$ は (3.1.6) および (3.1.17) の形から、 $\nabla_a\delta\phi$ などの微分を含まないので、 ξ と $\nabla\xi$ に線形であり、 ξ の二階以上の微分は存在しない。また $\mathbf{E}_R^{bcd}\nabla_d\nabla_c\xi_b$ の項は $\mathbf{E}_R^{bcd}$ の添字 cd の反対称性 (3.1.15) より曲率テンソルとなって ξ の微分項はなくなる。

したがって残りの $\mathbf{E}_R^{bcd}\nabla_b\nabla_c\xi_d$ だけが $\mathbf{J}$ 中の ξ の二階微分項となる。よって $\mathbf{Q}$ 中の ξ の一階微分項は、外微分されて $\mathbf{E}_R^{bcd}\nabla_b\nabla_c\xi_d$ を出すものだけを考えれば良い。したがって $\mathbf{Q}$ は

$$\mathbf{Q} = \mathbf{W}_c(\phi)\xi^c + \mathbf{X}^{cd}\nabla_{[c}\xi_{d]} \quad (3.1.27)$$

のように ξ に比例する項と ξ の一階微分に比例する項に分解したとき

$$(\mathbf{X}^{ad})_{C\dots m_n} = -E_R^{abcd}\epsilon_{abc_1\dots c_n} \quad (3.1.28)$$

として良い。実際右辺を外微分すると二階微分項としては $\mathbf{E}_R^{bcd}\nabla_b\nabla_c\xi_d$ だけが得られる。 Θ の不定性から $\mathbf{J}$ の定義 (3.1.19) には

$$\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J} + d(\xi \cdot \boldsymbol{\mu}) + d\mathbf{Y}(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) \quad (3.1.29)$$

の不定性がある。 $\mathbf{Q}$ の定義からくる完全形式分の不定性を入れると

$$\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q} + \xi \cdot \boldsymbol{\mu} + \mathbf{Y}(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) + d\mathbf{Z} \quad (3.1.30)$$

だけの不定性がある。したがって

$$\mathbf{Q} = \mathbf{W}_c\xi^c + \mathbf{X}^{cd}\nabla_{[c}\xi_{d]} + \mathbf{Y}(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) + d\mathbf{Z} \quad (3.1.31)$$

と表すことができる。

■

3.1.2 ブラックホール第一法則

この性質を用いて実際に特定のキリングベクトルに対して $\mathbf{Q}$ を積分して得られるネーターチャージがブラックホールエントロピーとなることを示す。カレント n -form $\mathbf{J}$ に任意の変分 δ を作用させると

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{J} &= \delta\Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) - \xi \cdot \delta\mathbf{L} \\ &= \delta\Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) - \xi \cdot d\Theta(\phi, \delta\phi) \\ &= \delta\Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) - \mathcal{L}_\xi\Theta(\phi, \delta\phi) + d(\xi \cdot \Theta(\phi, \delta\phi)) \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

を得る。ただし二行目の変形で $\mathbf{E}\phi = 0$ を用いた。シンプレクティックカレント $\boldsymbol{\omega}$ を

$$\boldsymbol{\omega}(\phi, \delta\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) := \delta\Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) - \mathcal{L}_\xi\Theta(\phi, \delta\phi) \quad (3.1.33)$$

で定義する。定義から

$$\omega(\phi, \delta\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) = \delta\mathbf{J} - d(\xi \cdot \Theta) \quad (3.1.34)$$

が成立する。

ここで二つの仮定を導入する。一つは ξ がダイナミカルな場の対称性であること、つまり $\mathcal{L}_\xi\phi = 0$ が成立することである。もう一つは $\delta\phi$ が線形の運動方程式を満たすこと、つまり $\delta\mathbf{E} = 0$ であることである。 $\mathcal{L}_\xi\phi = 0$ から $\omega(\phi, \delta\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) = 0$ 、 $\delta\mathbf{E} = 0$ から $\mathbf{J} = d\mathbf{Q}$ を満たす $\mathbf{Q}$ が存在し、 $\delta\mathbf{J} = \delta d\mathbf{Q} = d\delta\mathbf{Q}$ が成立する。従って

$$d\delta\mathbf{Q} - d(\xi \cdot \Theta) = 0 \quad (3.1.35)$$

が成立する。あるコーシー面 Σ 上で両辺を積分すると

$$\int_{\partial\Sigma} (\delta\mathbf{Q}[\xi] - \xi \cdot \Theta) = 0 \quad (3.1.36)$$

が得られる。

ξ^a が生成するベクトル場に沿った時間発展に対応するハミルトニアン $H[\xi^a]$ は任意の場の変分 δ に対して

$$\delta H[\xi^a] = \Omega(\phi, \delta\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) := \int_{\partial\Sigma} \omega(\phi, \delta\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) \quad (3.1.37)$$

を満たすことが知られている [33]。従って $H[\xi]$ が存在するとき (3.1.34) より

$$\delta H[\xi] = \delta \int_C \mathbf{J} - \int_C d(\xi \cdot \Theta) \quad (3.1.38)$$

$$= \delta \int_C \mathbf{J} - \int_{\partial C} d(\xi \cdot \Theta) \quad (3.1.39)$$

ここで C は ξ によって生成されるベクトル場によるコーシー面で ∂C はその境界である。ここで

$$\delta \int_{\partial C} \xi \cdot \mathbf{B} = \int_{\partial C} \xi \cdot \Theta \quad (3.1.40)$$

となる $(n-1)$ -form $\mathbf{B}$ を定義する。このとき $H[\xi]$ は

$$H[\xi] = \int_C \mathbf{J} - \int_{\partial C} \xi \cdot \mathbf{B} \quad (3.1.41)$$

と表すことができる。運動方程式が成立する時、すなわち $\mathbf{J} = d\mathbf{Q}$ が成立する場合、 $H[\xi]$ は

$$H[\xi] = \int_{\partial C} (\mathbf{Q}[\xi] - \xi \cdot \mathbf{B}) \quad (3.1.42)$$

となる。このとき C を asymptotically flat な空間とすると、 ∂C は無限遠方となる。特に、killing ベクトル ξ を

$$\xi = t^a + \Omega_{(i)} \varphi_{(i)}^a \quad (3.1.43)$$

ととる。ここで t^a は無限遠において、平坦な時空の時間並進と一致する Killing ベクトルであり、 $\varphi_{(i)}^a$ は無限遠において平坦な時空の回転並進と一致する Killing ベクトルである。これらを用いて次の定理が成り立つ。

定理 3.1.3. Killing ベクトル ξ が (3.1.43) の形で与えられるとする。また、 ϕ を asymptotically flat な bifurcation killing horizon を持つブラックホール解とし、 $\delta\phi$ が ϕ に関する線形運動方程式の解とする。 S を

$$S = 2\pi \int_{\Sigma} \mathbf{X}^{cd}(\phi) \epsilon_{cd} \quad (3.1.44)$$

で定義する。ここで $\mathbf{X}^{cd}$ は前述の $Q[\xi]$ の分解で与えられた項であり、 ϵ_{cd} は bifurcation surface である $(n-2)$ 次元超曲面 Σ の binormal である。このとき、

$$\frac{\kappa}{2\pi} \delta S = \delta \mathcal{E} - \Omega_{(i)} \delta \mathcal{J}_{(i)} \quad (3.1.45)$$

が成立する。

ただし、 κ はブラックホールの surface gravity で、 $\mathcal{E}$ 及び $\mathcal{J}_{(i)}$ はそれぞれ

$$\mathcal{E} := \int_{\partial C} (\mathbf{Q}[t] - t \cdot \mathbf{B}), \quad (3.1.46)$$

$$\mathcal{J}_{(i)} := \int_{\partial C} (\mathbf{Q}[\varphi] - \varphi \cdot \mathbf{B}) \quad (3.1.47)$$

で定義される。すなわち、(3.1.42) で $\xi = t^a$ あるいは $\xi = \varphi^a$ とした時のハミルトニアン $H[\xi]$ であり、それぞれ canonical energy あるいは canonical angular momentum と呼ばれる。実際、一般相対論においてはこれらの量は ADM mass や Komar mass に一致する [31]。

証明. $\mathcal{E}$ と $\mathcal{J}_{(i)}$ の定義より、

$$\delta \int_{\Sigma} \mathbf{Q}[\xi] = \frac{\kappa}{2\pi} \delta S \quad (3.1.48)$$

を示せば、(3.1.36) 及び bifurcation surface 上で $\xi = 0$ より (3.1.45) が成立する。したがって (3.1.48) を示す。 Q の Σ 上での積分において、 Q を (3.1.23) を満たすように分解する。すると、bifurcation surface 上で $\xi = 0$ より $\mathbf{W}_a \xi^a$ の項は寄与しない。また、全微分項である $d\mathbf{Z}$ の項も寄与しない。

ξ^a が Killing vector であるため、 $\mathcal{L}_{\xi} \phi = 0$ である。 $\mathbf{Y}(\phi, \mathcal{L}_{\xi} \phi)$ は $\mathcal{L}_{\xi} \phi$ に対して線型であることから $\delta \mathbf{Y}(\phi, \mathcal{L}_{\xi} \phi)$ のうち、 $\mathcal{L}_{\xi} \phi$ でない部分に δ があたる項 $\mathbf{Y}(\phi + \delta\phi, \mathcal{L}_{\xi} \phi)$ は $\mathcal{L}_{\xi} \phi = 0$ が残っているため 0 になる。したがって寄与するのは

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(\phi, \mathcal{L}_{\xi} \delta\phi) &= \mathcal{L}_{\xi} \mathbf{Y}(\phi, \delta\phi) \\ &= \xi \cdot d\mathbf{Y} + d(\xi \cdot \mathbf{Y}) \end{aligned} \quad (3.1.49)$$

の項である。最終行の一項目は Σ 上で 0 になり、二項目は Σ 上で積分すると 0 になる。したがって

$$\int_{\Sigma} \delta \mathbf{Q}[\xi] = \int_{\Sigma} \delta \mathbf{X}^{cd} \nabla_c \xi_d. \quad (3.1.50)$$

ここで、 ξ_a は Σ 上で 0 で一定であり、 $\nabla_c \xi_d$ は Σ に接する方向の成分は 0 になる。したがって $\nabla_c \xi_d$ は binormal ϵ_{cd} に比例している。

$$(\nabla \xi)^2 = -2\kappa^2 \quad (3.1.51)$$

より

$$\nabla_c \xi_d = \kappa \epsilon_{cd} \quad (3.1.52)$$

が成立する。このとき w_{cd} を

$$w_{cd} := \nabla_{[c} \xi_{d]} - \kappa \epsilon_{cd} \quad (3.1.53)$$

と定義する。背景場においては $w_{cd} = 0$ だが、変分 δ をかけることによりノンゼロの値をとりうる。このとき $\delta \xi^a = 0$ 、また bifurcation surface Σ 上で $\xi^a = 0$ であることから $\delta(\nabla_c \xi^d) = 0$ であり、これを用いて

$$\begin{aligned} \delta w_{cd} &= \delta (g_{a[d} (\nabla_{c]} \xi^a - \kappa \epsilon_{c]}^a)) \\ &= \kappa (g_{a[d} \delta \epsilon_{c]}^a) \end{aligned} \quad (3.1.54)$$

を得る。ここで $\delta \epsilon_c^a$ の下つきの足は Σ に接する項を持たない。また $\delta \epsilon_c^d \epsilon_d^c = 0$ より $g_{a[d} \delta \epsilon_{c]}^a$ は二つの足がどちらも Σ に直交する成分を持たない。したがって

$$\begin{aligned} \delta \int_{\Sigma} \mathbf{Q}[\xi] &= \delta \int_{\Sigma} \mathbf{X}^{cd}(\phi) [\kappa \epsilon_{cd} + w_{cd}] \\ &= \frac{\kappa}{2\pi} \delta S + \int_{\Sigma} \mathbf{X}^{cd}(\phi) \delta w_{cd} \end{aligned} \quad (3.1.55)$$

ここで $\mathcal{L}_{\xi} \mathbf{X}^{cd}(\phi) = 0$ である。このとき、 $\mathbf{X}^{cd}$ が ξ^a の null geodesic としての parameter λ の反転に関して不変であることが知られている [34]。一方 δw_{cd} の二つの足は Σ に接する方向と直行する方向の組み合わせであるので λ の反転に関して符号が反転するようになっている。しかし $\mathbf{X}^{cd} \delta w_{cd}$ の積分は $(D-2)$ -form $\mathbf{X}^{cd} \delta w_{cd}$ を Σ 上に引き戻した上で行われているため λ の反転は恒等写像として作用する。よって (3.1.55) の第二項は λ の反転に対して同時に符号が不変であることと反対となることが成り立つので 0 になる。したがって (3.1.55) から

$$\frac{\kappa}{2\pi} \delta S_{wald} = \delta \int_{\Sigma} \mathbf{Q}[\xi] \quad (3.1.56)$$

が成立する。 ■

今示された式 (3.1.44) は、まさに一般相対論において最初にブラックホールの性質と熱力学の各法則の類似性を指摘した [12] において第一法則に対応するものとして示されたブラックホールの性質を一般の微分同相不変な理論に対して拡張したものである。

3.2 Bousso bound in Gauss bonnnet gravity

3.2.1 Bousso bound

ブラックホールの持つエントロピーが本当に熱力学のエントロピーと同質のものだとすれば、宇宙を一つの孤立系とみなすことができ、通常の熱力学の第二法則より、面積の変

化に基づくブラックホールエントロピーと、ブラックホール以外の物質のエントロピーの合計は常に広義単調増加でなければならない。すなわちブラックホールのエントロピーの変化を ΔS_{BH} 、物質のエントロピーの総量の変化を ΔS_{matter} とすると

$$\Delta S_{BH} - \Delta S_{matter} \geq 0. \quad (3.2.1)$$

これを generalized second law (GSL) とよび、Bekenstein [35] によって提唱された。これを用いると、物質の熱力学系のもつエントロピー S とエネルギー E の間に

$$S/E \lesssim 2\pi R, \quad (3.2.2)$$

という不等式が成立することが示される。ここで R は系をおおう最小の球の半径である。この不等式を Bekenstein bound と呼ぶ [36]。また、Bekenstein bound は重力系の安定性条件 $2E \leq R$ と半径 R の球の面積 A を用いて

$$S \leq \frac{A}{4} \quad (3.2.3)$$

と表すことができる。

このエントロピーとエネルギー（あるいは面積）の関係は熱力学系のみにも適用可能であると考えられているが、エントロピーが系の状態の自由度に対応していると考え、この関係を時空上の領域一般に対して適用できるのではないかという試みがなされている。Bousso は 1994 年に Bousso bound (Covariant Entropy bound) を提唱した [1]。この bound の主張は以下の通りである。

D 次元多様体 M 上において、 $(D-2)$ 次元連結超曲面 B をとる。 B 上の各点から B に直交して放たれる null geodesic は 4 種類ある。すなわち、未来向きか過去向きか、また空間的座標が増える方か減る方かである。その 4 種類の null geodesic の内、 B 上で expansion θ が非正であるものを選ぶ。それらの null geodesic を θ が正になるか、時空の境界または特異点に到達するまで伸ばす。 B 上の各点から発せられるこれらの null geodesic でできる $(D-1)$ 次元超曲面を light sheet と呼ぶ。light sheet 上の物質のエントロピー S_L に対して B の面積 A が制限を与える。すなわち

$$S(L) \leq \frac{A}{4} \quad (3.2.4)$$

このような予想がなされた動機を説明する。Bekenstein bound を時空中の領域に対する制限に拡張することを考えるとき、二つの問題がある。Bekenstein bound は熱力学系を囲むように取られた半径 R の球、つまり空間的超曲面中の物質のエントロピーを境界の面積によって制限していた。また、その半径は重力による曲率の影響を受けない程度の長さでなければいけなかった。制限を与える対象を物質の系から時空中の任意の領域に拡張しようとしたとき、超曲面としてどのようなものをとるのが妥当なのか考えなければならない。候補としては空間的超曲面か光的超曲面が挙げられる。状態の自由度の性質は理論そのものの性質であると考え、指導原理として一般相対論を導入することは妥当である。このとき、一般座標変換によって同じ境界を持つ空間的超曲面は互いに移り変わるため、一つの空間的超曲面を指定すると一般共変性を破ることになる。したがって、一般共変性を指導原理としたまま空間的超曲面上に上限を与える場合は、境界 B を持つ全ての

空間的超曲面上の物質のエントロピーに対して上限を与えなければならない。しかしこのような制限に対して一つの反例をあげることができる。平坦な FRLW 宇宙

$$ds^2 = a(\eta)^2(-d\eta^2 + d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2) \quad (3.2.5)$$

で、物質のエントロピーの共動座標に対する密度 s が $s=\text{const}$ だとする。このとき $\eta=\text{const}$, $r=\text{const}$ で指定される $(D-2)$ 次元超曲面 B を境界にもつ空間的超曲面の内、 $\eta=\text{const}$ で指定される空間的超曲面に含まれる物質のエントロピーの量は $\text{const} \times \chi^{D-1}$ である。一方境界 B の面積 A は $\text{const} \times (a(\eta)\chi)^{D-2}$ である。したがって η を固定したまま境界 B を指定する r を大きくしていくといずれ $S > \frac{A}{4}$ となり、bound が破れる。よって、空間的超曲面に対してエントロピーの上限を与えるのは不可能であり、光的超曲面に対してエントロピーの上限を与えなければならない。ここで問題になるのが、超曲面のどの部分に対して制限を与えるのかということである。既存のエントロピーの制限は境界の内側に存在する物質に対して課せられていた。空間的超曲面の場合は動径方向の座標を用いて内側を定義できていたが、光的超曲面の場合は一般にそのような動径座標が存在するとも限らず、また一般共変性を指導原理とするため、これに類する制限がある境界 B を通る光的超曲面に対して与えるためには、光的超曲面のうち B より内側である部分を定義しなければならない。内側の方向を、 $(D-2)$ 次元超曲面の面積要素が減少する方向と定める。この内側の定義は座標の取り方に依らない。したがって expansion θ が非正である方向にすすむ null geodesic によって構成される超曲面がその内側の時空に対して制限を与える超曲面であると考えられる。これが Bousso bound の提唱された経緯である。

Bousso bound には厳密な証明は与えられていない。いくつかの系に関して証明が与えられている。例えば Flanagan, Marolf and Wald [37] は考える物質が流体によって近似できるものだけだと考えられる場合において証明を与えた。さらに Flanagan らは light sheet の端点が時空の境界か特異点だけでなく、任意の 2 次元空間的超曲面 B' である場合を考え、より強い制限

$$S_L \leq \frac{A(B) - A(B')}{4} \quad (3.2.6)$$

を与えた。 $A(B')$ は B' の面積である。本論文においてはこのより強い Bousso bound を取り扱うこととする。

3.3 Extention of Bousso bound to D-dimensional GR

4 次元 GR では、Flanagan, Marolf and Wald [37] によって、thermodynamic limit における Bousso bound が 2 つの異なった仮定の下で証明された。その後、Strominger and Thompson [38] らによって、異なる仮定を用いた別証明が与えられた。本研究では後者の証明を D 次元時空に拡張する。

Set Up

D 次元時空において、 B を連結 $(D-2)$ 次元空間的曲面 B から発せられた expansion が非正であるヌル測地線によって生成され、別の連結 $(D-2)$ 次元空間的曲面 B' を終端とする Light sheet とする。各ヌル測地線上のアフィンパラメータ λ は、 L 上で $0 \leq \lambda \leq 1$ 、 B 上で $\lambda = 0$ 、 B' 上で $\lambda = 1$ となるように選択する。 $x = (x_1, \dots, x_{D-2})$ を B 上の座標系、 $h(x)$ を B 上の誘導計量の行列式とする。ヌル測地線上のすべての点が $x = (x_1, \dots, x_{D-2})$

の同じ値を共有するように、 x を L 上の任意の場所に拡張することによって、 (x, λ) を L 上の座標系に変換することができる。このとき、 L 上のヌルベクトル $k^a = \pm(\partial/\partial\lambda)^a$ を定義することができる。ただし $\pm$ は light sheet L が過去むきに伸びているか未来向きに伸びているかによって決定する。また、 L 上の関数 $\mathcal{A}(x, \lambda)$ を

$$A(x, \lambda) := \exp\left(\int_0^\lambda d\tilde{\lambda} \theta(x, \lambda)\right) \quad (3.3.1)$$

と定義する。 $\theta(x, \lambda)$ はヌル測地線の congruence の expansion である。すなわち $\theta(x, \lambda) = \nabla_a(\partial/\partial\lambda)^a$ である。 L 上のある関数 $f(x)$ の積分は区間 $0 \leq \lambda \leq 1$ 上の積分と B 上の積分に分割して表すことができる。すなわち、

$$\int_L f = \int_B d^{D-2}x \sqrt{h(x)} \int_0^1 d\lambda f(x, \lambda) \mathcal{A}(x, \lambda) \quad (3.3.2)$$

である。また、 B と B' の間の面積の違いは

$$A(B) - A(B') = \int_B d^{D-2}x \sqrt{h(x)} [\mathcal{A}(x, 0) - \mathcal{A}(x, 1)] \quad (3.3.3)$$

