

Generalized スライス と

finite model property

東大 理 古森 雄一

中間命題論理を、モデルを用いて研究する際に、そのモデルが束モデルにしても Kripke モデルにしても、finite model property (fmp) の概念は非常に重要なものである。例えば、モデルによる論理の決定問題に関する唯一の一般的な定理は“論理が有限公理化可能で fmp を持てば決定可能である”というものである。また、任意の論理が Kripke モデルを持つかどうかは、まだ未解決であるが、fmp を持てば Kripke モデルを持つことが知られている。直観主義論理 (IJ) が fmp を持つことから、“任意の中間論理は fmp を持つ”という予想もなされたが、Jankov [3] は fmp を持たない中間論理が存在すること示した。一方、細井 [2] はスライスと呼ばれる概念を用いて中間論理の分類を定義した。Jankov が存在を示した fmp を持たない論理の例は $\mathcal{J}_\omega$ に属しているので、有限スライス上の任意の論理が fmp を持つかどうかは未解決の問題で

あった。

最近、[4]で有限スライス上の論理は fmp を持つことが示され、性質の悪い論理はすべて $\mathcal{J}_\omega$ に属しており、有限スライスに比べて複雑な構造を有しているので、 $\mathcal{J}_\omega$ を更に細分する分類の必要性が感じられる。

既に、 $\mathcal{J}_\omega$ の分類の試みはいくつかあるが、全てスライスに直交するような分類で $\mathcal{J}_\omega$ を縦割にしようという感じのものである。

ここでは、スライスに平行に横割にするような $\mathcal{J}_\omega$ の細分を考えてみる。更に、それによって $\mathcal{J}_\omega$ のある部分集合に含まれる論理も fmp を持つことを示し、いくつかの興味ある問題を提起する。

§1. Generalized Δ -projection.

このりと次の§では、だいたい[4]に従って(後の都合上[4]を多少一般化するが)話を進める。

命題論理の命題式の集合で代入と *modus ponens* に関して閉じており、直観主義論理の公理を含んでいるものを論理と呼ぶ。命題式全体の集合を W , 直観主義(古典)論理で *valid* な命題式全体の集合を $LJ(LK)$ と書く。 P を *pseudo-Boolean algebra* (PBA) としたとき、 $L(P)$ により P で *valid* な命題式全体の集合を表わす。

まず fmp の定義を述べる。

定義 1.1. 論理 L が fmp を持つ $\iff$ 有限 PBA の集合 $\{P_i \mid i \in I\}$ があって $L = \bigcap_{i \in I} L(P_i)$ となる。

論理 L の Lindenbaum algebra を $\lambda(L)$, $\lambda(L)$ の subalgebra で n 個の命題変数で生成されるものを $\lambda^n(L)$ と書く。このとき次の定理が知られている。

定理 1.2. 任意の PBA P に対して、 $L(P)$ は論理である。逆に、任意の論理 L に対して、 $L = L(\lambda(L)) = \bigcap_{n < \omega} L(\lambda^n(L))$ 。

次に、generalized スライスの定義に必要な generalized Δ -projection を定義する。

定義 1.3. L を論理、 α を ordinal とする。

$$\Delta(L) = LJ + \{((a \supset A) \supset a) \supset a \mid A \in L\}$$

$$\Delta^0(L) = L$$

$$\Delta^{\alpha+1}(L) = \Delta(\Delta^\alpha(L))$$

α が limit ordinal のとき、集合 $\{L' \mid L' \text{ は論理で } (\forall \beta < \alpha)(L' \not\subseteq \Delta^\beta(L))\}$ の極大元全体の集合を m とする。

$$\Delta^\alpha(L) = \bigcap_{L' \in m} L' \quad (m \text{ が空集合のときは } \bigcap_{L' \in m} L' = LJ \text{ とする。})$$

このとき、[2] で証明された次の定理はスライスの定義とみなすことができる。

定理 1.4. $L \in \mathcal{J}_0 \Leftrightarrow L = W$

$$L \in \mathcal{J}_n \Leftrightarrow \Delta^n(W) \subseteq L \text{ かつ } \Delta^{n+1}(W) \not\subseteq L \quad (1 \leq n < \omega)$$

$$L \in \mathcal{J}_\omega \Leftrightarrow (\forall n < \omega) (\Delta^n(W) \not\subseteq L)$$

論理記号 $\rightarrow$ に対応する束演算を $\rightarrow$ と書くことにする。

定義 1.5. P を PBA, 1 を P の最大元とする。 P の部分集合

F が P のフィルターであるとは次の 2 つの条件を満たすこと

である:

$$(1) \quad 1 \in F$$

$$(2) \quad x \in F \text{ かつ } x \rightarrow y \in F \Rightarrow y \in F$$

定義 1.6. P を PBA, F を P のフィルターとする。 P 上の関

係 $\sim_F$ を次のように定義する:

$$x \sim_F y \Leftrightarrow x \rightarrow y \in F \text{ かつ } y \rightarrow x \in F$$

定義 1.7. PBA P が irreducible であるとは、 P から最大元を除いた集合 P^- が最大元をもつことである。(P^- の最大元を 2 と書く。)