で表される。熱力学極限において、物質のエントロピーを D 次元エントロピーフラックスベクトル $s^a(x)$ で表すことができるとする。この時、 L 上の関数 $s(x, \lambda)$ を

$$s(x, \lambda) \equiv -k_a s^a|_L \quad (3.3.4)$$

で定義する。この $s(x, \lambda)$ を用いて、light sheet L 上を通過するエントロピーの量は

$$S_L = \int_B d^{D-2}x \sqrt{h(x)} \int_0^1 d\lambda s(x, \lambda) \mathcal{A}(x, \lambda) \quad (3.3.5)$$

となる。

Bousso らは 4 次元 GR における証明に以下の二つの仮定

$$(i) \ s'(x, \lambda) \leq 2\pi \mathcal{T}(x, \lambda), \quad \mathcal{T} := T_{ab} k^a k^b, \quad (3.3.6)$$

$$(ii) \ s(x, 0) \leq -\frac{1}{4} \mathcal{A}'(x, 0) = -\frac{1}{4} \theta(x, 0) \quad (3.3.7)$$

を用いた [39]。ここで $\prime$ は λ に関する微分を意味し、 T_{ab} はストレス・エネルギーテンソルを意味する。これらの仮定の物理的な意味は後述する。我々の行う D 次元の証明においてもこれらの仮定を使用する。

証明. 仮定 (i) より、

$$\begin{aligned} s(x, \lambda) &= \int_0^\lambda d\tilde{\lambda} s'(x, \tilde{\lambda}) + s(x, 0) \\ &\leq 2\pi \int_0^\lambda d\tilde{\lambda} \mathcal{T}(x, \tilde{\lambda}) + s(x, 0) \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

を得る。また、Raichaudhuri 方程式とアインシュタイン方程式より

$$\mathcal{T} = -\frac{D-2}{8\pi} \frac{G''}{G} - \frac{1}{8\pi} \sigma_{ab} \sigma^{ab} \leq -\frac{D-2}{8\pi} \frac{G''}{G} \quad (3.3.9)$$

を得る。 σ_{ab} はヌル測地線 congruence の shear(せん断) である。また、関数 G を

$$G(x, \lambda) := [\mathcal{A}(x, \lambda)]^{\frac{1}{D-2}} \quad (3.3.10)$$

で定義した。これらより、

$$\begin{aligned} s(x, \lambda) &\leq 2\pi \int_0^\lambda d\tilde{\lambda} \left[-\frac{D-2}{8\pi} \frac{G''(x, \tilde{\lambda})}{G(x, \tilde{\lambda})} \right] + s(x, 0) \\ &= \frac{D-2}{4} \left[\frac{G'(x, 0)}{G(x, 0)} - \frac{G'(x, \lambda)}{G(x, \lambda)} \right] - \frac{D-2}{4} \int_0^\lambda d\tilde{\lambda} \left[\frac{G'(x, \tilde{\lambda})}{G(x, \tilde{\lambda})} \right]^2 + s(x, 0) \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

を得る。ここで仮定 (ii) および $G(x, 0) = \mathcal{A}(x, 0) = 1$ を用いると、

$$\begin{aligned} s(x, \lambda) &\leq -\frac{D-2}{4} \frac{G'(x, \lambda)}{G(x, \lambda)} - \frac{D-2}{4} \int_0^\lambda d\tilde{\lambda} \left[\frac{G'(x, \tilde{\lambda})}{G(x, \tilde{\lambda})} \right]^2 \\ &\leq -\frac{D-2}{4} \frac{G'(x, \lambda)}{G(x, \lambda)} = -\frac{1}{4} \frac{\mathcal{A}'(x, \lambda)}{\mathcal{A}(x, \lambda)} \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

を得る。この式を L 上で積分することで Bousso bound を得る。 ■

仮定 (i) の動機

Bousso, Flanagan and D. Marolf [39] ([38] も参照) が既に主張しているように、(3.3.7) の仮定 (i) は単にエントロピーフラックスの変化率がエネルギーフラックスより小さくなくてはならないというだけのことである。このため、熱力学的近似が有効である限り、仮定 (i) が成立することが期待される。

別の観点から見ると、この仮定 (i) はある種の Bekenstein bound の帰結と考えることもできる。ここで、 B の部分空間 ΔB と、曲率半径より十分小さい区間 $[\lambda_1, \lambda_2]$ ($\subset [0, 1]$) を考える。ここで L の部分空間 $\Delta L := \{(x, \lambda) \mid x \in \Delta B, \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]\}$ に対して次のような Bekenstein bound のような不等式が成り立つとする。

$$\int_{\Delta B} d^{D-2}x \sqrt{h(x)} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \mathcal{A}(x, \lambda) \times [s(x, \lambda) - s(x, \lambda_1) - 2\pi(\lambda - \lambda_1)\mathcal{T}(x, \lambda)] \leq 0. \quad (3.3.13)$$

この不等式を Bekenstein bound と呼ぶのは、

$$\int_{\Delta B} d^{D-2}x \sqrt{h(x)} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \mathcal{A}(x, \lambda) [s(x, \lambda) - s(x, \lambda_1)] \quad (3.3.14)$$

の項が L の区間 $[\lambda_1, \lambda_2]$ に分布している物質のエントロピーの量であり、

$$\int_{\Delta B} d^{D-2}x \sqrt{h(x)} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \mathcal{A}(x, \lambda) \times [2\pi(\lambda - \lambda_1) \mathcal{T}(x, \lambda)] \quad (3.3.15)$$

の項が同じ区間におけるエネルギーの密度と解釈できるためである。

任意の ΔB に対してこの不等式が成立するためには被積分関数が負である必要がある。従って

$$s(x, \lambda) - s(x, \lambda_1) \leq 2\pi(\lambda - \lambda_1) \mathcal{T}(x, \lambda) \quad (3.3.16)$$

が成立する。 $\lambda_1 \rightarrow 0$ の極限をとることで仮定 (i) が得られる。

仮定 (ii) の動機

仮定 (ii) は L の始点である B から発せられた、非常に短いヌル測地線による Light sheet 上の Bousso bound が成立することを要請している。従って Bousso bound を要請するならば仮定 (ii) の成立は必然であると言える。

また、仮定 (ii) は Bekenstein bound から導くことができる。簡単のため、動径座標 r 、時間座標 t の Mikowski に近い空間を考える。 B を半径 $r = r_0$ 、時間座標 $t = t_0$ の球面とし、 B から未来向きに発せられたヌル測地線によって構成される Light sheet L を考える。 $\tilde{B}$ を L を構成するヌル測地線の終端の集合とし、その座標を $\lambda = \delta\lambda$ 、 $r = \tilde{r}_0$ 、 $t = \tilde{t}_0$ とする。定義より L は内向きに向かう未来方向に発せられたヌル測地線の congruence によって生成されている。 L を構成するのに使われない、 B から外向きかつ未来方向に発せられるヌル測地線の congruence が $t = \tilde{t}_0$ に達する点の集まりを $\bar{B}$ と呼ぶ。 $t = \tilde{t}_0$ 一定面における $\tilde{B}$ と $\bar{B}$ の間の領域を $\delta\Sigma$ とよぶ。

B と $\tilde{B}$ の間にある、 L の一部 δL を通るエントロピーの量は

$$\delta S = \int_B d^{D-2}x \sqrt{h(x)} \int_0^{\delta\lambda} d\lambda s(x, \lambda) \mathcal{A}(x, \lambda) \quad (3.3.17)$$

となる。ここで時空に対して dominant energy condition を課す。すなわち任意の timelike ベクトル X^a に対して $(T_{ab}X^aX^b \geq 0)$ かつ任意の null または timelike ベクトル Y^a に対して $T_b^a Y^b$ が未来向の causal vector となる。すると、 δL を通過するエントロピーの流れは必ず $\delta\Sigma$ を通過する。従って熱力学第二法則より

$$\delta S \leq \delta\tilde{S}. \quad (3.3.18)$$

ここで $\delta\tilde{S}$ は $\delta\Sigma$ に含まれるエントロピーの量。ここで、 $\delta\Sigma$ をオーダー $2\delta r$ ($\tilde{B}$ と $\bar{B}$ の距離) の大きさの薄片に分割し、それぞれの薄片に Bekenstein bound を適用し、総和を考える。 $\delta\Sigma$ におけるエネルギーの総和が半径 $\tilde{r}_0$ の球対称ブラックホールの質量を超えないとする。 D 次元の球対称ブラックホールの質量は $(D-2)a_{D-2}\tilde{r}_0^{D-3}/(16\pi)$ である。ただし $a_{D-2} = (D-1)\pi^{(D-1)/2}/\Gamma((D+1)/2)$ は $(D-2)$ 次元単位超球面の面積。Bekenstein bound の総和は不等式

$$\begin{aligned} \delta\tilde{S} &\leq 2\pi \cdot 2\delta r \cdot \frac{D-2}{16\pi} a_{D-2} \tilde{r}_0^{D-3} + O(\delta r^2) \\ &= \frac{1}{4} \left[\int_B d^{D-2}x \sqrt{h(x)} \mathcal{A}(x, 0) - \int_{\tilde{B}} d^{D-2}x \sqrt{h(x)} \mathcal{A}(x, \delta\lambda) \right] + O(\delta r^2). \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

を導く。(3.3.17)-(3.3.19) 式から仮定 (ii) を得る。

過去向きの null 測地線によって構成された Light sheet L の場合も同様に、 $\tilde{B}$ から発せられる未来向きかつ内向きの null 測地線の congruence を考え、その congruence と $t = t_0$ 超曲面との交点を $\bar{B}$ と考え、 $t = t_0$ 超曲面上の B と $\bar{B}$ との間の領域を $\delta\Sigma$ とする。そして、 $\delta\Sigma$ の断片に適用される Bekenstein bound と熱力学の第二法則から、再び仮定 (ii) が導かれる。

3.3.1 beyond GR gravity への拡張

一般相対論は重力に関する唯一無二の理論でも完全な理論でもなく、特定の範囲のエネルギーまたは距離のスケールで有効な理論である。極端に短い距離や長い距離を含む系、あるいは高エネルギーの系では、一般相対論は破綻し、一般相対論には存在しない余分な自由度や重力作用の付加項が必要となる可能性がある。一方、Bousso bound のモチベーションでもあるホログラフィーは、様々な理論で成立する重力の普遍的な性質であると期待されている。したがって、covariant entropy bound が一般相対論を超える重力の理論に拡張できるかどうかを問うのは自然なことである。

Covariant entropy bound (3.2.4) やその改良版 (3.2.6) は、ある面積 A に囲まれた系のエントロピーは、同じ面積 A のブラックホールエントロピーを上限としてもつべきであるという記述を共変的に正確にしたものである。実際 (3.2.6) の右辺は GR におけるブラックホールエントロピーであり、(3.2.6) は最終状態と初期状態に対応するブラックホールエントロピーの差分である。 D 次元の GR を超える重力理論において、ブラックホールのホライズンだけでなく、他の連結した $(D-2)$ 次元の空間面にも適用できるブラックホール・エントロピーの公式があれば、エントロピーの上限として $A/4$ をそのまま用いるのではなく、ブラックホール・エントロピーによって制限が与えられることが自然であるように思われる。すなわち、以下に述べる手法で適切に一般化した Light sheet L を通るエントロピー S_L に対して、

$$S_L \leq S_{\text{bh}}(B) - S_{\text{bh}}(B'), \quad (3.3.20)$$

としてエントロピーを制限する。ここで B は連結 $(D-2)$ 次元空間であり、 B から発せられた光によって L が構成される。 B' は別の連結 $(D-2)$ 次元空間的超曲面であり、 L の終端となる。 $S_{\text{bh}}(B)$ (及び $S_{\text{bh}}(B')$) はそれぞれ B 、 B' にブラックホールエントロピーの公式を適用したものである。この不等式を一般化された Light sheet L に対する **generalized covariant entropy bound** とよぶ

(3.3.20) の左辺は非負であるから、右辺が常に非負となるように一般化された Light sheet を定義する必要がある。一般相対論の場合は、面積の増減によって光的超曲面の内側が決定され、light sheet L を構成していた。従って右辺が非負であることが保証されていた。今、右辺はブラックホールエントロピーの変化を見ているため、面積の増減によってのみ決定される light sheet では右辺の非負性が担保されない。従って、一般相対論を超える重力理論における一般化された Light sheet を次のように定義する。

連結された $(D-2)$ -次元の空間表面 B から出て、別の連結された $(D-2)$ -次元の空間表面 B_0 で終端するヌル測地線の congruence を考える。 B と B_0 の間の測地線の congruence に特異点や共役点は存在しないと仮定する。ここでも一般性を失わずに、各測地線上のアフィン・パラメータ λ を正規化し、 B 上では $\lambda = 1$ 、 B_0 上では $\lambda = 0$ となるようにする。次に、 B 上の座標系 $x = (x_1; \dots; x_{D-2})$ を導入し、各測地線上のすべての点が $(x_1; \dots; x_{D-2})$ の同じ値を共有するように、 x を各測地線に沿って拡張し、 B と B_0 間のヌル超曲面上の座標系に $(x; \lambda)$ を昇格させる。これにより、 λ をパラメータとする $(D-2)$ 次元空間曲面 $B(\lambda)$ の 1 パラメータ族を定義し、 x は各 $B(\lambda)$ 上の座標系と考えることができ

る。 $(D-2)$ 次元超曲面 $B(\lambda)$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) に適用できるブラックホール・エントロピーの定義があり、

$$S_{\text{bh}}(B(\lambda)) = \int_{B(\lambda)} d^{D-2}x \sqrt{h(x, \lambda)} s_{\text{bh}}(x, \lambda), \quad (3.3.21)$$

といった形式で与えられているとする。ここで $h(x, \lambda)$ は $B(\lambda)$ 上の誘導計量の行列式であり、 $s_{\text{bh}}(x, \lambda)$ は $B(\lambda)$ 上の関数であり、一般相対論に置いては $s_{\text{bh}}(x, \lambda) = 1/4$ となる。

一般化された expansion $\Theta(x, \lambda)$ を

$$\Theta(x, \lambda) \equiv \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \left[\sqrt{h(x, \lambda)} s_{\text{bh}}(x, \lambda) \right]. \quad (3.3.22)$$

で定義する。 $\forall x \Theta(x, \lambda) \leq 0$ かつ $0 \leq \forall \lambda \leq 1$ であるとき、 B から $\Theta(x, \lambda)$ が現象する方向に発せられ、 B' を端点とするヌル測地線によって構成されるヌル測地線によって構成されるヌル超曲面を**一般化された light sheet** と呼ぶ。後のため、一般化された light sheet L 上のヌルベクトル $k^a(x, \lambda)$ を $k^a = \pm(\partial/\partial \lambda)^a$ で定義する。ただし $\pm$ は k^a が未来向きか過去向きかによって変化する。したがって、ある重力の理論においてブラックホールエントロピーを計算する方法が与えられたとき、その公式が任意の連結 $(D-2)$ 次元空間的超曲面に適用可能であれば、一般化された expansion (3.3.22) を用いて一般化された light sheet を構成することができる。そうすれば、一般化された covariant entropy bound (3.3.20) も定義することができる。これはかなり一般的な議論だが、ブラックホールの地平線から離れた接連結 $(D-2)$ 次元空間的超曲面に対して適用できるブラックホール・エントロピーの公式は、一般相対論以外の重力理論には必ずしも存在しない。本研究では、 $f(R)$ 重力、canonical なスカラーテンソル理論、ラヴロック重力のみを検討する。一般化された covariant entropy bound が定式化できる重力理論は他にもあるはずだが、そのような可能性を探ることは本研究の範囲外であり、この3種類の理論にのみ焦点を当てることにする。

3.4 Simple examples

この節では $f(R)$ 重力と canonical なスカラーテンソル理論を考え、前節で提示した一般化された covariant entropy bound のアイデアを示す単純な例にする。

3.5 Wald entropy

前節で述べられたように、一般相対論を超える重力理論において一般化された covariant entropy bound を定式化するためには、ブラックホール・エントロピーの定義を得ることが必要である。本節では、Noether charge として定義される Wald エントロピー [40]

$$S_{\text{bh}}(\mathcal{H}) = -2\pi \int_{\mathcal{H}} d^{D-2}x \sqrt{h} E_R^{abcd} \epsilon_{ab} \epsilon_{cd}. \quad (3.5.1)$$

を採用することにする。ここで $\mathcal{H}$ は Killing horizon の bifurcation surface であり、 h は $\mathcal{H}$ 上の誘導計量のメトリック、 E_R^{abcd} は重力の作用を R_{abcd} に関して変分をとったものであり、 ϵ_{ab} は $\mathcal{H}$ の binormal である。この節ではこの公式を $\mathcal{H}$ のみならず、前節で導入された $(D-2)$ 次元曲面 $B(\lambda)$ に対しても適用する。

$$s_{\text{bh}} = -2\pi E_R^{abcd} \epsilon_{ab} \epsilon_{cd}. \quad (3.5.2)$$

この節では $f(R)$ 重力と canonical なスカラーテンソル理論に対し、 s_{bh} を上記のようにとることにする。

3.5.1 $f(R)$ gravity

$f(R)$ 重力

$$I_f = \frac{1}{16\pi} \int d^D x \sqrt{-g} f(R), \quad (3.5.3)$$

を考える。これより

$$s_{\text{bh}} = \frac{1}{4} f'(R) \quad (3.5.4)$$

を得る。この節を通じて

$$f'(R) > 0, \quad (3.5.5)$$

を仮定する。こうすることで、テンソル摂動による重力波が正の係数を持った運動項を持つことができる。この時、一般化された expansion は (3.3.22) で表され、(3.5.4) を持つ。

一般化された covariant entropy bound (3.3.20) は、(3.3.21) と (3.5.4) を用いて書き直し、簡単に証明できる形にすることができる。このため、作用 (3.5.3) が

$$\tilde{I}_f = \frac{1}{16\pi} \int d^D x \sqrt{-g} [f'(\varphi)R + f(\varphi) - \varphi f'(\varphi)], \quad (3.5.6)$$

と等価であることに注目する。ここで、 $f''(R) \neq 0$ を仮定する ($f''(R) = 0$ の時理論は一般相対論に帰着する)。Einstein フレームのメトリック g_{ab}^{E} を導入し、スカラー場を

$$g_{ab}^{\text{E}} \equiv [f'(\varphi)]^{\frac{2}{D-2}} g_{ab}, \quad \phi \equiv \sqrt{\frac{2(D-1)}{D-2}} \ln f'(\varphi), \quad (3.5.7)$$

のように再定義する。このスカラー場を用いると、(3.5.3) と等価な作用 (3.5.6) は

$$\tilde{I}_f = \int d^D x \sqrt{-g^{\text{E}}} \left[\frac{R^{\text{E}}}{16\pi} - \frac{1}{2} g_{\text{E}}^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi - V(\phi) \right] \quad (3.5.8)$$

と書き直せる。ここで

$$V(\phi) \equiv \frac{1}{[f'(\varphi)]^{\frac{D}{D-2}}} (\varphi f'(\varphi) - f(\varphi)). \quad (3.5.9)$$

$g_{\mu\nu}^{\text{E}}$ で書かれた等価な作用 (3.5.8) は まさに Einstein-Hilbert 作用であり、ポテンシャル $V(\phi)$ を持つ canonical なスカラー場 ϕ に結合している。従って Einstein フレームにおけるブラックホールエントロピーは Bekenstein-Hawking formula で表すことができ、

$$S_{\text{bh}}^{\text{E}}(B(\lambda)) = \frac{1}{4} \int_{B(\lambda)} d^{D-2} x \sqrt{h^{\text{E}}(x, \lambda)} \quad (3.5.10)$$

である。ここで、 $h^{\text{E}}(x, \lambda)$ は Einstein フレームにおける $B(\lambda)$ 上の誘導計量の行列式である。ヌル測地線は共形変換によって変換した先でもヌル測地線のままである。しかしながら、元々のフレームにおけるヌル測地線のアフィンパラメータ λ は Einstein フレームにお

いてはアフィンパラメータではない。従って Einstein フレームにおけるアフィンパラメータ λ^E を導入する。

$$\lambda^E = \frac{1}{\mathcal{N}(x)} \int_0^\lambda [f_R(x, \lambda')]^{\frac{2}{D-2}} d\lambda' \quad (3.5.11)$$

ここで

$$\mathcal{N}(x) = \int_0^1 [f_R(x, \lambda')]^{\frac{2}{D-2}} d\lambda' \quad (3.5.12)$$

であり、 $f_R(x, \lambda) f'(\varphi) = f'(R)$ の L 上の座標 (x, λ) における値である。従って L 上で $0 \leq \lambda^E \leq 1$ であり、 B で $\lambda^E = 0$ 、 B' で $\lambda^E = 1$ である。また対応する L 上の Einstein frame における null generator k_E^a を

$$k_E^a \equiv \mathcal{N}(x) [f_R(x, \lambda)]^{-\frac{2}{D-2}} k^a. \quad (3.5.13)$$

とする。

(3.5.7) における g_{ab}^E と g_{ab} の関係式から、 $h^E(x, \lambda) = h(x, \lambda) \cdot [f_R(x, \lambda)]^2$ であることがわかる。 φ に関する運動方程式が $\varphi = R$ を意味するため、Einstein フレームにおける Bekenstein-Hawking エントロピー (3.5.10) は元々のフレームにおける Wald エントロピー、つまり (3.5.4) である (3.3.21) と一致する。また、Einstein フレームにおける expansion θ_E は元々のフレームにおける一般化された expansion、つまり (3.3.22) で s_{bh} として (3.5.4) を用いたものに一致する。すなわち

$$\theta_E = \frac{\partial}{\partial \lambda^E} \ln \sqrt{h^E} = \mathcal{N}(x) [f_R(x, \lambda)]^{-\frac{2}{D-2}} \Theta. \quad (3.5.14)$$

従って、 θ_E と Θ の符号は一致し、Einstein フレームにおける light sheet と元々のフレームにおける light sheet は同じである。

したがって、一般化された covariant entropy bound、つまり (3.3.20) で (3.3.21) かつ (3.5.4) としたものは、Einstein フレームでの面積などの値が (3.3.7) の二つの仮定

$$\begin{aligned} \text{(i-f)} \quad \frac{\partial s_E}{\partial \lambda^E}(x, \lambda^E) &\leq 2\pi \mathcal{T}^E(x, \lambda^E), \\ \text{(ii-f)} \quad s_E(x, 0) &\leq -\frac{1}{4} \theta_E(x, 0), \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

を満たすとき成立する。ここで、 s_E は Einstein フレームにおけるエントロピー密度であり、 $\mathcal{T}^E \equiv (T_{ab}^E + \partial_a \phi \partial_b \phi) k_E^a k_E^b$ 、また T_{ab}^E は Einstein フレームにおけるエネルギー運動量テンソルである。これら二つの仮定を元々のフレームの量で書き直すのは容易である。 S_L はフレームの変換に対して不変であるため、 $\sqrt{h^E} s_E d\lambda^E = \sqrt{h} s d\lambda$ であり、よって $s = s_E [f_R(x, \lambda)]^{\frac{D}{D-2}} / \mathcal{N}(x)$ が成立する。エネルギー運動量テンソルの定義及び (3.5.7) にある g_{ab}^E と g_{ab} の関係から $T_{ab} = T_{ab}^E f'(R)$ がわかる。ここで T_{ab} は元々のフレームにおけるエネルギー運動量テンソル。従って、(3.5.15) の (i-f) は

$$\text{(i-f)} \quad \frac{\partial s}{\partial \lambda}(x, \lambda) \leq 2\pi \mathcal{T}(x, \lambda) + \Delta_f(x, \lambda) \quad (3.5.16)$$

と書き直すことができる。ここで $\mathcal{T} \equiv T_{ab} k^a k^b$ かつ

$$\Delta_f \equiv 2\pi f_R(x, \lambda) (k^a \partial_a \phi)^2 + \frac{D}{D-2} s \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln f_R(x, \lambda). \quad (3.5.17)$$

Δ_f の最初の項は常に非負である。また、第二項はいくつかの仮定を考えることによって評価することができるようになる。本研究においては物質のエントロピーを連続なベクトル場で表しているが、このことは理論に登場する物理量が十分に連続であることを意味する。従って、局所的に熱平衡である理論のみを考えることにする。局所的に熱平衡な理論は全ての理論を網羅するわけではないが、仮定の妥当さを議論する上では十分であると考えられる。局所的に熱平衡な理論では、エネルギー密度とエントロピー密度はそれぞれ温度の三乗と四乗に比例する。したがって、局所熱平衡性の仮定より $\ln f_R(x, \lambda)$ の変化はその系の局所的な温度より小さいため、 Δ_f の第二項は精々局所的な温度に比例する量であるため、 Δ_f の第二項は $2\pi\mathcal{T}(x, \lambda)$ より十分小さくなり、(i-f) の成立の是非に影響を与えない。このとき、(i-f) は (3.3.7) の (i) が満たされている限り、つまり

$$(i-f)' \frac{\partial s}{\partial \lambda}(x, \lambda) \leq 2\pi\mathcal{T}(x, \lambda). \quad (3.5.18)$$

である限り満たされることになる。一方で、(3.5.15) の (ii-f) は

$$(ii-f) s(x, 0) \leq -s_{\text{bh}}(x, 0)\Theta(x, 0) \quad (3.5.19)$$

と書き直すことができる。(ii-f) を 3.3 節での議論を Einstein フレームにおける系に適用することで、(3.5.15) の形をした仮定 (ii-f) を根拠づけることができる。あるいは、この場合の有効重力定数は $f'(R)$ に反比例するので、与えられた半径の球体内部のエネルギーの上限は $f'(R)$ に比例することを利用して、3.3 節での議論をそのまま拡張し、 $f'(R)$ が定数あるいは十分ゆっくり変化するにおいて (3.5.19) の形をした (ii-f) を動機づけることができる。

3.5.2 Canonical scalar-tensor theory

canonical なスカラーテンソル理論の作用は

$$I_{\text{st}} = \frac{1}{16\pi} \int d^D x \sqrt{-g} \left[F(\varphi)R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - U(\varphi) \right] \quad (3.5.20)$$

である。ここで

$$s_{\text{bh}} = \frac{1}{4}F(\varphi) \quad (3.5.21)$$

を用いる。以降 $F(\varphi) \geq 0$ を仮定し、テンソルのゴースト不安定性を回避する。一般化された expansion は (3.3.22) で (3.5.21) としたものであり、一般化された covariant entropy bound は (3.3.20) で (3.5.21) かつ (3.3.21) としたもので与えられる。

Einstein フレームにおけるメトリックを導入し、スカラー場を再定義すると、

$$g_{ab}^E = [F(\varphi)]^{\frac{2}{D-2}} g_{ab},$$

$$\phi = \int d\tilde{\varphi} \sqrt{F(\tilde{\varphi})^{-1} + \frac{2(D-1)}{D-2} \left[\frac{F'(\tilde{\varphi})}{F(\tilde{\varphi})} \right]^2}. \quad (3.5.22)$$

このとき、作用は

$$I_{\text{st}} = \frac{1}{16\pi} \int d^D x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{R} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) \right] \quad (3.5.23)$$

のように書き直すことができる。ここで

$$V(\phi) = [F(\phi)]^{-\frac{D}{D-2}} U(\phi) \quad (3.5.24)$$

である。作用 (3.5.23) は canonical なスカラー場に結合した Einstein-Hilbert 作用であり、このフレームにおけるブラックホールエントロピーは Bekenstein- Hawking 公式から

$$S_{\text{bh}}^{\text{E}}(B(\lambda)) = \frac{1}{4} \int_{B(\lambda)} d^{D-2}x \sqrt{h^{\text{E}}(x, \lambda)} \quad (3.5.25)$$

で与えられる。ここで、 h^{E} は Einstein フレームにおける誘導計量の行列式である。Einstein フレームのアフィンパラメータ λ^{E} を

$$\lambda^{\text{E}} = \frac{1}{\mathcal{N}(x)} \int_0^\lambda [F(x, \lambda')]^{\frac{2}{D-2}} d\lambda', \quad (3.5.26)$$

と定義する。ここで

$$\mathcal{N}(x) = \int_0^1 [F(x, \lambda')]^{\frac{2}{D-2}} d\lambda' \quad (3.5.27)$$

であり、 $F(x, \lambda)$ は L 上の座標 (x, λ) における $F(\varphi)$ の値である。従って L 上で $0 \leq \lambda^{\text{E}} \leq 1$ であり、 B 上で $\lambda^{\text{E}} = 0$ 、 B' 上で $\lambda^{\text{E}} = 1$ である。また、Einstein フレームにおける L の null generator k_{E}^a を

$$k_{\text{E}}^a \equiv \mathcal{N}(x) [F(x, \lambda)]^{-\frac{2}{D-2}} k^a \quad (3.5.28)$$

と定義する。

$h^{\text{E}} = h \cdot [F(x, \lambda)]^2$ であるため、Einstein フレームにおける Bekenstein-Hawking エントロピーは元々のフレームにおける Wald エントロピーと一致する。Einstein フレームにおける θ_{E} は元々のフレームにおける一般化された expansion と関係し、

$$\theta_{\text{E}} = \frac{\partial}{\partial \lambda^{\text{E}}} \ln \sqrt{h^{\text{E}}} = \mathcal{N}(x) [F(\varphi)]^{-\frac{2}{D-2}} \Theta \quad (3.5.29)$$

である。従って θ_{E} と Θ は同じ符号を持つ。したがって元々のフレームにおける一般化された light sheet と Einstein フレームにおける light sheet は一致する。

したがって、Canonical scalar tensor 理論において、一般化された covariant entropy bound は Einstein フレームでの量が (3.3.7) の仮定 (i) と (ii) を満たすとき、すなわち

$$\begin{aligned} \text{(i-s)} \quad \frac{\partial s_{\text{E}}}{\partial \lambda^{\text{E}}}(x, \lambda^{\text{E}}) &\leq 2\pi \mathcal{T}^{\text{E}}(x, \lambda^{\text{E}}), \\ \text{(ii-s)} \quad s_{\text{E}}(x, 0) &\leq -\frac{1}{4} \theta_{\text{E}}(x, 0) \end{aligned} \quad (3.5.30)$$

の両方を満たすとき成立する。 $f(R)$ 重力の節における議論をそのまま使用すると、 $s = s_{\text{E}}[F(x, \lambda)]^{\frac{D}{D-2}} / \mathcal{N}(x)$ かつ $T_{ab} = T_{ab}^{\text{E}} f'(R)$ を得る。従って、(3.5.30) の (i-s) は

$$\text{(i-s)} \quad \frac{\partial s}{\partial \lambda}(x, \lambda) \leq 2\pi \mathcal{T}(x, \lambda) + \Delta_s(x, \lambda), \quad (3.5.31)$$

と書き直せる。ここで $\mathcal{T} \equiv T_{ab} k^a k^b$ であり、

$$\Delta_s \equiv 2\pi F(x, \lambda) (k^a \partial_a \phi)^2 + \frac{D}{D-2} s \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln F(x, \lambda). \quad (3.5.32)$$

Δ_s は $F(\varphi)$ が正であることから非負である。 $f(R)$ 重力と同じ議論によって Δ_s の第二項は、 $F(\varphi)$ の分数変化率が温度の逆数ほどの距離において、局所熱平衡性の仮定より十分小さいとき、 $2\pi\mathcal{T}(x, \lambda)$ より小さくなる。この時、(i-s) の仮定は、元々のフレームで (3.3.7) の条件 (i) を満たす時、つまり

$$(i-s)' \frac{\partial s}{\partial \lambda}(x, \lambda) \leq 2\pi\mathcal{T}(x, \lambda) \quad (3.5.33)$$

を満たす時成立する。(3.5.30) の条件 (ii-s) は

$$(ii-s)s(x, 0) \leq -s_{bh}(x, 0)\Theta(x, 0) \quad (3.5.34)$$

と書き直すことができる。 $f(R)$ 重力と同様に、3.3 節での議論を Einstein フレームにおける系に適用することで、(3.5.15) の形をした仮定 (ii-s) を根拠づけることができる。あるいは、この場合の有効重力定数は $F(\varphi)$ に反比例するので、与えられた半径の球体内部のエネルギーの上限は $F(\varphi)$ に比例することを利用して、3.3 節での議論をそのまま拡張し、 $F(\varphi)$ が定数あるいは十分ゆっくり変化するにおいて (3.5.34) の形をした (ii-s) を動機づけることができる。

3.6 Lovelock gravity

この節では D 次元の Lovelock 重力を考える。その作用は

$$I = \frac{1}{16\pi} \int d^D x \sqrt{-g} \sum_{n=1}^{[(D-1)/2]} \alpha_n \mathcal{L}_n[g_{\mu\nu}],$$

$$\mathcal{L}_n[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2^n} \delta^{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n}_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_n \beta_n} \prod_{r=1}^n R^{\alpha_r \beta_r}_{\mu_r \nu_r} \quad (3.6.1)$$

である。また、3.3.1 で提示された、一般化された covariant entropy bound を議論する。

3.6.1 Wald-Jacobson-Myers entropy and covariant entropy bound

Sec.3.3.1 で紹介した一般相対論を超えた重力理論に関する一般化された covariant entropy bound は、ブラックホールエントロピーに関するよく定義された公式の存在を仮定していた。その公式はブラックホールのホライズンだけでなく、一般化された light sheet を生成する連結した $(D-2)$ 次元空間的超曲面にも適用することができる。Sec. 3.4 では $f(R)$ 重力と canonical なスカラーテンソル理論に関して Wald の公式 (3.5.1) を採用した。残念ながら、Lovelock terms の存在によって Wald エントロピーは非定常なブラックホールに対して不定性を持つことが知られている [41]¹。 D 次元空間で、 $n > (D-1)/2$ を満たす n に対し、 n -th Lovelock term $\sqrt{-g}\mathcal{L}_n[g_{\mu\nu}]$ は全微分項となり、運動方程式には寄与しない。にもかかわらず、実際に計算することで $n > (D-1)/2$ の項が Wald エントロピーに寄与することがわかる。例えば、 $n = 4$ のとき、2nd Lovelock term はラグランジアンにおいて全微分項になるが、Wald entropy には

$$R^{pq}_{pq} = R^{(2)} + (\text{terms bilinear in } K_1 \text{ and } K_2) \quad (3.6.2)$$

¹See [42, 43] では Horndeski theory におけるよく似た状況について述べられている。

の形で寄与する。ここで $R^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}$ は 4 次元のリーマン曲率テンソル、 $R^{(2)}$ は p, q という座標を持つ、2 次元のホライゾン断面上の誘導計量のリッチスカラーであり、 $K_{1,2}$ はホライゾン断面に直行するヌル方向に沿った第二基本形式である²。2 次元のホライゾン断面上の $R^{(2)}$ の積分は定数となるため、その変分はゼロになり、Wald エントロピーに寄与しない。一方で、(3.6.2) の K_1 や K_2 に bilinear な項は Wald エントロピーにノンゼロで定数でもない寄与を与える。任意の定数係数を持つ 2nd Lovelock term が 4 次元の運動方程式に寄与しないことを考慮すると、この結果は、非定常ブラックホールに対して等価な作用が異なる Wald エントロピーを与えることを示す。一方で、定常なブラックホールでは K_1, K_2 の項は消えるため³、Wald エントロピーは定数を除いて一意である。すなわち、Lovelock term が存在する場合は Wald エントロピー (3.5.1) は定常なブラックホールにのみ適用できることが知られている。より一般の場合、例えば非定常なブラックホールや一般の連結 $(D-2)$ 次元空間的超曲面については、Wald の公式を修正する必要がある。この修正は元々は Wald エントロピーの不定性からくるものであった。Wald エントロピーには三つの不定性があり [31]、それらのうち二つは Killing ホライゾンでないブラックホールホライゾンに対してノンゼロの寄与を与える。

本論文においては、Lovelock 重力におけるブラックホールエントロピーの公式として

$$S_{\text{bh}}(B) = \int_B d^{D-2}x \sqrt{h} s_{\text{bh}} \quad (3.6.3)$$

を採用する [45]。ここで B は連結 $(D-2)$ 次元空間的超曲面であり、 h は B 上の誘導計量 h_{pq} の行列式で、 s_{bh} は

$$s_{\text{bh}} = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{[(D-1)/2]} m \alpha_m \mathcal{L}_{m-1}[h_{pq}] \quad (3.6.4)$$

で与えられる。 $\mathcal{L}_{m-1}[h_{pq}]$ は $(D-2)$ 次元空間上のメトリック h_{pq} によって構成される $(m-1)$ -th Lovelock term で、 $\mathcal{L}_0[h_{pq}] = 1$ である。このブラックホール・エントロピーの公式は、 B をホライゾン断面としたとき、Jacobson-Myers (JM) エントロピーと呼ばれるものである。JM エントロピーは、 B を静的ブラックホールのホライゾンとしたときの Wald エントロピーと一致する。静的ブラックホール時空の周りに非定常な線形摂動を与えた場合、摂動されたブラックホールの水平線の JM エントロピーは以下の 3 つの性質を持つことから、JM エントロピーは Lovelock 重力における静的ブラックホールのみならず、非静的なブラックホールのエントロピーとしても適格であることが示唆される。一つは、JM エントロピーは事象の地平線の未来方向に沿って減少しないこと [46] で、古典的なブラックホールの第二法則と似た法則が JM エントロピーに成立することである。Dong エントロピーは $f(\text{Riemann})$ 重力と対をなす理論におけるエンタングルメントエントロピーの一つであり、JM エントロピーの候補である。二つ目は、generalized second law がいくつかの妥当な仮定の元に成立することである [46]。三つ目は、JM エントロピーが、Dong エントロピー [47] と一致することである。Dong エントロピーは一般の $f(\text{Riemann})$ 重力に対して双対な理論におけるホログラフィックエンタングルメントエントロピーであり、Lovelock 重力に対しては JM エントロピーになる。このような理由から、JM エントロピーは、非定常ブラックホールにおいても、Lovelock 重力におけるブラックホールエントロピーとして機能することが期待されている。そこで、(3.6.4) を採用し、Lovelock 重力における一般化された covariant entropy bound を定式化することにする。

²リーマン曲率テンソルの二つのヌル方向に関する分解に関しては [44] 参照

³定常な Killing ホライゾンに関しては二つのホライゾン断面に直行するヌル方向のうち一つはホライゾンに沿っているため、 K_1 あるいは K_2 のいずれかが消える。

3.6.2 EGB gravity with spherical symmetry

この節の残りでは簡単のため Einstein-Gauss-Bonnet (EGB) 重力のみを考える。すなわち重力の作用が一次、二次の Lovelock term で与えられ、

$$I = \frac{1}{16\pi} \int d^D x \sqrt{-g} (R + \alpha \mathcal{L}_2[g_{\mu\nu}]) \quad (3.6.5)$$

となる。ここで $\mathcal{L}_2[g_{\mu\nu}] = R^2 - 4R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}$ であり、 $\alpha_1 = 1$ とし、 $\alpha_2 = \alpha$ とおいた。このとき、(3.6.4) で示された JM エントロピーにおける s_{bh} は

$$s_{\text{bh}} = \frac{1}{4} [1 + 2\alpha R^{(D-2)}] \quad (3.6.6)$$

となる。ここで $R^{(D-2)}$ は B 上の h_{pq} によるリッチスカラーである。また、

$$\alpha > 0 \quad (3.6.7)$$

と仮定する。この仮定は弦理論から動機付けられている ([48, 49] 参照)。この仮定により、ホライゾンの面積を固定した上で高階微分項を追加するとブラックホールエントロピーが増加する。ブラックホールエントロピーをブラックホールを実現する状態数の対数をとったものだと考えると、高階微分項を追加することでよりエネルギーの高い状態 (heavy mode) が理論に含まれるようになり、ブラックホールエントロピーが増加することは妥当である。

さらに簡単にするために、球対称な時空のみを考えることとする。二つのヌル方向を持つメトリックは球対称時空で一般に

$$ds^2 = -2e^{-f(u,v)} du dv + r^2(u,v) \Omega_{pq} dx^p dx^q. \quad (3.6.8)$$

ここで $\Omega_{pq} dx^p dx^q$ は単位 $(D-2)$ 球のメトリックである。JM エントロピーの公式 (3.6.6) はこのとき

$$s_{\text{bh}} = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{2\alpha(D-2)(D-3)}{r^2} \right] \quad (3.6.9)$$

となる。一般化された Misner-Sharp 質量 [50] は

$$m = \frac{(D-2)a_{D-2}}{16\pi} [r^{D-3}(1 + 2e^f r_{,u} r_{,v}) + \tilde{\alpha} r^{D-5}(1 + 2e^f r_{,u} r_{,v})^2] \quad (3.6.10)$$

と定義される。ここで $a_{D-2} = (D-1)\pi^{\frac{D-1}{2}}/\Gamma((D+1)/2)$ は単位 $(D-2)$ 次元球の面積で、 $\tilde{\alpha} = (D-3)(D-4)\alpha$ とおいた。dominant energy condition を仮定すると、 m は中心 ($r=0$) と交差する点で正則である空間的か光的な超曲面において非負であることが従う [51]。さらに、この m の定義は

$$1 + \frac{2\tilde{\alpha}}{r^2}(1 + 2e^f r_{,u} r_{,v}) = \pm \sqrt{1 + \frac{64\pi\tilde{\alpha}m}{(D-2)a_{D-2}r^{D-1}}} \quad (3.6.11)$$

と書き直せる。この方程式は理論の球対称解を二つの分岐 (branch) に分ける。± が “+” のとき GR-branch と呼ばれ、“−” のとき non-GR branch と呼ばれる。この二つの分岐は、radial null vector に対して null energy condition を仮定した時、curvature singularity のみ一致するという意味で異なるものである。

$\alpha \rightarrow 0$ の極限で一般相対論に帰着するのは GR branch であるため、以降 GR branch のみを考える。GR branch では、radial null vectors(回転方向のベクトル全てと直行するベクトル) に対して null energy condition を課すことは、radial null vectors に対して null convergence condition を課することになる [52](後述の (3.6.13) を参照)。すなわち、GR branch のブラックホール時空では、null energy condition を課すと、apparent horizon が常に event horizon の内側に存在することになる。

3.6.3 Proof in EGB gravity with spherical symmetry

この節では球対称な時空における EGB 重力の GR branch を考え、3.3.1 節で提示された一般化された covariant entropy bound を証明する。そのとき、 s_{bh} として (3.6.6) あるいは (3.6.9) を採用する。証明にあたって、3.3.1 節と同様に、一般化された light sheet L 上で座標 (x, λ) を採用する。また、 L に対して

$$\begin{aligned} \text{(i-gb)} \quad \frac{\partial s}{\partial \lambda}(x, \lambda) &\leq 2\pi \mathcal{T}(x, \lambda), \\ \text{(ii-gb)} \quad s(x, 0) &\leq -s_{\text{bh}}(x, 0)\Theta(x, 0) \end{aligned} \quad (3.6.12)$$

と仮定する。ここで $\mathcal{T} = T_{ab}k^ak^b$, T_{ab} は物質場のストレスエネルギーテンソルであり、 Θ は (3.3.22) で (3.6.6) あるいは (3.6.9) を採用したものである。これら 2 つの仮定は一般相対論における (3.3.7) に、 $f(R)$ 重力における (3.5.18) と (3.5.19) に、また canonical なスカラーエネルギー理論における (3.5.33) と (3.5.34) に相当する。

球対称性を仮定したため、メトリック (3.6.8) を採用する。さらに、ヌル方向位の座標 u を L 上で $u = \lambda$ となるように再定義する。ここで λ は 3.3.1 節で導入された規格化されたアフィンパラメータである。これにより、 L は定数 v_L を用いて $v = v_L$ かつ $0 \leq u \leq 1$ の曲面として表される。また、 L 上で測地線方程式 $f_{,u} = 0$ が成立する。一方、 L 上でない場所では u と λ は必ずしも関係しておらず、 $f_{,uv}$ は L 上でノンゼロの値をとりうる。関係式

$$8\pi T_{uu} = R_{uu} \left[1 + \frac{2\tilde{\alpha}}{r^2} (1 + 2e^f r_{,u} r_{,v}) \right] \quad (3.6.13)$$

はこの証明において重要な役割を果たす。ただし

$$R_{uu} = -\frac{D-2}{r} (r_{,uu} + f_{,u} r_{,u}) \quad (3.6.14)$$

である。GR branch では (3.6.13) と $T_{uu} \geq 0$ より $R_{uu} \geq 0$ が従う。つまり、前節で述べたように、radial null vectors に対する null energy condition が radial null vectors に対する null convergence condition を意味することがわかる。 L 上に議論を限定すると、

$$\mathcal{T} = -\frac{D-2}{8\pi} \frac{r_{,uu}}{r} \left[1 + \frac{2\tilde{\alpha}}{r^2} (1 + 2e^f r_{,u} r_{,v}) \right] \quad \text{on } L \quad (3.6.15)$$

となる。また、 L 上で $r_{,uu} \leq 0$ である。これから証明を進める。(3.6.12) の仮定 (i-gb) を一度積分し、(3.6.15) を用いると

$$\begin{aligned} s(\lambda) - s(0) &\leq -\frac{D-2}{4} \int_0^\lambda du \frac{r_{,uu}}{r} \left[1 + \frac{2\tilde{\alpha}}{r^2} (1 + 2e^f r_{,u} r_{,v}) \right] \\ &= -\frac{D-2}{4} \left[\frac{r_{,u}}{r} \left(1 + \frac{2\tilde{\alpha}}{r^2} \right) \right]_{u=0}^{u=\lambda} - F(\lambda) \end{aligned} \quad (3.6.16)$$

を得る。ここで $v = v_L$ となり、また

$$F(\lambda) = \frac{D-2}{4} \int_0^\lambda du \left[\left(\frac{r_{,u}}{r} \right)^2 \left(1 + \frac{6\tilde{\alpha}}{r^2} \right) + 4\tilde{\alpha} \frac{r_{,uu}}{r^3} e^f r_{,u} r_{,v} \right] \Big|_{v=v_L} \quad (3.6.17)$$

である。次に、(3.6.12) の仮定 (ii-gb) は

$$s(0) \leq -\frac{D-2}{4} \frac{r_{,u}}{r} \left(1 + \frac{2\tilde{\alpha}}{r^2} \right) \Big|_{u=0, v=v_L} \quad (3.6.18)$$

となる。(3.6.16) と (3.6.18) を用いると、

$$s(\lambda) \leq -\frac{D-2}{4} \frac{r_{,u}}{r} \left(1 + \frac{2\tilde{\alpha}}{r^2} \right) \Big|_{u=\lambda, v=v_L} - F(\lambda) \quad (3.6.19)$$

を得る。この不等式に $a_{D-2} r^{D-2}$ をかけ、 $\lambda = 0$ から $\lambda = 1$ まで積分する。ただし a_{D-2} は単位 $(D-2)$ 球面の表面積。すると、

$$S_L \leq S_{\text{bh}}(B) - S_{\text{bh}}(B') - a_{D-2} \int_0^1 d\lambda F(\lambda) r^{D-2}(\lambda) \quad (3.6.20)$$

を得る。仮定

$$\int_0^1 d\lambda F(\lambda) r^{D-2}(\lambda) \geq 0 \quad (3.6.21)$$

をおくことで証明が完了する。

最後に、この仮定 (3.6.21) が妥当かどうかを考えなければいけない。まず、一般相対論に対する Gauss-Bonnet 項の補正が subdominant であるとき、(3.6.17) で定義された $F(\lambda)$ の支配的な項は $F(\lambda) \simeq \int_0^\lambda du (D-2)(r_{,u}/r)^2/4|_{v=v_L} \geq 0$ となり、仮定 (3.6.21) が成立する。さらに、Gauss-Bonnet 項の補正が subdominant でないときにも、 L が補足面 (trapped region) に入っていないとき (3.6.21) が成立することを言える。そのとき L 上では、 $e^f r_{,u} r_{,v} = e^f \theta_u \theta_v / (D-2)^2 r^2$ である。 θ_u と θ_v はそれぞれのパラメータに対応する expansion。したがって $e^f r_{,u} r_{,v} \leq 0$ である。 L 上で $e^f r_{,u} r_{,v} \leq 0$ と (3.6.7) と GR branch において null convergence condition を意味する $r_{,uu} \leq 0$ を用いることで、 L 上で $F(\lambda) \geq 0$ であり、(3.6.21) が成立することがわかる。

3.6.4 Corollary: generalized second law in EGB gravity with spherical symmetry

この小節では前節で証明した球対称ブラックホール時空における GR branch の EGB 重力における一般化された covariant entropy bound を応用し、generalized second law を証明する。

証明の前に、null energy condition 下での JM エントロピーに関するブラックホール event horizon の古典的な第二法則を証明しておこう。前節で述べたように、GR ブランチのブラックホール時空では、radial null vector に対して null energy condition が成立すれば、null convergence condition が成立し、apparent horizon は常に event horizon 上かその内側にあることになる。null convergence condition が成立する場合、測地線の負の expansion を持つ点が存在すると、有限の距離で expansion が発散する点が存在することを

示することができる。したがって、event horizon の面積は時間的に減少せず、event horizon の上で時空がアンチトラップされないという仮定 $e^f r_{,u} r_{,v} \leq 0$ のもと、event horizon の面積は時間について広義単調現象である。また、

$$\frac{d}{dr}(s_{\text{bh}} r^{D-2}) = \frac{D-2}{4} r^{D-3} \left(1 + \frac{2\tilde{\alpha}}{r^2}\right) \quad (3.6.22)$$

を用いると、GR branch の定義、仮定 (3.6.7) と不等式 $e^f r_{,u} r_{,v} \leq 0$ から $s_{\text{bh}} r^{D-2}$ が r について増加関数であり、ホライゾンの面積のみだけでなく、 S_{bh} が event horizon 上で時間に関して広義単調増加関数であることが示される。すなわち、古典的なブラックホール第二法則は、GR branch が選ばれたことと null energy condition を仮定すると JM エントロピーに関して成立する。

古典的な第二法則より強い主張である Generalized second law を証明しよう。null energy condition と the dominant energy condition を仮定する。上述したようにブラックホールの event horizon 上で $e^f r_{,u} r_{,v} \leq 0$ であり、event horizon 上で評価された JM entropy は時間の広義単調増加関数である。したがって、event horizon の一部を過去向の一般化された light sheet L の一部とし、一般化された covariant entropy bound が L 上で成立するとする。 B と B' をそれぞれ L の未来と過去の端点となる断面とすると、一般化された covariant entropy bound により

$$S_L \leq S_{\text{bh}}(B) - S_{\text{bh}}(B') \quad (3.6.23)$$

が成立する。dominant energy condition と second law of thermodynamics をブラックホールの外側の領域に拡大すると、

$$S_{\text{matter}}(B) + S_L \geq S_{\text{matter}}(B'), \quad (3.6.24)$$

ここで $S_{\text{matter}}(B)$ と $S_{\text{matter}}(B')$ はそれぞれ event horizon の外側にある B 及び B' と交差する空間的超曲面上の物質のエントロピーである。また、この二つの空間的超曲面はそれぞれ交差しないと仮定する。この二つのエントロピーの差は物質がブラックホールに九州されるか、何かしらの物理的過程によってエントロピーが増加することによるものである。前者は light sheet 上に分布する物質のエントロピー S_L に等しく、不等式 (3.6.24) が成立する。この二つの不等式を組み合わせると、

$$S_{\text{bh}}(B) + S_{\text{matter}}(B) \geq S_{\text{bh}}(B') + S_{\text{matter}}(B') \quad (3.6.25)$$

を得る。これはまさに generalized second law である。

3.7 Summary of this part

本研究において、元々一般相対論で構築された covariant entropy bound を、3.3.1 節で提示されているように一般相対論を超えた重力理論に拡張した。具体的かつ単純な例として、熱力学的な極限を仮定した $f(R)$ 重力と canonical なスカラーテンソル理論において、Bekenstein-Hawking エントロピーの代わりに Wald エントロピーを使って一般化された covariant entropy bound を構築した。より非自明な例として本研究では Lovelock 重力を考えた。Lovelock 重力では Wald エントロピーは非定常時空では曖昧さを持つことを指摘した。したがって代わりに Jacobson-Myers (JM) エントロピーを採用した。このエントロピーは、非定常空間にも適用可能であり、定常ブラックホール周りの非定常摂動におい

て、古典第二法則と一般化第二法則を線形オーダーまで満たすことが知られている。JM エントロピーを用いて、Lovelock 重力における一般化された covariant entropy bound を提案し、その後、Lovelock 重力の最も単純かつ非自明な例である Einstein-Gauss-Bonnet (EGB) 重力の球対称時空の場合に対して、一連の妥当な仮定の下で証明を行った。証明に用いられている仮定は (3.6.12) と (3.6.21) にまとめられている。(3.6.12) での仮定は一般相対論の証明に用いられている仮定 (3.3.7) のアナロジーであり、3.3 節の Set Up でその動機が語られている。(3.6.21) の仮定が妥当であるということが 3.6.3 節で議論されている。また、証明の系として JM エントロピーが球対称時空の EGB 重力で、GR branch をとった場合、完全に非線形なオーダーにおいて、すなわち定常時空からの変化が高々線形であるという過程を除いて、generalized second law を満たすことを示した。

これらの結果は、我々が提案した一般化された covariant entropy bound をある程度支持する証拠となる。ただし、Lovelock 重力については、球対称性を持つ EGB 重力しか考えていない。また、熱力学的極限と、エントロピーの流れが時間軸ベクトルで表現できる流体的な物質しか議論していない。covariant entropy bound を重力のホログラフィックな性質と考えれば、この bound はより一般的な物質設定でも成立することが期待される。したがって、これらの制約を取り除くことが今後の課題の一つである。また、この bound を他の重力理論にも拡張することは興味深いことである。いくつかのタイプの重力理論が研究されており、特に $f(\text{Riemann})$ 重力においてはブラックホールエントロピーの有力な候補として、Dong エントロピーが存在する。このエントロピーは、 $f(\text{Riemann})$ 理論と双対な理論のエンタングルメントエントロピーとして導かれ、古典的な第二法則を満たす。Dong のエントロピーは Lovelock 重力における JM エントロピーと一致するので、この論文の議論は、Dong のエントロピーを持つ $f(\text{Riemann})$ 理論に拡張できる可能性がある。

また、一般化された covariant entropy bound が様々な重力理論で成立する構造的な理由を明らかにし、エントロピーの制限が成立する理論空間を特定することも今後の重要な課題である。

Chapter 4

スカラー・テンソル理論における宇宙的メモリー効果について

本章ではスカラー・テンソル理論において、平坦宇宙を背景場とした際にスカラー摂動によるメモリー効果の計算する方法を解析する。本章は発表済みの論文 [53] に基づく。

4.0.1 Linear perturbations of ScalarTensortheory

重力に関する部分の摂動を次のようにとる¹

$$\begin{aligned} \delta\varphi, \quad \delta g_{00} &= -2\bar{N}^2\alpha, \quad \delta g_{0i} = \bar{N}(\partial_i\beta + \beta_i), \\ \delta g_{ij} &= a^2 \left[2\psi\delta_{ij} + 2\left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\partial^2\right)E + 2\partial_{(i}C_{j)} + h_{ij} \right] \end{aligned} \quad (4.0.1)$$

ここで $\{\alpha, \beta, \psi, E, \delta\varphi\}$ はスカラー摂動であり、 $\{\beta_i, C_i\}$ はベクトル摂動で $\partial^i\beta_i = 0 = \partial^i C_i$ を満たす。また h_{ij} はテンソル摂動で traceless かつ transverse である。すなわち、 $h^i_i = 0 = \partial^i h_{ij}$ 。

すでに述べたように、粒子のエネルギー運動量テンソルは背景に寄与せず、摂動の段階で初めて影響を持ち始める。従って、粒子のエネルギー運動量テンソルをメトリックの摂動と同じように以下のように分解する。

$$\begin{aligned} T_{00}^{(P)} &= -2\bar{N}^2\alpha^{(P)}, \quad T_{0i}^{(P)} = \bar{N}(\partial_i\beta^{(P)} + \beta_i^{(P)}), \\ T_{ij}^{(P)} &= a^2 \left[2\psi^{(P)}\delta_{ij} + 2\left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\partial^2\right)E^{(P)} + 2\partial_{(i}C_{j)}^{(P)} + \mathcal{T}_{ij} \right]. \end{aligned} \quad (4.0.2)$$

ここで、 $\{\alpha^{(P)}, \beta^{(P)}, \psi^{(P)}, E^{(P)}\}$ はスカラー接動、 $\{\beta_i^{(P)}, C_i^{(P)}\}$ は発散がゼロになるベクトル摂動。 $\mathcal{T}_{ij}$ は traceless かつ transverse なテンソル摂動である。

完全流体の場合、エネルギー密度と4次元運動量の摂動を

$$\delta T^0_0 = -\delta\rho, \quad \delta U_i = -\partial_i U + U_i^T. \quad (4.0.3)$$

と定義する。ここで $(\delta\rho, U)$ はスカラー摂動で U_i^T は発散がゼロのベクトル摂動である。圧力と4次元運動量の時間方向成分の摂動は独立していない成分で、

$$\delta p = c_s^2 \delta\rho, \quad \delta U_0 = -\bar{N}\alpha, \quad c_s^2 \equiv \frac{d\bar{p}}{d\bar{\rho}}. \quad (4.0.4)$$

¹ $A_{(i}B_{j)} = (A_i B_j + A_j B_i)/2$.

ここで c_s は スカラー摂動の音速である。

ベクトル摂動およびテンソル摂動はスカラー場 φ に依らず、従ってこれらの摂動から得られるものは一般相対論から得られる結果と全く同じであることに注意する [2]。すなわち、ベクトル摂動はメモリー効果に寄与せず、テンソル摂動は寄与する。従って、ベクトル摂動は以降考慮しない。テンソル摂動の結果は触れるに留めて、スカラー摂動に焦点をあてることにする。

テンソル摂動はゲージ不変であり、また、背景場でノンゼロの項を持たない粒子のエネルギー運動量テンソルもまたゲージ不変である。テンソル摂動 h_{ij} および $\mathcal{T}_{ij}$ に関する線形アインシュタイン方程式 (2.1.5) は

$$\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left(\ddot{h}_{ij} + 3H\dot{h}_{ij} - \frac{1}{a^2} \partial^2 h_{ij} \right) = \mathcal{T}_{ij} \quad (4.0.5)$$

である。

スカラー摂動はゲージ不変ではないため、重力に関する部分において以下のゲージ不変なスカラー摂動

$$\zeta \equiv \psi - \frac{H}{\dot{\bar{\varphi}}} \delta\varphi \quad (4.0.6)$$

を導入する。またユニタリゲージ

$$\delta\varphi = 0, \quad E = 0, \quad \psi = \zeta \quad (4.0.7)$$

を採用する。

計算を簡単にするため、 $\delta\rho$ から新しく導入された摂動変数 $\delta\chi$ への変形を以下の完全流体の部分において行う:²

$$\frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} = \frac{1+w}{c_s^2} \left(\frac{\dot{\delta\chi}}{v} - \alpha \right) \quad (4.0.8)$$

ここで背景場の量 v は一階微分方程式

$$\dot{v} + 3Hc_s^2 v = \frac{\dot{\bar{\varphi}} \bar{F}_\varphi}{2\bar{F}} (3c_s^2 - 1) \quad (4.0.9)$$

の解である。背景場の配位を明示的に与えられた時、この式を解いて v の実際の形を得ることができる。

$\zeta, \delta\chi, \alpha, \beta$ のスカラー摂動に関する線形アインシュタイン方程式 (2.1.5) より

$$2M_{\text{Pl}}^2 \left[3H(\dot{\zeta} - \alpha H) - \frac{1}{a^2} \partial^2 (\zeta + H\beta) \right] = -\alpha \dot{\bar{\varphi}}^2 + \frac{1+w}{c_s^2} \bar{\rho} \left(\frac{\dot{\delta\chi}}{v} - \alpha \right) - 2\alpha^{(P)}, \quad (4.0.10)$$

$$2M_{\text{Pl}}^2 \partial_i (\dot{\zeta} - H\alpha) = -\partial_i \left[\frac{\delta\chi}{v} (1+w) \bar{\rho} + \beta^{(P)} \right], \quad (4.0.11)$$

²(4.0.8) の変換は新しい場 $\delta\chi$ の微分項を含み、点変換ではない。この変換を行う方法としてハミルトニアン形式に移行して清純変換として行う方法が挙げられる。ここではラグランジアン形式で行えるより簡単な方法として [54] の Appendix B で挙げられている手法を採用する。

$$\frac{1}{a^2} M_{\text{Pl}}^2 \partial^i \partial_j \left(\zeta + \alpha + \dot{\beta} + H\beta \right) = -2\partial^i \partial_j E^{(P)} \quad \text{for } i \neq j, \quad (4.0.12)$$

$$\begin{aligned} & 2M_{\text{Pl}}^2 \left[\ddot{\zeta} + H \left(3\dot{\zeta} - \dot{\alpha} \right) - \left(2\dot{H} + 3H^2 \right) \alpha - \frac{1}{3a^2} \partial^2 \left(\zeta + \alpha + \dot{\beta} + H\beta \right) \right] \\ &= \alpha \dot{\varphi}^2 - (1+w)\bar{\rho} \left(\frac{\dot{\delta\chi}}{v} - \alpha \right) - 2\psi^{(P)} \quad \text{for } i = j \end{aligned} \quad (4.0.13)$$

を得る。

(2.1.9) の時間方向性分を線形化することによって、

$$\begin{aligned} & \frac{\ddot{\delta\chi}}{v} + \frac{3H}{2} \left[(1 - c_s^2) \frac{\dot{\delta\chi}}{v} + (3c_s^2 - 1)\alpha \right] + 3c_s^2 \dot{\zeta} - \dot{\alpha} - \frac{c_s^2}{a^2} \partial^2 \left(\frac{\delta\chi}{v} + \beta \right) \\ &= -\frac{\dot{\varphi}\bar{F}_\varphi}{4\bar{F}} (3c_s^2 - 1) \left(\frac{\dot{\delta\chi}}{v} - 3\alpha \right) \end{aligned} \quad (4.0.14)$$

を得る。ここで $\dot{v}$ を除去するために Eq. (4.0.9) を用いた。Eq. (2.1.9) の空間成分は $\dot{v}$ を Eq. (4.0.9) に代入すると自動的に満たされる。スカラー場の線形運動方程式 (2.1.7) より

$$\begin{aligned} & 3\dot{\zeta} - \dot{\alpha} + \frac{2\bar{V}_\varphi}{\dot{\varphi}} \alpha - \frac{1}{a^2} \partial^2 \beta \\ &= -\frac{\bar{F}_\varphi}{\dot{\varphi}\bar{F}} \left\{ \alpha^{(P)} + 3\psi^{(P)} + (1+w) \frac{\bar{\rho}}{2c_s^2} \left[\left(1 - \frac{5-3w}{1+w} c_s^2 \right) \alpha - (1-3c_s^2) \frac{\dot{\delta\chi}}{v} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.0.15)$$

を得る。ここで $\ddot{\varphi}$ を除去するために (2.1.20) を用いた。粒子のエネルギー運動量テンソルに関する保存則 (2.1.10) を線形化することで

$$\dot{\alpha}^{(P)} + 3H \left(\alpha^{(P)} - \psi^{(P)} \right) + \frac{1}{2a^2} \partial^2 \beta^{(P)} = -\frac{\dot{\varphi}\bar{F}_\varphi}{2\bar{F}} \left(\alpha^{(P)} + 3\psi^{(P)} \right), \quad (4.0.16)$$

$$\dot{\beta}^{(P)} + 3H\beta^{(P)} - 2\psi^{(P)} - \frac{4}{3} \partial^2 E^{(P)} = 0 \quad (4.0.17)$$

を得る。

続いて、non-dynamical な場である α と β を除去することを考える。まず、Eqs. (4.0.10) と (4.0.11) を用いて α と β の表式を得る。これらの表式を Eqs. (4.0.12) と (4.0.15) に代入して $\dot{\alpha}$ と $\dot{\beta}$ に関する表式を得る。 $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, α , β の標識を Eqs. (4.0.13) と (4.0.14) に代入すると

$$\mathcal{L}.\xi = -4\pi\mu^{(P)}, \quad (4.0.18)$$

$$\mathcal{L} \equiv - \left[\mathbf{1} \frac{d}{N d\tau} \left(\frac{d}{N d\tau} \right) + \mathbf{N} \frac{d}{N d\tau} - \mathbf{C} \frac{1}{a^2} \partial^2 + \mathbf{M} \right]$$

を得る。ここで 2×1 行列

$$\xi \doteq \begin{pmatrix} \zeta \\ \delta Q \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \zeta \\ \delta\chi + \frac{v}{H}\zeta \end{pmatrix}, \quad \mu^{(P)} \doteq \begin{pmatrix} \mu_{\zeta}^{(P)} \\ \mu_{\delta Q}^{(P)} \end{pmatrix} \quad (4.0.19)$$

を定義し、 2×2 行列 $\mathbf{N}$ と $\mathbf{C}$ はノンゼロの成分が

$$\begin{aligned} N_{11} &= -\frac{2\bar{V}_\varphi}{\dot{\bar{\varphi}}} - 3H - \frac{2\dot{H}}{H} - (3w-1)\bar{\rho}\frac{\bar{F}_\varphi}{\dot{\bar{\varphi}}\bar{F}}, \\ N_{12} &= -\frac{1+w}{c_s^2}\frac{\bar{\rho}H}{2v}\left[\frac{(1-c_s^2)}{HM_{\text{Pl}}^2} + (3c_s^2-1)\frac{\bar{F}_\varphi}{\dot{\bar{\varphi}}\bar{F}}\right] \\ &= -\left(\frac{1+w}{c_s^2}\frac{\bar{\rho}H^2}{\dot{\bar{\varphi}}^2v^2}\right)N_{21}, \\ N_{22} &= \frac{\dot{\bar{\varphi}}^2}{4}\left[\frac{6H}{\dot{\bar{\varphi}}^2}(1-c_s^2) + (3c_s^2-1)\frac{\bar{F}_\varphi}{\dot{\bar{\varphi}}\bar{F}}\right], \end{aligned} \quad (4.0.20)$$

$$C_{11} = 1, \quad C_{22} = c_s^2, \quad (4.0.21)$$

である。

2×2 行列 $\mathbf{M}$ の全成分はノンゼロであり、 $M_{11} \neq 0$, $M_{12} \neq 0$, $M_{21} \neq 0$, $M_{22} \neq 0$ 。また、粒子のソース $\boldsymbol{\mu}^{(P)}$ の成分は $\mu_\zeta^{(P)}$ および $\mu_{\delta Q}^{(P)}$ で表され、 $\mathbf{M}$ と $\boldsymbol{\mu}^{(P)}$ の具体的な成分は以下の通りである。後述するようにこれらの具体系は Cosmological memory effect を計算する上で必要としない。

質量行列 $\mathbf{M}$ の成分は

$$\begin{aligned} M_{11} &= \frac{(w+1)\bar{\rho}}{4M_{\text{Pl}}^2c_s^2}\left\{2\epsilon(3c_s^2-1) - 6c_s^2(1+c_s^2) + \frac{(1+w)\bar{\rho}(1-c_s^2)}{H^2M_{\text{Pl}}^2} - \frac{4c_s^2\bar{V}_\varphi}{H\dot{\bar{\varphi}}} + \frac{(3c_s^2-1)^2M_{\text{Pl}}^2\bar{F}_\varphi^2}{\bar{F}^2}\right. \\ &\quad \left.+ [\dot{\bar{\varphi}}^2(3c_s^4-4c_s^2+1) - \bar{\rho}((3w-5)c_s^2+w+1) - 2H^2M_{\text{Pl}}^2(3c_s^2-1)(\epsilon-3c_s^2)]\frac{\bar{F}_\varphi}{H\dot{\bar{\varphi}}\bar{F}}\right\}, \\ M_{12} &= \frac{(w+1)\bar{\rho}}{4M_{\text{Pl}}^2}\left\{3(1-3c_s^2)\frac{\dot{\bar{\varphi}}\bar{F}_\varphi}{2H\bar{F}} - \frac{\dot{\bar{\varphi}}^2(c_s^2-1)}{H^2M_{\text{Pl}}^2} + 15c_s^2 - 4\epsilon + 3\right\}, \\ M_{21} &= \frac{1}{2v}\left\{\epsilon H(3+4\epsilon-9c_s^2) - \frac{(w+1)\bar{\rho}\dot{\bar{\varphi}}^2(c_s^2-1)}{2H^3M_{\text{Pl}}^4} - \frac{(w+1)\bar{\rho}(-9c_s^2+4\epsilon+3)+12\dot{\bar{\varphi}}^2}{2HM_{\text{Pl}}^2}\right. \\ &\quad \left.+ \left[(1-3c_s^2)\frac{\bar{F}_\varphi}{H\bar{F}} - \frac{2\dot{\bar{\varphi}}}{H^2M_{\text{Pl}}^2}\right]\bar{V}_\varphi - (3c_s^2-1)(7\dot{\bar{\varphi}}^2+2(3w-1)\bar{\rho})\frac{\bar{F}_\varphi^2}{2H\bar{F}^2}\right. \\ &\quad \left.+ \left[(5\epsilon-3)(3c_s^2-1) - \frac{\bar{\rho}(3(w+1)c_s^2+11w-5)}{2H^2M_{\text{Pl}}^2}\right]\frac{\dot{\bar{\varphi}}\bar{F}_\varphi}{2\bar{F}} + (3c_s^2-1)\frac{\dot{\bar{\varphi}}^2\bar{F}_\varphi\varphi}{H\bar{F}}\right\}, \\ M_{22} &= \frac{(w+1)\bar{\rho}}{4M_{\text{Pl}}^2}\left[3-4\epsilon+15c_s^2+(1-c_s^2)\frac{\dot{\bar{\varphi}}^2}{H^2M_{\text{Pl}}^2}+3(1-3c_s^2)\frac{\dot{\bar{\varphi}}\bar{F}_\varphi}{2H\bar{F}}\right], \end{aligned} \quad (4.0.22)$$

であり、ここで $\epsilon \equiv -\dot{H}/H^2$ と定義した。

粒子のソース行列 $\mu^{(P)}$ の成分は

$$\begin{aligned}\mu_\zeta^{(P)} &= -\frac{1}{4\pi M_{\text{Pl}}^2} \left\{ \alpha^{(P)} + \psi^{(P)} + \frac{2}{3} \partial^2 E^{(P)} - \left[(3 - \epsilon)H + \frac{\bar{V}_\varphi}{\dot{\bar{\varphi}}} - \frac{(1+w)\bar{\rho}}{4HM_{\text{Pl}}^2 c_s^2} (1 - c_s^2) \right] \beta^{(P)} \right\} \\ &\quad + \frac{H\bar{F}_\varphi}{4\pi\dot{\bar{\varphi}}\bar{F}} \left[\alpha^{(P)} + 3\psi^{(P)} + \frac{(1+w)\bar{\rho}}{4HM_{\text{Pl}}^2 c_s^2} \left(1 - \frac{5-3w}{1+w} c_s^2 \right) \beta^{(P)} \right], \\ \mu_{\delta Q}^{(P)} &= \frac{v}{4\pi H M_{\text{Pl}}^2} \left\{ c_s^2 \alpha^{(P)} + \psi^{(P)} + \frac{2}{3} \partial^2 E^{(P)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \left[(3 - 4\epsilon + 15c_s^2) H + \dot{\bar{\varphi}}^2 \left(\frac{(1-c_s^2)}{H M_{\text{Pl}}^2} - \frac{3}{2} (3c_s^2 - 1) \frac{\bar{F}_\varphi}{\dot{\bar{\varphi}}\bar{F}} \right) \right] \beta^{(P)} \right\}\end{aligned}\quad (4.0.23)$$

である。

4.1 The retarded gravitational field

conformal time $\eta = \int [\bar{N}(\tau)/a(\tau)] d\tau$ を用いると、背景の線分要素 (2.1.15) は共形平坦な形

$$ds^2 = a(\eta)^2 (-d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j) \quad (4.1.1)$$

をとる。テンソル摂動について、(4.0.5) は

$$\left[\partial_\eta^2 + \frac{2}{a} \frac{da}{d\eta} \partial_\eta - \partial^2 \right] h_{ij} = 4\pi a^2 \mu_{ij} \quad (4.1.2)$$

である。ここで規格化されたソース $\mu_{ij} \equiv \frac{1}{2\pi M_{\text{Pl}}^2} \mathcal{T}_{ij}$ を定義した。

スカラー摂動については、Eq. (4.0.18) を各要素について書き下すと

$$\left[\partial_\eta^2 + \left(aN_{11} - \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} \right) \partial_\eta - \partial^2 + a^2 M_{11} \right] \zeta + [aN_{12} \partial_\eta + a^2 M_{12}] \delta Q = 4\pi a^2 \mu_\zeta^{(P)}, \quad (4.1.3)$$

$$\left[\partial_\eta^2 + \left(aN_{22} - \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} c_s^2 \right) \partial_\eta - c_s^2 \partial^2 + a^2 M_{22} \right] \delta Q + [aN_{21} \partial_\eta + a^2 M_{21}] \zeta = 4\pi a^2 \mu_{\delta Q}^{(P)} \quad (4.1.4)$$

が得られる。

既に述べたように、テンソル摂動 h_{ij} に関する memory effect は [2] で議論されている。さらに、完全流体のスカラー成分の自由度に対応する δQ という場合は、一般相対論においてはメモリー効果に寄与しないことがわかっている [2]。従って重力のスカラー成分 ζ にのみ注目すればいい。より正確には ζ に関する遅延グリーン関数の direct part のみを得ればいいということが期待される。この direct part はこの節および 4.3 節の主な議題である。refapp-Green においては、第一原理からはじめ、スカラーテンソル理論におけるスカラー成分 ζ および δQ の fundamental solutions を導出する。そして、 δQ が ζ の lightcone 上で得意になる点を持たない [Eq. (4.3.46)] が、lightcone の内側において ζ の発展を変化させることを見る [Eqs. (4.3.47)]。従って、 δQ は ζ の direct part に寄与しない。対応する遅延グリーン関数の direct part を計算することができる [Eq. (4.3.68)]。この結果を用いるならこの節の以下の議論を省略することができる。

この節では、厳密さでは劣るがより直感的に理解しやすい方法で同じ結果を得ることにする。結果にのみ興味がある場合は4.4節に移ってよく、また厳密な取り扱いに興味がある場合は4.2節及び4.3節を参照されたい。

4.3節で示すが、 δQ に関する遅延グリーン関数は ζ の light cone 上で特異性を持たない。従って Eq. (4.1.3) における δQ に比例する項を ζ のソースとして扱ってよく、この時 Eq. (4.1.3) は

$$\left[\partial_\eta^2 + \frac{2}{A_\zeta} \frac{dA_\zeta}{d\eta} \partial_\eta - \partial^2 + a^2 M_{11} \right] \zeta = 4\pi a^2 \mu_\zeta \quad (4.1.5)$$

と書き直すことができる。ここで

$$\mu_\zeta \equiv \mu_\zeta^{(P)} - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{a} N_{12} \partial_\eta + M_{12} \right) \delta Q, \quad (4.1.6)$$

$$A_\zeta(\eta) \equiv a(\eta) \exp \left[\frac{1}{2} \int_\eta \left(a N_{11} - \frac{3}{a} \frac{da}{d\eta} \right) d\bar{\eta} \right] \quad (4.1.7)$$

と定義した。

このとき対応するグリーン関数は

$$\left[\partial_\eta^2 + \frac{2}{A_\zeta} \frac{dA_\zeta}{d\eta} \partial_\eta - \partial^2 + a^2 M_{11} \right] G_\zeta^{\text{ret}}(x, x') = \frac{4\pi}{a^2} \delta^{(4)}(x - x') \quad (4.1.8)$$

を満たす。

一般に上記の方程式に対する遅延解は

$$G_\zeta^{\text{ret}}(x, x') = [U_\zeta(x, x') \delta(\sigma_\zeta) + V_\zeta(x, x') \Theta(-\sigma_\zeta)] \Theta(t - t') \quad (4.1.9)$$

次ように書き表すことできる。この表し方を Hadamard representation [55, 56] と言う。ここで U_ζ と V_ζ はそれぞれ direct part と tail part を特徴づける量であり、 $\sigma_\zeta(x, x')$ は点 x と点 x' における geodesic interval (geodesic distance の2乗) で

$$\bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu \sigma_\zeta \bar{\nabla}_\nu \sigma_\zeta = 2\sigma_\zeta \quad (4.1.10)$$

を満たす。ここでバーは共変微分が背景場のメトリック $\bar{g}_{\mu\nu}$ によって構成されていることを示している。[57, 58, 59] で示されている手法を用いると、(4.1.8) に

$$G_\zeta^{\text{ret}}(x, x') = \frac{A_\zeta(\eta')}{A_\zeta(\eta) a(\eta')^2} g_\zeta^{\text{ret}}(x, x') \quad (4.1.11)$$

を代入し、

$$\left[\partial_\eta^2 - \partial^2 + \left(a^2 M_{11} - \frac{1}{A_\zeta} \frac{d^2 A_\zeta}{d\eta^2} \right) \right] g_\zeta^{\text{ret}}(x, x') = 4\pi \delta^{(4)}(x - x') \quad (4.1.12)$$

を得る。この方程式は平坦な空間におけるグリーン関数とよく似ている。実際、(4.1.12) の左辺の最初の二項は平坦な空間での微分演算子に対応し、direct part を決定するものである。従って、(4.1.11) における G_ζ^{ret} と g_ζ^{ret} の関係を考えると、(4.1.9) から

$$U_\zeta(x, x') = \left[\frac{A_\zeta(\eta')}{A_\zeta(\eta)} \right] \bar{U}(x, x') \quad (4.1.13)$$

を得る。ここで $\bar{U}$ は平坦な空間での対応する量。 $\bar{U} = 1$ を用いると、グリーン関数 (4.1.9) の direct part は

$$U_\zeta(\eta, \eta') = \frac{A_\zeta(\eta')}{A_\zeta(\eta)} \quad (4.1.14)$$

となる。この結果はより厳密な方法で導かれ (4.3.68) と一致する。

質量項を除くと、Eqs. (4.1.2) と (4.1.5) は同じ形をしており、したがって A_ζ はスカラーモード ζ における実質的なスケールファクターとなっている。従って、同様の方法でテンソル摂動 h_{ij} に対する direct part が $U_h(\eta, \eta') = a(\eta')/a(\eta)$ であることを導くことができる [2]。

4.2 The minimal coupling and constant scalar background limit

この節及び次節では、前節で省略した ζ および δQ のグリーン関数について、一般論から始めて解析する。最終的な目標は δQ のグリーン関数が light cone 上で特異性を持たず、 ζ の light cone 上での振る舞いを解析するにあたって、 δQ 及びその微分項をソースの項として扱って良いことを示すことである。

(2.1.7) から、 $F = \text{constant}$ でスカラー場背景が一定の最小結合の場合、スカラー場のソース φ は存在しないはずなので、この場合スカラーメモリ効果はないことがわかる。一方、(4.0.23) 中で極限 $F = \text{constant}$ と $\dot{\varphi} = 0$ をとると、モード ζ に対して $\mu_\zeta^{(P)} \neq 0$ である。この極限ではスカラーメモリ効果があるのではないかと懸念されるが、これは完全非線形レベルで成立する (2.1.7) の式と明らかに矛盾している。この節では、これが単なるゲージの副産物であることを明らかにし、スカラー場の摂動に対応するゲージ不変量を用いて、この極限が本当に矛盾するわけではないことを示す。我々がユニタリーゲージ (4.0.7) を使った理由は、このゲージでは定数でないスカラー背景場の結果が非常にシンプルになるからである。

重力と流体のセクターでは、それぞれスカラー摂動 $\{\alpha, \beta, \psi, E, \delta\phi\}$ と $\{\delta\rho, U\}$ を扱い、Eq. (4.0.6) で定義した変数

$$\zeta = \psi - \frac{H}{\dot{\varphi}} \delta\varphi \quad (4.2.1)$$

を取り扱う。 ζ は ψ と $\delta\varphi$ によって構成され、 $\delta\varphi = 0$ であるユニタリゲージ (4.0.7) においては $\zeta = \psi$ となる。また、 $\psi = 0$ のゲージをとると $\zeta = \frac{H}{\dot{\varphi}} \delta\varphi$ となる。方程式において最小結合と定数スカラー場の極限 $F = \text{constant}$ 及び $\dot{\varphi} = 0$ を明らかにするためには、 $\delta\varphi$ を取り扱う必要がある。ゲージによる副産物による混乱を避けるため、次のゲージ不変量を取り扱うこととする。ただし、粒子のエネルギー運動量テンソルからくる全ての摂動量はゲージ不変であることに注意する。

$$\Phi = \alpha + (\beta - a^2 \dot{E}), \quad \Psi = \psi + H(\beta - a^2 \dot{E}), \quad (4.2.2)$$

$$\delta\varphi_N = \delta\varphi + \dot{\varphi}(\beta - a^2 \dot{E}), \quad (4.2.3)$$

$$\delta\rho_N = \delta\rho + \dot{\rho}(\beta - a^2 \dot{E}), \quad U_N = U + (\beta - a^2 \dot{E}). \quad (4.2.4)$$

ゲージ不変量で書き直すと ζ は

$$\zeta = \Psi - \frac{H}{\dot{\varphi}} \delta\varphi_N \quad (4.2.5)$$

となり、ゲージにかかわらずは常にメトリックの摂動を含むことがわかる。これから、節の最初に述べた矛盾が明らかになる。したがって、最小結合・スカラー背景定数の極限 $F = \text{constant}$ と $\dot{\varphi} = 0$ を方程式に現すには $\delta\varphi_N$ を取り扱う必要がある。

ゲージ不変量を定義すると、 $F = \text{constant}$ と $\dot{\varphi} = 0$ の極限を明らかにする $\delta\varphi_N$ を取り扱うことができる。したがって、簡単にするためにゲージを *longitudinal gauge* に固定する。

$$\beta = 0, \quad E = 0. \quad (4.2.6)$$

そうするとこれらのゲージ固定された量を得られる。

$$\Phi = \alpha, \quad \Psi = \psi, \quad \delta\varphi_N = \delta\varphi, \quad (4.2.7)$$

$$\delta\rho_N = \delta\rho, \quad U_N = U. \quad (4.2.8)$$

このゲージで明らかなように、 $\delta\varphi$ 、 $\delta\rho$ 、 U はゲージ不変量であり、以降 $\delta\varphi_N$ 、 $\delta\rho_N$ 、 U_N の添字を取り去って by $\delta\varphi, \delta\rho, U$ で表す。このゲージにおけるスカラー摂動の線素 (line element) は

$$ds^2 = -\bar{N}^2(1 + 2\Phi)dt^2 + a^2(1 + 2\Psi)\delta_{ij}dx^i dx^j \quad (4.2.9)$$

となる。

線形アインシュタイン方程式 (2.1.5) より

$$2M_{\text{Pl}}^2 \left[3H(\dot{\Psi} - H\Phi) - \frac{1}{a^2} \partial^2 \Psi \right] = -\dot{\varphi}^2 \Phi + \dot{\varphi} \dot{\delta\varphi} + \bar{V}_\varphi \delta\varphi + \delta\rho + 2\alpha^{(P)}, \quad (4.2.10)$$

$$-2M_{\text{Pl}}^2(\dot{\Psi} - H\Phi) = \dot{\varphi} \delta\varphi + (1 + w)\bar{\rho}U + \beta^{(P)}, \quad (4.2.11)$$

$$\frac{1}{a^2} M_{\text{Pl}}^2 \partial^i \partial_j (\Phi + \Psi) = -2\partial^i \partial_j E^{(P)}, \quad i \neq j \quad (4.2.12)$$

$$\begin{aligned} 2M_{\text{Pl}}^2 \left[\ddot{\Psi} + H(3\dot{\Psi} - \dot{\Phi}) - (2\dot{H} + 3H^2)\Phi \right] - \frac{2}{3}M_{\text{Pl}}^2 \frac{1}{a^2} \partial^2 (\Phi + \Psi) \\ = \dot{\varphi}^2 \Phi - \dot{\varphi} \dot{\delta\varphi} + \bar{V}_\varphi \delta\varphi - c_s^2 \delta\rho + 2\psi^{(P)} \quad i = j \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

が得られる。

完全流体に関する保存則 (2.1.9) を線形化すると、

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\delta\rho}}{\bar{\rho}} + 3H(1 + c_s^2) \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} + (1 + w) \left(3\dot{\Psi} - \frac{1}{a^2} \partial^2 U \right) \\ = -\frac{\dot{\varphi} \bar{F}_\varphi}{2\bar{F}} (1 - 3c_s^2) \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} - \frac{1}{2} (1 - 3w) \frac{d}{\bar{N} dt} \left(\frac{\bar{F}_\varphi}{\bar{F}} \delta\varphi \right), \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

$$\dot{U} + 3HU - \left(\frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} + \frac{\dot{w}}{1 + w} \right) U = \frac{c_s^2}{(1 + w)} \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} + \Phi - \frac{\bar{F}_\varphi}{2\bar{F}} \frac{1 - 3w}{1 + w} \delta\varphi \quad (4.2.15)$$

が得られる。粒子のエネルギー運動量テンソル (2.1.10) の保存則を線形化すると、(4.0.16) 及び (4.0.17) と同じ方程式が得られる。

スカラー場の運動方程式 (2.1.7) を線形化すると

$$\begin{aligned} \ddot{\delta\varphi} + 3H\dot{\delta\varphi} + \left(-\frac{1}{a^2}\partial^2 + \bar{V}_{\varphi\varphi}\right)\delta\varphi + 2\bar{V}_{\varphi}\Phi + \dot{\bar{\varphi}}(3\dot{\Psi} - \dot{\Phi}) \\ = \frac{\bar{F}_{\varphi}}{2\bar{F}} \left[(1 - 3c_s^2)\delta\rho + 2(\alpha^{(P)} + 3\psi^{(P)})\right] + \frac{1}{2}(1 - 3w)\bar{\rho} \left[2\frac{\bar{F}_{\varphi}}{\bar{F}}\Phi + \frac{d}{\bar{N}dt} \left(\frac{\bar{F}_{\varphi}}{\bar{F}}\right)\delta\varphi\right] \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

が得られる。この結果から、 $F = \text{constant}$ 及び $\dot{\bar{\varphi}} = 0$ は明らかである。つまり、この極限において $\delta\varphi$ のソースは存在しない。従って、期待されたように、この極限においてはメモリー効果は存在しない。

4.3 The coupled wave equations on a curved space-time

この節では、Eq. (4.0.18) に対応するグリーン関数を第一原理から求めることを主目的とする。他の目的にも適用できるような一般的な設定を考えて、一般的な結果を最後の小節において Eq. (4.0.18) という特殊なケースに適用する。

最初にメトリック $g_{\mu\nu}$ を持つ背景時空を伝播する波動方程式

$$\mathcal{L}' \cdot \xi' = -4\pi\mu', \quad \mathcal{L}' = \mathcal{G}'^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - \mathcal{N}'^{\mu} \nabla_{\mu} - \mathcal{M}' \quad (4.3.1)$$

を考える。ここで、 ∇ は $g_{\mu\nu}$ に対応する共変微分で、 $\mathcal{G}'^{\mu\nu}$ 、 $\mathcal{N}'^{\mu}$ 及び $\mathcal{M}'$ は 2×2 行列である。 ξ' と μ' は 2×1 行列である。行列 $\mathcal{G}'^{\mu\nu}$ はモード ξ' に対する Light cone の構造を特徴づけ、行列 $\mathcal{N}'^{\mu}$ は摩擦項であり、行列 $\mathcal{M}'$ は質量行列、 μ' はソースの行列である。

場の再定義 $\xi = \mathbf{P} \cdot \xi'$ を行い、 $\mu \equiv \mathbf{P}^{\dagger} \cdot \mu'$ と定義すると、Eq. (4.3.1) は

$$\mathcal{L} \cdot \xi = -4\pi\mu, \quad \mathcal{L} = \mathcal{G}^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - \mathcal{N}^{\mu} \nabla_{\mu} - \mathcal{M} \quad (4.3.2)$$

になる。ここで

$$\mathcal{G}^{\mu\nu} \equiv \mathbf{P}^{\dagger} \cdot \mathcal{G}'^{\mu\nu} \cdot \mathbf{P}, \quad (4.3.3)$$

$$\mathcal{N}^{\mu} \equiv \mathbf{P}^{\dagger} \cdot \mathcal{N}'^{\mu} \cdot \mathbf{P} - 2\mathbf{P}^{\dagger} \cdot \mathcal{G}'^{\mu\nu} \cdot \nabla_{\nu} \mathbf{P}, \quad (4.3.4)$$

$$\mathcal{M} \equiv \mathbf{P}^{\dagger} \cdot \mathcal{M}' \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P}^{\dagger} \cdot \mathcal{N}'^{\mu} \cdot \nabla_{\mu} \mathbf{P} - \mathbf{P}^{\dagger} \cdot \mathcal{G}'^{\mu\nu} \cdot \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \mathbf{P} \quad (4.3.5)$$

と定義した。

$\mathbf{P}$ を適切に選べば、この変換によって $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ を単純な形に変換することができる。これは後に ξ の Light cone の構造を調べる上で重要である。

$$\xi \doteq \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \mu \doteq \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad (4.3.6)$$

とすると、Eq. (4.3.2) より

$$\mathcal{L}_{11}\xi_1 + \mathcal{L}_{12}\xi_2 = -4\pi\mu_1, \quad (4.3.7)$$

$$\mathcal{L}_{21}\xi_1 + \mathcal{L}_{22}\xi_2 = -4\pi\mu_2 \quad (4.3.8)$$

を得る。また、対応するグリーン関数は

$$\mathcal{L}_{11}G_1^S(x, x') + \mathcal{L}_{12}G_2^S(x, x') = -4\pi\delta^{(4)}(x, x'), \quad (4.3.9)$$

$$\mathcal{L}_{21}G_1^S(x, x') + \mathcal{L}_{22}G_2^S(x, x') = -4\pi\delta^{(4)}(x, x') \quad (4.3.10)$$

となる。ここで $\delta^{(4)}(x, x') = \delta^{(4)}(x - x')/\sqrt{-g}$ である。 ξ_1 及び ξ_2 の解は

$$\xi_1(x) = \int d^4x' \sqrt{-g(x')} G_1^S(x, x') \mu_1(x'), \quad (4.3.11)$$

$$\xi_2(x) = \int d^4x' \sqrt{-g(x')} G_2^S(x, x') \mu_2(x'). \quad (4.3.12)$$

で与えられる。

4.3.1 Foliation of the spacetime

前節の設定は、背景のメトリック $g_{\mu\nu}$ に何の条件も課さず、非常に一般的なものであった。この節では、背景のメトリックが、時空をタイムスライスによる葉層構造を持つことを可能にすると仮定し、議論を簡単にする。この仮定は、波動方程式を調べる上で時間の概念が必要であるという意味で妥当な仮定である。例えば、宇宙論的時空、球対称解、ブラックホール解などがこの仮定に当てはまる。

今考えている時間の範囲内において時空に葉層構造を与えると、空間的・時間一定超曲面に対応する単位ベクトルは

$$n_\mu = -\frac{\delta^0_\mu}{\sqrt{-g^{00}}}, \quad g^{\mu\nu}n_\mu n_\nu = -1. \quad (4.3.13)$$

で与えられる。空間的超曲面上の誘導計量を次のように定義する。

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \quad (4.3.14)$$

誘導計量は $h_\mu^\alpha n_\alpha = 0$ 及び $h^\mu_\alpha h^\alpha_\nu = h^\mu_\nu$ を満たす。タイムスライスの存在より、行列 $\mathcal{G}'^{\mu\nu}$ 及び $\mathcal{N}'^\mu$ が次の形をとることを仮定する。

$$\mathcal{G}'^{\mu\nu} = \mathcal{C}' h^{\mu\nu} - \mathcal{K}' n^\mu n^\nu, \quad (4.3.15)$$

$$\mathcal{N}'^\mu = \Theta' n^\mu - \kappa'^\mu, \quad n_\mu \kappa'^\mu = 0. \quad (4.3.16)$$

ここで $\mathcal{C}'$ 、 $\mathcal{K}'$ 、 Θ' 、 κ'^μ は一般の 2×2 行列であり、それぞれの成分は時空の座標の関数である。(4.3.3) 及び (4.3.4) より

$$\mathcal{G}^{\mu\nu} = \mathcal{C} h^{\mu\nu} - \mathcal{K} n^\mu n^\nu, \quad (4.3.17)$$

$$\mathcal{N}^\mu = \Theta n^\mu - \kappa^\mu, \quad n_\mu \kappa^\mu = 0 \quad (4.3.18)$$

を得る。ここで

$$\mathcal{C} \equiv \mathbf{P}^\top \cdot \mathcal{C}' \cdot \mathbf{P},$$

$$\mathcal{K} \equiv \mathbf{P}^\top \cdot \mathcal{K}' \cdot \mathbf{P},$$

$$\Theta \equiv \mathbf{P}^\top \cdot \Theta' \cdot \mathbf{P} - 2\mathbf{P}^\top \cdot \mathcal{K}' \cdot n^\nu \nabla_\nu \mathbf{P},$$

$$\kappa^\mu \equiv \mathbf{P}^\top \cdot \kappa'^\mu \cdot \mathbf{P} + 2\mathbf{P}^\top \cdot \mathcal{C}' \cdot h^{\mu\nu} \nabla_\nu \mathbf{P}$$

と定義した。(4.3.18)の分解は $\mathcal{N}^\mu$ の分解について最も一般的なものであり、一方(4.3.17)は $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ について最も一般的な分解ではない。しかしながら、(4.3.15)と(4.3.17)からわかるようにこの特別な形は $\mathbf{P}$ によって特徴付けられる一般の変換に対して不変であり、宇宙論的な時空や球対称時空、多くのブラックホール解など多くの興味深いケースを含むほどには一般的である。

$\mathcal{C}$ 及び $\mathcal{K}$ はモード ξ_1 および ξ_2 の勾配 (gradient) 項と運動項を特徴づけるため、ゴースト不安定性を避けるためどちらも正定値の行列であることを仮定する。さらに、直行成分と接線成分が独立であることから、 $\mathbf{P}$ の二つの成分によって $\mathcal{C} = \mathbf{P}^\top \mathcal{C}' \mathbf{P}$ と $\mathcal{K} = \mathbf{P}^\top \mathcal{K}' \mathbf{P}$ の両方を対角化するのに十分である。 $\mathbf{P}$ の残りの2成分を規格化 $\mathcal{K} = \mathbf{1}$ に使うことがなくなる。従って、 $\mathbf{P}$ を適切に選ぶことでEq. (4.3.17)を

$$\mathcal{G}^{\mu\nu} = \mathcal{C} h^{\mu\nu} - \mathbf{1} n^\mu n^\nu \quad (4.3.19)$$

のように単純化できる。ここで $\mathcal{C}$ は対角な 2×2 行列。ここで $n_\mu n_\nu \mathcal{G}^{\mu\nu} = -1$ は $\mathcal{K} = \mathbf{1}$ という選択がメトリック行列 $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ のそれぞれの対角成分に関して n^μ を規格化する条件に対応していることに注意する。また、 $\mathcal{C} \propto \mathbf{1}$ 、あるいは等価だが $\mathcal{G}^{\mu\nu} \propto 1g^{\mu\nu}$ という、両方のモードが同じ速度で進むつまらない場合を考慮しないことも念頭に置いておく。 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{K}$ が正定値であるという仮定から、逆行列 $\mathcal{G}^{\mu\alpha} \mathcal{G}_{\alpha\nu} = 1\delta^\mu_\nu$ の存在が保証され、

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \mathcal{C}^{-1} h_{\mu\nu} - \mathbf{1} n_\mu n_\nu \quad (4.3.20)$$

で与えられる。次に、これまでの結果をより実用的な成分表示によって表す。 $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ と $\mathcal{C}$ の対角成分を次のように導入する。

$$\mathcal{G}^{\mu\nu} \equiv \text{diag}(\mathcal{G}_1^{\mu\nu}, \mathcal{G}_2^{\mu\nu}), \quad \mathcal{C} = \text{diag}(c_1^2, c_2^2). \quad (4.3.21)$$

すると(4.3.19)と(4.3.20)は

$$\mathcal{G}_1^{\mu\nu} = c_1^2 h^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu, \quad \mathcal{G}_2^{\mu\nu} = c_2^2 h^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu, \quad (4.3.22)$$

$$\mathcal{G}_{1\mu\nu} = c_1^{-2} h_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu, \quad \mathcal{G}_{2\mu\nu} = c_2^{-2} h_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu \quad (4.3.23)$$

を与える。

$\mathcal{C}$ の正定値及び、上記のつまらない場合を考えないという条件より

$$c_1 \neq 0, \quad c_2 \neq 0, \quad c_1 \neq c_2 \quad (4.3.24)$$

であるから、(4.3.7)及び(4.3.8)の(4.3.18)及び(4.3.19)を用いて成分表示(4.3.21)を用いると、

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^2}{ds^2} + (c_1^2 \theta + \Theta_{11}) \frac{d}{ds} - c_1^2 D^2 - (a^\mu + \kappa_{11}^\mu) D_\mu + \mathcal{M}_{11} \right] \xi_1 \\ & + \left[\Theta_{12} \frac{d}{ds} + \kappa_{12}^\mu D_\mu + \mathcal{M}_{12} \right] \xi_2 = 4\pi\mu_1, \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^2}{ds^2} + (c_2^2 \theta + \Theta_{22}) \frac{d}{ds} - c_2^2 D^2 - (a^\mu + \kappa_{22}^\mu) D_\mu + \mathcal{M}_{22} \right] \xi_2 \\ & + \left[\Theta_{21} \frac{d}{ds} + \kappa_{21}^\mu D_\mu + \mathcal{M}_{21} \right] \xi_1 = 4\pi\mu_2, \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

を得る。ここでパラメータ s と expansion

$$\frac{d}{ds} \equiv n^\mu \nabla_\mu, \quad \theta \equiv \nabla_\mu n^\mu \quad (4.3.27)$$

を定義した。また、空間方向の微分 D と加速度 a_μ を

$$D_\mu \equiv h_\mu^\alpha \nabla_\alpha, \quad a_\mu \equiv n^\nu \nabla_\nu n_\mu. \quad (4.3.28)$$

と定義した。Eqs. (4.3.25) 及び (4.3.26) より c_1 及び c_2 はモード ξ_1 及び ξ_2 の音速であることがわかる。これがタイムスライスに基づいて分解を行う利点である。

4.3.2 Geodetic intervals and van Vleck-Morette determinants

波動方程式 (4.3.7) 及び (4.3.8)、あるいは等価な Eqs. (4.3.25) 及び (4.3.26) を解くにあたって、時間的な測地線距離 (*geodetic intervals*) $s_1(x, x')$ 及び $s_2(x, x')$ を

$$\mathcal{G}_1^{\mu\nu} \nabla_\mu s_1 \nabla_\nu s_1 = -1, \quad \mathcal{G}_2^{\mu\nu} \nabla_\mu s_2 \nabla_\nu s_2 = -1 \quad (4.3.29)$$

と定義する。測地線距離 $s_1(x, x')$ 及び $s_2(x, x')$ は二つの異なる座標の点 x 及び x' に依存する bi-scalar である。 x と x' の間の距離は $s_1(x, x')$ 及び $s_2(x, x')$ により、2 点をつなぐ測地線に沿う、それぞれ対応するメトリックにより評価される。bi-scalar の性質はいくつかの文献で議論されている (例えば [60, 59])。また、これとは別の測地線距離を

$$\sigma_1(x, x') = -\frac{1}{2} s_1(x, x')^2, \quad \sigma_2(x, x') = -\frac{1}{2} s_2(x, x')^2 \quad (4.3.30)$$

と定義する。これらは測地線距離の二乗に対応し、

$$\mathcal{G}_1^{\mu\nu} \nabla_\mu \sigma_1 \nabla_\nu \sigma_1 = 2\sigma_1, \quad \mathcal{G}_2^{\mu\nu} \nabla_\mu \sigma_2 \nabla_\nu \sigma_2 = 2\sigma_2 \quad (4.3.31)$$

を満たす。また、 σ_1 and σ_2 の二階の共変微分を van Vleck-Morette 行列式と呼ばれるもので表すことにも意味がある。

$$\Delta_1(x, x') = \frac{D_1(x, x')}{\sqrt{-g(x)}\sqrt{-g(x')}}, \quad D_1(x, x') = -\det[-\nabla_\mu \nabla_{\mu'} \sigma_1(x, x')], \quad (4.3.32)$$

$$\Delta_2(x, x') = \frac{D_2(x, x')}{\sqrt{-g(x)}\sqrt{-g(x')}}, \quad D_2(x, x') = -\det[-\nabla_\mu \nabla_{\mu'} \sigma_2(x, x')]. \quad (4.3.33)$$

ここで $\nabla_{\mu'}$ は x' に関する共変微分を意味する。Eqs. (4.3.31) を x について共変微分をとり、さらに x' について共変微分をとり、[60] と同様の手法で結果を操作すると van Vleck-Morette 行列式が関係式

$$\Delta_1^{-1} \nabla_\mu (\Delta_1 \mathcal{G}_1^{\mu\nu} \nabla_\nu \sigma_1) = 4, \quad (4.3.34)$$

$$\Delta_2^{-1} \nabla_\mu (\Delta_2 \mathcal{G}_2^{\mu\nu} \nabla_\nu \sigma_2) = 4 \quad (4.3.35)$$

を満たしていることがわかる。ここでメトリック $\mathcal{G}_{1\mu\nu}$ と $\mathcal{G}_{2\mu\nu}$ のどちらも共変微分を構成するのに使われているわけではないため、次の非自明な寄与を生み出していることに注意する。

$$\nabla_\mu \mathcal{G}_1^{\mu\nu} = 2c_1^2 D^\nu \ln c_1 + (c_1^2 - 1)(\theta n^\nu + a^\nu), \quad (4.3.36)$$

$$\nabla_\mu \mathcal{G}_2^{\mu\nu} = 2c_2^2 D^\nu \ln c_2 + (c_2^2 - 1)(\theta n^\nu + a^\nu). \quad (4.3.37)$$

二つの timelike ベクトル

$$\begin{aligned} t_{1\mu} &\equiv -\nabla_\mu s_1 = \alpha_1 n_\mu + q_{1\mu}, \\ t_{2\mu} &\equiv -\nabla_\mu s_2 = \alpha_2 n_\mu + q_{2\mu} \end{aligned} \quad (4.3.38)$$

を定義する。Eqs. (4.3.29) の定義からこれらは単位ベクトルであり $\mathcal{G}_1^{\mu\nu} t_{1\mu} t_{1\nu} = -1$ 及び $\mathcal{G}_2^{\mu\nu} t_{2\mu} t_{2\nu} = -1$ を満たす。この結果から単位ベクトルを n_μ に比例する接線成分と空間的ベクトル $q_{1,2\mu}$ に比例する直交成分に分解する。ただし $n^\mu q_{1,2\mu} = 0$ が成立するとする。 $t_{1\mu}$ と $t_{2\mu}$ の成分は時空の座標の関数で規格化条件

$$c_1^2 q_1^2 - \alpha_1^2 = -1, \quad c_2^2 q_2^2 - \alpha_2^2 = -1 \quad (4.3.39)$$

に従う。ここで $q_{1,2}^2 = g^{\mu\nu} q_{1,2\mu} q_{1,2\nu}$ である。(4.3.30) を x に関して微分すると

$$\nabla_\mu \sigma_1 = s_1 t_{1\mu}, \quad \nabla_\mu \sigma_2 = s_2 t_{2\mu} \quad (4.3.40)$$

を得る。この結果を Eqs. (4.3.34) と (4.3.35) に代入し、Eqs. (4.3.22) と (4.3.38) を用いて少しわかりやすい形にすると、

$$\frac{d}{ds_1} \log(\alpha_1 \Delta_1) - q_1^\mu [(1 - c_1^2) D_\mu \log \Delta_1 + D_\mu \log \alpha_1] + D_\mu (c_1^2 q_1^\mu) = \frac{3}{s_1} - \alpha_1 \theta, \quad (4.3.41)$$

$$\frac{d}{ds_2} \log(\alpha_2 \Delta_2) - q_2^\mu [(1 - c_2^2) D_\mu \log \Delta_2 + D_\mu \log \alpha_2] + D_\mu (c_2^2 q_2^\mu) = \frac{3}{s_2} - \alpha_2 \theta \quad (4.3.42)$$

を得る。ここで $\frac{d}{ds_1}$ 及び $\frac{d}{ds_2}$ は timelike ベクトル t_1^μ 及び t_2^μ に沿った Lie 微分であり、

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds_1} &\equiv t_1^\mu \nabla_\mu = \alpha_1 \frac{d}{ds} + q_1^\mu D_\mu, \\ \frac{d}{ds_2} &\equiv t_2^\mu \nabla_\mu = \alpha_2 \frac{d}{ds} + q_2^\mu D_\mu \end{aligned} \quad (4.3.43)$$

, を満たす。

4.3.3 Fundamental solutions

測地線距離を用いて、Eqs. (4.3.7) 及び (4.3.8)、あるいは等価だが Eqs. (4.3.25) 及び (4.3.26) の基本解 (*fundamental solutions*) の Hadamard 表示

$$G_1 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{U_1}{\sigma_1} - V_1 \log |\sigma_1| + W_1 + \frac{\hat{U}_2}{\sigma_2} - \hat{V}_2 \log |\sigma_2| \right], \quad (4.3.44)$$

$$G_2 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{U_2}{\sigma_2} - V_2 \log |\sigma_2| + W_2 + \frac{\hat{U}_1}{\sigma_1} - \hat{V}_1 \log |\sigma_1| \right] \quad (4.3.45)$$

を得る [60, 55, 56]。ここで $U_{1,2}$ 、 $V_{1,2}$ 、 $W_{1,2}$ 、 $\hat{U}_{1,2}$ 、及び $\hat{V}_{1,2}$ は x と x' の正則な bi-scalar である。 $\hat{U}_2$ 及び $\hat{V}_2$ は相互作用を通じて ξ_2 が ξ_1 の解において特異性を持つ可能性を考慮するために導入された。 $\hat{U}_1$ 及び $\hat{V}_1$ も同様の理由で導入された。 U_1 、 V_1 、及び W_1 はそれぞれモード ξ_1 の、 σ_1 によって定義される light cone に沿った direct part、tail part、それ以外の正則な部分の特徴づける量であり、 $\hat{U}_2$ 及び $\hat{V}_2$ は σ_2 によって定義される別の light cone 上の direct part と tail part を特徴づける量である。

この仮定 (4.3.44) を Eq. (4.3.7) に代入すると、左辺は σ_1^{-2} 、 σ_1^{-1} 、 $\log |\sigma_1|$ 、また σ_2^{-3} 、 σ_2^{-2} 、 σ_2^{-1} 、 $\log |\sigma_2|$ に比例する項に分けることができる。ここで、 σ_1^{-3} に比例する項は (4.3.31) を用いることで σ_1^{-2} のオーダーの寄与のみを与えることに注意する。また、 σ_2 に関して特異的である項は ξ_1 と ξ_2 の相互作用によって現れることにも注意する。同様に、仮定 (4.3.45) を Eq. (4.3.8) に代入すると、左辺は σ_2^{-2} 、 σ_2^{-1} 、 $\log |\sigma_2|$ 、 σ_1^{-3} 、 σ_1^{-2} 、 σ_1^{-1} 、 $\log |\sigma_1|$ に比例するよう分類することができる。

最も特異性の高い項、つまり σ_2^{-3} と σ_1^{-3} の係数がゼロになることを要求すると、

$$\hat{U}_1 = 0, \quad \hat{U}_2 = 0 \quad (4.3.46)$$

がわかる。次のオーダーを考えて、Eqs. (4.3.7) 及び (4.3.8) 中の σ_2^{-2} と σ_1^{-2} に比例する項の係数が消えることを要求すると、

$$\begin{aligned} \hat{V}_1 &= - \left(\frac{c_1^2}{c_2^2 - c_1^2} \right) \left(\frac{d\sigma_1}{ds} \right)^{-1} \Theta_{21} U_1, \\ \hat{V}_2 &= \left(\frac{c_2^2}{c_2^2 - c_1^2} \right) \left(\frac{d\sigma_2}{ds} \right)^{-1} \Theta_{12} U_2 \end{aligned} \quad (4.3.47)$$

を得る。ここで (4.3.46) を用いた。 $c_1 = c_2$ の時分母はゼロになるが、これは先に取り除いた場合である。(4.3.46) 及び (4.3.47) から、 $\hat{U}_2 = 0$ より、モード ξ_2 は G_1 の解の direct part に寄与しないことがわかる。しかし、 ξ_2 の direct part は $\hat{V}_2 \propto U_2$ であることから ξ_1 の tail part に影響する。

次に、(4.3.7) と (4.3.8) の σ_1^{-2} 及び σ_2^{-2} に比例する項が消えるとなると、direct part に関する式

$$\left\{ \mathcal{G}_1^{\mu\nu} [2\nabla_\mu U_1 - (\nabla_\mu \log \Delta_1) U_1] - (\Theta_{11} n^\nu - \kappa_{11}^\nu + \nabla_\mu \mathcal{G}_1^{\mu\nu}) U_1 \right\} \nabla_\nu \sigma_1 = 0, \quad (4.3.48)$$

$$\left\{ \mathcal{G}_2^{\mu\nu} [2\nabla_\mu U_2 - (\nabla_\mu \log \Delta_2) U_2] - (\Theta_{22} n^\nu - \kappa_{22}^\nu + \nabla_\mu \mathcal{G}_2^{\mu\nu}) U_2 \right\} \nabla_\nu \sigma_2 = 0 \quad (4.3.49)$$

を得る。これらは初期条件

$$\lim_{x \rightarrow x'} U_1(x, x') = 1, \quad \lim_{x \rightarrow x'} U_2(x, x') = 1. \quad (4.3.50)$$

を満たす。一般には一階の微分方程式 (4.3.48) 及び (4.3.49) を van Vleck-Morette 行列式 Δ_1 及び Δ_2 について解いて、 U_1 と U_2 を得ることができる。しかし、Eqs. (4.3.48) 及び (4.3.49) にメトリックの具体形 (4.3.22) と (4.3.36)、(4.3.37) を用いて n_μ をかけることにより結果を簡単にできて、

$$\frac{d}{ds} \left[\log \left(\frac{U_1}{\sqrt{\Delta_1}} \right) \right] = -\frac{1}{2} [\Theta_{11} - (1 - c_1^2) \theta], \quad (4.3.51)$$

$$\frac{d}{ds} \left[\log \left(\frac{U_2}{\sqrt{\Delta_2}} \right) \right] = -\frac{1}{2} [\Theta_{22} - (1 - c_2^2) \theta] \quad (4.3.52)$$

を得る。さらに $h_{\mu\nu}$ と縮約すると

$$c_1^2 D_\mu \left[\log \left(\frac{U_1}{c_1 \sqrt{\Delta_1}} \right) \right] = -\frac{1}{2} [\kappa_{\mu 11} + (1 - c_1^2) a_\mu], \quad (4.3.53)$$

$$c_2^2 D_\mu \left[\log \left(\frac{U_2}{c_2 \sqrt{\Delta_2}} \right) \right] = -\frac{1}{2} [\kappa_{\mu 22} + (1 - c_2^2) a_\mu] \quad (4.3.54)$$

を得る。方程式 (4.3.51)-(4.3.54) は積分条件を満たすことを仮定すれば少なくとも局所的な解を持つ。

4.3.4 グリーン関数

基本解 (4.3.44) と (4.3.45) を用いて、複素空間に議論を広げ、 $i\epsilon$ -処方を行うことでグリーン関数を見つけることができる。ファインマン・プロパゲーター

$$G_1^F = \frac{1}{\pi} \left[\frac{U_1}{\sigma_1 + i\epsilon} - V_1 \log |\sigma_1 + i\epsilon| + W_1 - \hat{V}_2 \log |\sigma_2 + i\epsilon| \right], \quad (4.3.55)$$

$$G_2^F = \frac{1}{\pi} \left[\frac{U_2}{\sigma_2 + i\epsilon} - V_2 \log |\sigma_2 + i\epsilon| + W_2 - \hat{V}_1 \log |\sigma_1 + i\epsilon| \right] \quad (4.3.56)$$

を代入する。ここで (4.3.46) の結果を用いた。ファインマン・プロパゲーターを実数部分と虚数部分

$$G_1^F = G_1 - iG_1^S, \quad G_2^F = G_2 - iG_2^S \quad (4.3.57)$$

に分ける。そして恒等式

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma + i\epsilon} &= \mathcal{P} \left(\frac{1}{\sigma} \right) - i\pi \delta(\sigma), \\ \log(\sigma + i\epsilon) &= \log |\sigma| + i\pi \Theta(-\sigma) \end{aligned}$$

を用いる。ただし $\mathcal{P}$ は主値である。すると、グリーン関数の次の表式

$$G_1^S(x, x') = U_1(x, x') \delta(\sigma_1) + V_1(x, x') \Theta(-\sigma_1) + \hat{V}_2(x, x') \Theta(-\sigma_2), \quad (4.3.58)$$

$$G_2^S(x, x') = U_2(x, x') \delta(\sigma_2) + V_2(x, x') \Theta(-\sigma_2) + \hat{V}_1(x, x') \Theta(-\sigma_1) \quad (4.3.59)$$

を得る。

Eqs. (4.3.58) 及び (4.3.59) は (4.3.7) と (4.3.8) を満たす ξ_1 及び ξ_2 のグリーン関数の最終形である。グリーン関数を用いると、 ξ_1 と ξ_2 の任意のソース μ_1 及び μ_2 に関する解を Eqs. (4.3.11) 及び (4.3.12) を通じて見つけることができる。

一般に Eqs. (4.3.51)、(4.3.52)、(4.3.53)、(4.3.54) で与えられる direct part の具体的な方程式を導いた。同様の手法で tail part や正則な部分に関する方程式を導くこともできるが、メモリー効果を議論する上で必要ないため割愛する。

4.3.5 Application: scalar perturbations in scalar-tensor theory

前節で用いられた一般的な設定から、メモリー効果の議論に置いて用いられる設定に戻る。Eq. (4.0.18) は Eq. (4.3.2) の形に書き換えることができる。そのために

$$\xi_1 = \zeta, \quad \xi_2 = \delta Q \quad (4.3.60)$$

とみなし、

$$\Theta = \mathbf{N} - 3HC, \quad \mathcal{C} = \mathbf{C}, \quad \mathcal{M} = \mathbf{M}, \quad \mu = \mu^{(P)} \quad (4.3.61)$$

とする。ここで $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{M}$ 、 $\mu^{(P)}$ の具体形は Eqs. (4.0.20), (4.0.21)、(4.0.22)、(4.0.23) で用いられている。(4.3.61) で (4.0.21) を用いて、(4.3.19) に代入すると、

$$\mathcal{G}_\zeta^{\mu\nu} = \bar{h}^{\mu\nu} - \bar{n}^\mu \bar{n}^\nu = \bar{g}^{\mu\nu}, \quad \mathcal{G}_{\delta Q}^{\mu\nu} = c_s^2 \bar{h}^{\mu\nu} - \bar{n}^\mu \bar{n}^\nu, \quad (4.3.62)$$

を得る。ここで背景のメトリック $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}$ が考えられている。 δQ を用いることでメトリックが対角化している。

Eqs. (4.3.58) 及び (4.3.59) から対応するグリーン関数の表式

$$\hat{G}_\zeta^{\text{ret}}(x, x') = \left[U_\zeta(x, x') \delta(\sigma_\zeta) + V_\zeta(x, x') \Theta(-\sigma_\zeta) + \hat{V}_{\delta Q}(x, x') \Theta(-\sigma_{\delta Q}) \right] \Theta(t - t'), \quad (4.3.63)$$

$$\hat{G}_{\delta Q}^{\text{ret}}(x, x') = \left[U_{\delta Q}(x, x') \delta(\sigma_{\delta Q}) + V_{\delta Q}(x, x') \Theta(-\sigma_{\delta Q}) + \hat{V}_\zeta(x, x') \Theta(-\sigma_\zeta) \right] \Theta(t - t') \quad (4.3.64)$$

を得る。ここで測地線距離は

$$\mathcal{G}_\zeta^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu \sigma_\zeta \bar{\nabla}_\nu \sigma_\zeta = 2\sigma_\zeta, \quad \mathcal{G}_{\delta Q}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu \sigma_{\delta Q} \bar{\nabla}_\nu \sigma_{\delta Q} = 2\sigma_{\delta Q} \quad (4.3.65)$$

を満たす。ここで $\bar{\nabla}$ は背景の計量 $\bar{g}_{\mu\nu}$ に関する共変微分である。

$c_1 = 1$ かつ $a_\mu = 0$ で ζ の direct part に関する解を見つけることは容易である。この場合、(4.3.41) は単純な形になり、van Vleck-Morette 行列式は

$$\Delta_1(x, x') = \exp \left[\int_{s(x')}^{s(x)} \left(\frac{3}{s} - \theta \right) ds \right] \quad (4.3.66)$$

のように描き下せる [61, 62]。ここで、初期条件 (4.3.50) を用いた。Eq. (4.3.51) を x' から x について積分し、(4.3.66) を用いると、

$$U_1(x, x') = s(x, x')^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{s(x')}^{s(x)} (\Theta_{11} + \theta) ds \right] \quad (4.3.67)$$

を得る。

空間的に平坦な FLRW 宇宙の背景メトリックは (2.1.15) で与えられる。(4.1.1) で定義される共形時間 η を用いると、 $ds = a d\eta$ 及び $\theta(\eta) = 3a^{-2} da/d\eta$ を得る。そうすると direct part は (4.3.67) から得ることができて、

$$U_\zeta(\eta, \eta') = \frac{A_\zeta(\eta')}{A_\zeta(\eta)}, \quad A_\zeta(\eta) \equiv a(\eta) \exp \left[\frac{1}{2} \int_\eta \left(a N_{11} - \frac{3}{a} \frac{da}{d\bar{\eta}} \right) d\bar{\eta} \right] \quad (4.3.68)$$

を得る。これは別の手法で得られた (4.1.14) と合致する。

4.4 Cosmological scalar memory effect

我々が議論した、重力波が (2.1.12) というエネルギー運動量テンソルをもつ粒子とよく似たソースによって発せられると言う理想化された場合においては、メモリー効果が存在するということはデルタ関数の一回微分がリーマンテンソル中に存在するということによって特徴づけられる [2]。テンソル摂動およびスカラー摂動 (4.0.1) における、摂動の一次までのリーマンテンソルの電場成分は

$$\delta_1 R_{i00}{}^j = \frac{1}{2} (\partial_\eta^2 h_{ik} + \partial_\eta h_{ik}) \delta^{kj} + \left(\partial_i \partial^j - \frac{1}{3} \delta_i^j \partial^2 \right) \Phi + \left[\partial_\eta^2 \Psi + \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} (\partial_\eta \Psi - \partial_\eta \Phi) \right] \delta_i^j \quad (4.4.1)$$

である。ここで Bardeen potentials [63] を

$$\Phi \equiv \alpha + \frac{1}{a} \partial_\eta \beta, \quad \Psi \equiv \zeta + \frac{1}{a^2} \frac{da}{d\eta} \beta \quad (4.4.2)$$

と定義した。テンソル摂動に関しては、リーマンテンソルの電場成分 (4.4.1) は明らかに $\partial_\eta^2 h_{ij}$ をふくみ、その中にはデルタ関数の一階微分項が含まれる。従って、メモリー効果が存在する [2]。スカラー摂動に関しては、(4.4.1) は $\partial_\eta^2 \zeta$ を含み、その中には $\partial_\eta^2 \delta Q$ は含まれない。 $\partial_\eta^2 \delta Q$ はデルタ関数の一回微分を含まず、従って我々の目的は $\partial_\eta^2 h_{ij}$ と同様に $\partial_\eta^2 \zeta$ がデルタ関数の一階微分を含むことを示すことである。

ここまで Einstein フレームで全ての計算を行ってきたが、計算結果を理解するためにそれらを Jordan フレームの量に変換する必要がある。(4.0.7) で示されたユニタリゲージ $\delta\varphi = 0$ において、共形変換 $\tilde{g}_{\mu\nu} = \bar{F}^{-1} g_{\mu\nu}$ を行うことができる。ここでは共形因子は背景場の値 $\bar{F}$ のみが考えられている。(4.1.1) の背景場の線素 (line element) は

$$\tilde{ds}^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \tilde{a}(\eta)^2 (d\tau^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j), \quad \tilde{a}(\eta) \equiv a(\eta) / \sqrt{\bar{F}(\eta)} \quad (4.4.3)$$

の形をとる。ここで $\tilde{a}$ は Jordan フレームにおけるスケールファクターである。スケールファクターの変化を考慮に入れると、(4.0.1) と (4.0.7) で定義された ζ は共形変換で変化しないことがわかる。(参照:[64, 65, 66, 67, 27]) より正確には、 β のような non-dynamical な場は容易に再定義できるため、線形のスカラー摂動は共形変換によって変化しない。従って、ユニタリゲージ (4.0.7) では、Einstein フレームから Jordan フレームに戻るには全ての計算結果を (4.4.3) で定義された Jordan フレームにおけるスケールファクター $\tilde{a}$ によって書き直せばいい。(4.1.5) に示されている ζ の運動方程式は Jordan フレームにおいて

$$\left[\partial_\eta^2 + \frac{2}{A_\zeta} \frac{dA_\zeta}{d\eta} \partial_\eta - \partial^2 + \tilde{a}^2 \tilde{M}_{11} \right] \zeta = 4\pi \tilde{a}^2 \tilde{\mu}_\zeta \quad (4.4.4)$$

の形をとる。ここで $\tilde{M}_{11} \equiv \bar{F} M_{11}$, $\tilde{\mu}_\zeta \equiv \bar{F} \mu_\zeta$, また

$$A_\zeta = \left(\sqrt{\bar{F} \tilde{a}} \right)^3 \frac{d\bar{\varphi}}{d\eta} \exp \left[\frac{3}{2} \int \left(\frac{w\bar{\rho} + \bar{p}_\varphi}{\bar{\rho} + \bar{\rho}_\varphi} - 1 \right) d \ln \left(\sqrt{\bar{F} \tilde{a}} \right) \right] \quad (4.4.5)$$

である。ただし (4.0.20) で定義された N_{11} の値を代入するに当たって Eqs. (2.1.18) と (2.1.20) を用いた。完全流体が存在しない時、すなわち $\bar{\rho} = 0$ のとき、Eq. (4.0.22) を見ればわかるように質量項もゼロになる。これにより、よく知られた結果である、minimal

coupling でありかつ $F = 1$ の massless スカラー場であり $\bar{p}_\varphi = \bar{\rho}_\varphi$ かつ $d\bar{\varphi}/d\eta \propto \tilde{a}^{-2}$ であるものについて $A_\zeta \propto \tilde{a}$ が再現される。また、少し繊細に扱うべき箇所も存在しており、それは minimal coupling かつ スカラー場が定数である極限 $F = 1$ において $\tilde{\mu}_\zeta = \mu_\zeta \neq 0$ となりソースの項が消えないことである。これはユニタリゲージをとったことによる産物である。Eq. (4.0.6) からは $\delta\varphi = 0$ であるユニタリゲージ (4.0.7) では $\zeta = \psi$ であり、フラットゲージ $\psi = 0$ かつ $E = 0$ をとったときは $\zeta = \frac{H}{\dot{\varphi}}\delta\varphi$ であることが見てとれる。4.2 節に示されているように、 $E = 0$ であり、 $F = 1$ かつ $\dot{\varphi} = 0$ の極限において $\delta\varphi + \dot{\varphi}\beta$ の形で与えられる $\delta\varphi$ に対応するゲージ不変量のソースは存在しない。 $\dot{\varphi} = 0$ の極限はユニタリゲージでは明らかではないが、この極限から導き出される結果はこのゲージにおいては非常に単純になるのでこのゲージをとることにする。

ζ の遅延解は

$$\zeta(x) = \int d^4x' \sqrt{-\bar{g}(x')} G_\zeta^{\text{ret}}(x, x') \tilde{\mu}_\zeta(x') \quad (4.4.6)$$

で与えられる。ここで遅延グリーン関数 G_ζ^{ret} は Eq. (4.1.9) で与えられる。Eq. (4.1.9) を解 (4.4.6) に代入し、 U_ζ と V_ζ が正則関数であるということを利用すると、 V_ζ を含む tail part が最大でもデルタ関数に比例する特異性しかもたず、一方で U_ζ を含む direct part はまさにデルタ関数の一階微分を含む特異性を持つことがわかる。従って、direct part U_ζ のみがメモリー効果に寄与する。この結果は U_ζ 及び V_ζ の明示的な関数形とは完全に無関係である。より詳細な解析は [2] を参照されたい。

遅延解の積分 (4.4.6) を直接実行するかわりに、メモリー効果が direct part にのみ依存し、空間的に平坦な FLRW 空間が共形平坦であるということを利用すると、FLRW 空間におけるメモリー効果と Minkowski 空間におけるメモリー効果の間に対応を見つけることができる。そのためには、まず Eq. (4.1.13) から直ちに

$$\zeta^{\text{dir}}(x) = \left[\frac{A_\zeta(\eta_s)}{A_\zeta(\eta_o)} \right] \bar{\zeta}^{\text{dir}}(x) \quad (4.4.7)$$

が導けることが重要である。ここで η_s はソースにおける共形時間であり、 η_o は観測機が重力波の信号を感知した時の共形時間である。そして、 $\bar{\zeta}^{\text{dir}}(x)$ は平坦な空間において $\zeta^{\text{dir}}(x)$ に対応するものである。すなわち、宇宙の膨張がない場合でのスカラー場の摂動を特徴づけるスカラーモードである。Eq. (4.4.1) から $\delta_1 R_{i00}^j \supset \partial_\eta^2 \zeta$ を得る。 A_ζ の時間に関する一階微分が direct part に寄与しないことを考慮すると、

$$\delta_1 R_{(S)i00}^{\text{dir}j} = \left[\frac{A_\zeta(\eta_s)}{A_\zeta(\eta_o)} \right] \bar{\delta}_1 R_{(S)i00}^{\text{dir}j} \quad (4.4.8)$$

を得る。ここで S はスカラー摂動のみの寄与を考えていることを示す。

変分ベクトル D^μ に関する測地線変分方程式は重力波の通過に伴う観測器の位置の変化を記述し、

$$\frac{d^2 D^\mu}{ds^2} = R_{\alpha\beta\gamma}{}^\mu D^\alpha n^\beta n^\gamma, \quad \frac{d}{ds} \equiv n^\mu \nabla_\mu \quad (4.4.9)$$

を満たす。ここで n^μ は測地線の軌道に接する時間方向のベクトルで、 $n_\mu n^\mu = -1$ で規格化されている。特定の方向を持った共変微分 d/ds はアフィンパラメータ s というパラメータを持つ測地線に沿った方向の変化を特徴づける。接ベクトルを背景場において支配的な値で近似すると、 $n^\mu \approx \tilde{a}(\eta)^{-1} \delta^\mu_0$ 、あるいは $d/ds \approx (\tilde{a}^{-1})d/d\eta$ となり、スケール

ファクターの時間微分が今注目している時間の幅で無視できるということに注目すると、一時近似までのオーダーで次の結果を得る。

$$\frac{d^2 D^j}{d\eta^2} = R_{i00}{}^j D^i \quad (4.4.10)$$

すると、スカラーメモリー効果による位置の変化は (4.4.8) によって与えられるリーマンテンソルの値によって特徴づけられ、次のようになる。

$$\Delta D_{(S)}^i = \left[\frac{A_\zeta(\eta_s)}{A_\zeta(\eta_o)} \right] \overline{\Delta D}_{(S)}^i \quad (4.4.11)$$

ここで $\overline{\Delta D}_{(S)}^i$ は平坦空間、つまり宇宙の膨張がない場合におけるスカラーメモリー効果による位置の変化である。

[2] で示されているのと同様の段階を踏むと、テンソル摂動によるメモリー効果による位置の変化は

$$\Delta D_{(T)}^i = \left[\frac{a(\eta_s)}{a(\eta_o)} \right] \overline{\Delta D}_{(T)}^i \quad (4.4.12)$$

となる。ここで $\overline{\Delta D}_{(T)}^i$ 平坦空間におけるテンソル摂動によるメモリー効果による位置の変化である。

(4.4.11) 及び (4.4.12) からわかるように、宇宙の膨張の効果は、スカラーのメモリー効果の場合は実質的なスケールファクター A_ζ の値に、テンソルのメモリー効果の場合は二つの時間 η_s 及び η_o におけるスケールファクター a の値によって特徴づけられる。従って、テンソルのメモリー効果 (4.4.12) と同様に、スカラーのメモリー効果 (4.4.11) は宇宙の膨張の経緯に依存しないことがわかった。しかしながら、カップリングと質量によって、Eq. (4.4.5) で与えられる実質的なスケールファクター A_ζ の値はスケールファクター a の値と異なる可能性がある。つまり、スカラーとテンソルの二種類のメモリー効果 (4.4.11) 及び (4.4.12) を受け取りカップリングと質量によってスカラーメモリー効果が支配的になるか subleading になるかどちらかにもなりうる。

(4.4.11) は空間的に平坦な FRLW 空間におけるスカラーメモリー効果と (2.1.1) という作用によって記述されるスカラーテンソル理論の関係を与える。Brans-Dicke 理論において平坦な空間におけるメモリー効果はすでに [68, 69, 70, 71, 72] によって議論されているが、今とりあつかうモデル Eq.(2.1.1) は Brans-Dicke 理論を特別なケースとして含み、これを用いることで [68, 69, 70, 71, 72] や、他の (2.1.1) の作用で記述されるスカラーテンソル理論における宇宙膨張の影響を説明することができる。

4.5 Summary

メモリー効果とは、重力波の通過によりテスト粒子の相対的な分離が永久に変化することである。漸近的に平坦な時空では、重力波の効果は重力潮汐効果と区別できる。すなわち、空間またはヌルの無限大近傍でのスケーリングの違いによって区別できる。しかし、漸近的に平坦でない宇宙論的 FLRW 時空の場合、状況はより微妙になる。[2] では、空間的に平坦な FLRW 時空が共形的に平坦であることを利用して、一般相対論における完全流体のみで満たされた宇宙におけるメモリー効果が議論されている。その結果、テンソル摂動のみがメモリー効果に寄与し、スカラー摂動やベクトル摂動はメモリー効果に

寄与しないことがわかった。テンソル摂動子に関連するメモリー効果は、電波源から放射される瞬間と検出器を通過する瞬間のスケールファクターの値にのみ依存する。この研究では、スカラーテンソル理論の文脈で、スカラー重力子に関連するスカラー摂動が、平坦な FLRW 宇宙でもメモリー効果に寄与することを示した。このメモリー効果は、光源から放出された瞬間と検出器を通過した瞬間のスカラー重力に対する有効スケールファクターの値によって決まる。スカラー重力子の有効スケールファクターは (4.4.5) で与えられ、 $F = \text{constant}$ かつ $\tilde{V} = \text{constant}$ となるように重力と最小結合した質量ゼロのスカラー重力子の標準スケールファクターに帰着できるが、一般にはスケールファクター a とは異なる値になる。このように、スカラー摂動によるメモリー効果に対する宇宙膨張の影響は、結合と質量に依存して、テンソル摂動によるものよりも強くも弱くもなり得る。

さらに、副産物として、4.3 節では、時間の foliation を認める任意の曲がった時空における結合波方程式の研究に利用できる一般的な枠組みを開発した。これは、宇宙論的記憶効果の研究だけでなく、湾曲した時空における結合波動方程式を解く他のシナリオにも有用であろう。

Chapter 5

Summary

この博士論文では重力理論の二つの現象に注目し、重力の作用の変更がそれぞれの現象にどのように影響を及ぼすのかを見た。

第3章では重力を変更した場合におけるブラックホールの熱力学で Bousso bound がいかなる形を持つべきか知るために、bound の上限としてブラックホールの面積の4分の1の代わりに、変更された重力理論におけるブラックホールのエントロピーを採用した generalized entropy bound を提唱した。まず、修正された重力理論におけるブラックホールエントロピーの有力な候補である Wald のエントロピーをブラックホールエントロピーとして採用し、 n 次元の Einstein-Hilbert 作用と $f(R)$ 重力において、Flanagan ら [37] によってなされた証明と同様の証明が成立することを示した。従って、これらの理論においては generalized Bousso bound は一般相対論と同じ条件の元で成立し、Wald のエントロピーが物質のエントロピーの上限を定めるという主張に正当性を与えた。Einstein-Gauss-Bonnet 重力においては、Wald エントロピーの欠点である、ラグランジアンに寄与しない項がエントロピーに影響するという点を指摘した。従って、Wald エントロピーの代替として Jacobson-Myers エントロピーが Einstein-Gauss-Bonnet 重力におけるブラックホールエントロピーの形としてふさわしいと主張し、実際に generalized Bousso bound が成立することを見た。また、この結果を用いて、trapped な空間において Jacobson-Myers エントロピーがブラックホールエントロピーの満たすべき性質である generalized second law を満たすことを確かめた。generalized second law はブラックホールエントロピーに望まれる性質であり、Jacobson-Myers エントロピーを Einstein-Gauss-Bonnet 重力におけるブラックホールエントロピーとして採用することを根拠づける。

これらの結果は、一般相対論において面積の4分の1であたえられていた Bousso bound の上限は、実際にはブラックホールエントロピーで与えるべきであるという主張の裏付けとなる。すなわち、重力の変更によってブラックホールのエントロピーが変更されたとき、それに応じて上限を変更することで、一般相対論において望まれていた Bousso bound という性質をより強力な形で再現することができる。一方で、ブラックホールエントロピーや Bousso bound の修正重力理論における形を完全に決定することができていない。第一に、本論文では特定の重力理論に対して generalized Bousso bound の証明を与えたが、その証明を一般の重力理論に対して拡張することは今後の課題である。第二に、量子重力理論の有効理論として導かれる重力理論の求めるべき性質として Bousso bound を扱ったが、Bousso bound 自体が完全に証明されているわけではなく、本研究における証明も、先行研究において議論された仮定の元での証明に止まった。Bousso bound は元々ホログラフィックな性質を定式化するために定義されたため、これらの仮定を完全に外し、Bousso bound の証明を完全に与えることは、古典的な重力理論のみを扱うことでは困難

であるかもしれない。しかしながら、本研究や、それに続く研究によって古典的な範囲における Bousso bound のふさわしい形を議論することは、量子重力の理解が] 進み、量子論上で Bousso bound の議論を行うことが可能になったときの準備として有益である。

第4章では、宇宙論的なメモリー効果をスカラーテンソル理論において計算する方法について解析した。Tolish と Wald による一般相対論における解析 [2] では、メモリー効果に寄与を与える摂動はテンソル摂動のみであり、スカラー摂動の摂動方程式を解析する必要はなかった。一方、作用にスカラー場を追加し、重力と結合させると、スカラー摂動がメモリー効果に寄与を与える。この場合はスカラー摂動の摂動方程式を解析する必要がある。先行研究におけるテンソル摂動の解析では、一変数の摂動方程式を扱うため、Hadamard 変換によるグリーン関数の展開を用いることが可能であり、これによってグリーン関数の direct part と tail part を分離し、メモリー効果に寄与する direct part の部分だけを考えることで解析を行うことができた。一方、本研究で扱うスカラーテンソル理論におけるスカラー摂動の解析の場合は、二変数が混ざった2つの摂動方程式を扱う必要がある。従って先行研究で用いられた手法をそのまま扱うことはできない。本論文では二成分の摂動方程式について Hadamard 展開を行う手法を開発し、それを用いてスカラー摂動のメモリー効果を計算することに成功した。これにより、宇宙論的な背景におけるスカラー場のメモリー効果の具体形を導き、テンソル摂動の場合と同様に、メモリー効果が重力波を発するイベントの時刻と観測者に重力波が届く時刻におけるスケールファクターにのみ依存し、その間の時刻における宇宙の膨張過程には依存しないことを示した。

本論文で開発した手法は今回扱った理論のみならず、時間一定面の葉層構造を持つ時空一般に関して適用可能であり、より広い範囲での応用が期待される。また、本研究ではスカラー場を追加する方法としてスカラーテンソル理論を考えたが、スカラー摂動が追加されるその他の理論においても同様にスカラー摂動がメモリー効果に寄与する可能性がある。本研究で用いた手法で別の理論におけるスカラー場のメモリー効果を計算し、比較することは今後の課題である。

これら二つのトピックは、いずれも高エネルギーを記述する重力の理論と関連している。ブラックホール熱力学は重力の量子性に起源を求められており、メモリー効果は重力子の散乱を特徴づける Sof-theorem と等価である。これらのトピックに対し、重力を修正した時にどのように変化し、またどの部分が共通の性質として保持されるかを知ること、真の重力理論としてふさわしい重力理論の選別を行いたい。

Bibliography

- [1] R. Bousso, *JHEP* **07** (1999) 004.
- [2] A. Tolish and R. M. Wald, *Cosmological memory effect*, *Phys. Rev. D* **94** (2016) 044009 [[arXiv:1606.04894](#)].
- [3] S. Shankaranarayanan and J. P. Johnson, *Modified theories of gravity: Why, how and what?*, *General Relativity and Gravitation* **54** (2022) 44.
- [4] J. Polchinski, *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 12, 2007, 10.1017/CBO9780511816079.
- [5] J. Polchinski, *String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 12, 2007, 10.1017/CBO9780511618123.
- [6] A. Ashtekar and E. Bianchi, *A short review of loop quantum gravity*, *Rept. Prog. Phys.* **84** (2021) 042001 [[arXiv:2104.04394](#)].
- [7] P. Horava, *Quantum Gravity at a Lifshitz Point*, *Phys. Rev. D* **79** (2009) 084008 [[arXiv:0901.3775](#)].
- [8] K. S. Stelle, *Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity*, *Phys. Rev. D* **16** (1977) 953.
- [9] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla and C. Skordis, *Modified Gravity and Cosmology*, *Phys. Rept.* **513** (2012) 1 [[arXiv:1106.2476](#)].
- [10] E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, *Dynamics of dark energy*, *Int. J. Mod. Phys. D* **15** (2006) 1753 [[arXiv:hep-th/0603057](#)].
- [11] S. W. Hawking, *Black holes in general relativity*, *Commun. Math. Phys.* **25** (1972) 152.
- [12] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, *The Four laws of black hole mechanics*, *Commun. Math. Phys.* **31** (1973) 161.
- [13] S. W. Hawking, *Particle Creation by Black Holes*, *Commun. Math. Phys.* **43** (1975) 199.
- [14] Y. B. Zel'dovich and A. G. Polnarev, *Radiation of gravitational waves by a cluster of superdense stars*, *Sov. Astron.* **18** (1974) 17.

- [15] D. Christodoulou, *Nonlinear nature of gravitation and gravitational wave experiments*, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 1486.
- [16] M. Favata, *Nonlinear gravitational-wave memory from binary black hole mergers*, Astrophys. J. Lett. **696** (2009) L159 [arXiv:0902.3660].
- [17] A. D. Johnson, S. J. Kapadia, A. Osborne, A. Hixon and D. Kennefick, *Prospects of detecting the nonlinear gravitational wave memory*, Phys. Rev. D **99** (2019) 044045 [arXiv:1810.09563].
- [18] P. D. Lasky, E. Thrane, Y. Levin, J. Blackman and Y. Chen, *Detecting gravitational-wave memory with LIGO: implications of GW150914*, Phys. Rev. Lett. **117** (2016) 061102 [arXiv:1605.01415].
- [19] A. Strominger and A. Zhiboedov, *Gravitational Memory, BMS Supertranslations and Soft Theorems*, JHEP **01** (2016) 086 [arXiv:1411.5745].
- [20] H. Bondi, M. G. J. van der Burg and A. W. K. Metzner, *Gravitational waves in general relativity. 7. Waves from axisymmetric isolated systems*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **269** (1962) 21.
- [21] S. Weinberg, *Infrared photons and gravitons*, Phys. Rev. **140** (1965) B516.
- [22] T. He, V. Lysov, P. Mitra and A. Strominger, *BMS supertranslations and Weinberg's soft graviton theorem*, JHEP **05** (2015) 151 [arXiv:1401.7026].
- [23] K.-i. Maeda, *Towards the Einstein-Hilbert Action via Conformal Transformation*, Phys. Rev. D **39** (1989) 3159.
- [24] V. Faraoni, E. Gunzig and P. Nardone, *Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology*, Fund. Cosmic Phys. **20** (1999) 121 [arXiv:gr-qc/9811047].
- [25] E. E. Flanagan, *The Conformal frame freedom in theories of gravitation*, Class. Quant. Grav. **21** (2004) 3817 [arXiv:gr-qc/0403063].
- [26] N. Deruelle and M. Sasaki, *Conformal equivalence in classical gravity: the example of 'Veiled' General Relativity*, Springer Proc. Phys. **137** (2011) 247 [arXiv:1007.3563].
- [27] T. Chiba and M. Yamaguchi, *Conformal-Frame (In)dependence of Cosmological Observations in Scalar-Tensor Theory*, JCAP **10** (2013) 040 [arXiv:1308.1142].
- [28] R. M. Wald, *General Relativity*. Chicago Univ. Pr., Chicago, USA, 1984, 10.7208/chicago/9780226870373.001.0001.
- [29] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, *One loop divergencies in the theory of gravitation*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor. A **20** (1974) 69.
- [30] T. Matsuda and S. Mukohyama, *Covariant entropy bound beyond general relativity*, Phys. Rev. D **103** (2021) 024002 [arXiv:2007.14015].

- [31] V.Iyer and R.M.Wald *Phys.Rev.D* **50** (1994) 846.
- [32] R. M. Wald, *On identically closed forms locally constructed from a field*, *Journal of Mathematical Physics* **31** (1990) 2378.
- [33] J. Lee and R. M. Wald, *Local symmetries and constraints*, *Journal of Mathematical Physics* **31** (1990) 725.
- [34] B. S. Kay and R. M. Wald *Physics Reports* **207** (1991) 49.
- [35] J.D.Bekenstein, *Blackholes and entropy*, *Phys.Rev.D* **7** (1973) 2333.
- [36] J.D.Bekenstein *Phys.Rev.D* **23** 287, year =.
- [37] D. E.E.Flanagan *Phys.Rev.D* **62** (2000) 084035.
- [38] A.Strominger and D.M.Thompson *Phys.Rev.D* **70** (2004) 044007.
- [39] E. R.Bousso *Phys.Rev.D* **68** (2003) 064001.
- [40] R.M.Wald *Phys.Rev.D* **48** (1993) 3427.
- [41] G. T.Jacobson *Phys.Rev.D* **49** (1994) 6587.
- [42] X.-H. Feng, H.-S. Liu, H. Lu and C. N. Pope *Phys.Rev.D* **93** (2016) 044030.
- [43] M.-J. K.Hajian, S.Liberati *arXiv:2005.12985*.
- [44] E.Gourgoulhon and J.L.Jaramillo *Phys.Rept.* **423** (2006) 159.
- [45] T.Jacobson and R.C.Myers *Phys.Rev.Lett* **70** (1993) 3684.
- [46] T. S.Kolekar *Phys.Rev.D* **86** (2012) 021501.
- [47] X.Dong *J.HighEnergyPhys.* **1** (2014) .
- [48] D.J.Gross and E.Witten *Nucl.Phys.B* **277** (1986) 1.
- [49] B.Zwiebach *Phys.Lett.B* **156** (1985) 315.
- [50] H.Maeda *Phys.Rev.D* **73** (2006) 104004.
- [51] M. H.Maeda and *Phys.Rev.D* **77** (2008) 064031.
- [52] H. M.Nozawa and *Class.Quant.Grav.* **25** (2008) 055009.
- [53] M. A. Gorji, T. Matsuda and S. Mukohyama, *Cosmological memory effect in scalar-tensor theories*, *Phys. Rev. D* **106** (2022) 024013 [[arXiv:2204.09182](#)].
- [54] A. D. Felice and S. Mukohyama *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2016** (2016) 028.
- [55] P. R. Garabedian, *Partial Differential Equations*. Wiley, New York, 1964.

- [56] F. G. Friedlander, *The Wave Equation on a Curved Space-Time*. Cambridge University Press, 3, 2010.
- [57] L. M. Burko, A. I. Harte and E. Poisson, *Mass loss by a scalar charge in an expanding universe*, Phys. Rev. D **65** (2002) 124006 [arXiv:gr-qc/0201020].
- [58] R. Haas and E. Poisson, *Mass change and motion of a scalar charge in cosmological spacetimes*, Class. Quant. Grav. **22** (2005) S739 [arXiv:gr-qc/0411108].
- [59] E. Poisson, A. Pound and I. Vega, *The Motion of point particles in curved spacetime*, Living Rev. Rel. **14** (2011) 7 [arXiv:1102.0529].
- [60] B. S. DeWitt and R. W. Brehme, *Radiation damping in a gravitational field*, Annals Phys. **9** (1960) 220.
- [61] M. Visser, *van Vleck determinants: Geodesic focusing and defocusing in Lorentzian space-times*, Phys. Rev. D **47** (1993) 2395 [arXiv:hep-th/9303020].
- [62] D. Ivanov, S. Liberati, M. Viel and M. Visser, *Non-perturbative results for the luminosity and area distances*, JCAP **06** (2018) 040 [arXiv:1802.06550].
- [63] J. M. Bardeen, *Gauge-invariant cosmological perturbations*, Phys. Rev. D **22** (1980) 1882.
- [64] N. Makino and M. Sasaki, *The Density perturbation in the chaotic inflation with nonminimal coupling*, Prog. Theor. Phys. **86** (1991) 103.
- [65] S. Tsujikawa and B. Gumjudpai, *Density perturbations in generalized Einstein scenarios and constraints on nonminimal couplings from the Cosmic Microwave Background*, Phys. Rev. D **69** (2004) 123523 [arXiv:astro-ph/0402185].
- [66] T. Chiba and M. Yamaguchi, *Extended Slow-Roll Conditions and Rapid-Roll Conditions*, JCAP **10** (2008) 021 [arXiv:0807.4965].
- [67] J.-O. Gong, J.-c. Hwang, W.-I. Park, M. Sasaki and Y.-S. Song, *Conformal invariance of curvature perturbation*, JCAP **09** (2011) 023 [arXiv:1107.1840].
- [68] R. N. Lang, *Compact binary systems in scalar-tensor gravity. ii. tensor gravitational waves to second post-newtonian order*, Phys. Rev. D **89** (2014) 084014.
- [69] R. N. Lang, *Compact binary systems in scalar-tensor gravity. III. scalar waves and energy flux*, Physical Review D **91** (2015) .
- [70] S. Hou and Z.-H. Zhu, *Gravitational memory effects and Bondi-Metzner-Sachs symmetries in scalar-tensor theories*, JHEP **01** (2021) 083 [arXiv:2005.01310].
- [71] S. Tahura, D. A. Nichols, A. Saffer, L. C. Stein and K. Yagi, *Brans-Dicke theory in Bondi-Sachs form: Asymptotically flat solutions, asymptotic symmetries and gravitational-wave memory effects*, Phys. Rev. D **103** (2021) 104026 [arXiv:2007.13799].
- [72] A. Seraj, *Gravitational breathing memory and dual symmetries*, Journal of High Energy Physics **2021** (2021) .