このとき、次の定理がよく知られている。

定理 1.8. 任意の PBA P と任意の P のフィルター F に対

して、関係 $\sim_F$ は同値関係で $P/\sim_F$ は自然に PBA となる。

また、 F がある $x \neq 1$ に関する極大フィルター、すなわち x を含まない P のフィルターの集合の中で極大なもののとき、

$P/\sim_F$ は irreducible となり、 $[x] = 2_{P/\sim_F}$ となる。($P/\sim_F$ を P/F と書く。) ($\sim_F$ による x の同値類を $[x]$ と書いた。)

明らかに、 P^- は PBA で $P/\{1,2\}$ と同型である。

補題 1.9. P が irreducible PBA $\Rightarrow \left\{ \Delta^{\alpha+1}(L) \subseteq L(P) \right.$
 $\Leftrightarrow \left. \Delta^{\alpha}(L) \subseteq L(P^-) \right\}$

(証明) $\Delta^{\alpha}(L) \not\subseteq L(P^-)$ とすると、 $A \in \Delta^{\alpha}(L)$ かつ $A \notin L(P^-)$ を満たす命題式 A がある。このとき、 $f(A) \neq 1_{P^-}$ となる P^- の assignment f が存在する。 f^* を次のような P の assignment とする： $f^*(a) = 2_P$ ，任意の A に現れる命題変数 b に対して $f^*(b) = f(b)$ 。($f(b) = 1_{P^-}$ のときは $f^*(b) = 2_P$ とし、 $f(b) = 1_P$ としなくてもよい。)

このとき $f^*((a \supset A) \supset a) \supset a = 2_P$ 。よって、

$((a \supset A) \supset a) \supset a \notin L(P)$ 。ところが、 $((a \supset A) \supset a) \supset a \in \Delta^{\alpha+1}(L)$ であるから、 $\Delta^{\alpha+1}(L) \not\subseteq L(P)$ 。逆も同様である。(Q.E.D.)

§2. ある有限生成 algebra の有限性

Diego [1] の方法により、次の補題が証明できる。

補題 2.1. 任意の $m, n < \omega$ に対して、 $\lambda^m(L)$ が有限で $L(P) \supseteq \Delta^n(L)$ かつ P が m 個の元で生成されるならば、 P は有限 PBA である。

(証明) n に関する帰納法による。 $n=0$ のとき、 $L(P) \supseteq L$ で $\lambda^m(L)$ が有限である。 P は $\lambda^m(L)$ をあるフィルターで割ったものと同型になっているから当然 finite である。

以下は全く [4] の lemma 2.1 の証明と同様である。(Q.E.D.)

この補題において、 $L = W$ とすると [4] の結果が得られる。

定理 2.2. L が有限スライス上にあるならば fmp を持つ。

§ 3. Generalized スライス

定理 1.4 と同様にして、次のように generalized スライスを定義する。

定義 3.1. $L \in \mathcal{GS}_\alpha \Leftrightarrow \Delta^\alpha(W) \subseteq L$ かつ
 $(\forall \beta < \alpha)(\Delta^\beta(W) \not\subseteq L)$

定理 1.4 とこの定義から次の定理は明らかである。

定理 3.2. $\mathcal{GS}_m = \mathcal{S}_m \quad (m < \omega)$

$$\mathcal{S}_\omega \supseteq \bigcup_{\alpha < \omega} \mathcal{GS}_\alpha$$

定理 3.3. $\alpha \neq \beta \Rightarrow \mathcal{GS}_\alpha \cap \mathcal{GS}_\beta = \emptyset$

$\Delta^\omega(W) = S_\omega (= LJ + (a > b)^\vee (b > a))$ で $\lambda^m(S_\omega)$ は有限 PBA であるから、補題 2.1 より次の定理が得られる。

定理 3.4. $L \in \mathcal{GS}_{\omega+n} \quad (n < \omega) \Rightarrow L$ は fmp を持つ。

$\mathcal{S}_\omega \subseteq \bigcup_{\alpha < \omega} \mathcal{GS}_\alpha$ を言うためには、ある ordinal α があって、 $\Delta^\alpha(W) = LJ$ となることを言わなければならない。それを言うために δ をもし $\Delta^\alpha(W) = LJ$ となる ordinal があつたらはその最小なものを δ とし、もしないならば ordinal 全体の class とする。

定理 3.5. $\alpha \in \delta \Rightarrow \mathcal{GS}_\alpha \supseteq \{\Delta^\alpha(W)\}$

(証明) $(\forall \beta < \alpha) (\Delta^\beta(W) \not\subseteq \Delta^\alpha(W))$ を示せばよい。

超限帰納法による。

α が limit ordinal のときは、定義 1.3 より明らか。

α が limit ordinal でないとき： $\alpha = \delta + 1$ とおく。

$\Delta^{\delta+1}(W) \subseteq \Delta^\delta(W)$ は明らか。帰納法の仮定により

$(\forall \beta < \delta) (\Delta^\beta(W) \not\subseteq \Delta^\delta(W))$ であるから、 $\Delta^{\delta+1}(W) \not\subseteq \Delta^\delta(W)$ を示せばよい。次の補題を用いれば、明らかである。(Q.E.D.)

補題 3.6 $L \neq L_J \Rightarrow \Delta(L) \subsetneq L$

(証明) $L \neq L_J$ であるから、 $A \notin L_J$ かつ $A \in L$ なる命題式 A がある。 A を含まない有限モデルをもつ論理が (L_J が fmp を持つことから) 存在する。その 1 つを L' とする。次のような論理の集合 h を考える： $h = \{L'' \mid L' \leq L'' \text{ かつ } L \not\subseteq L''\}$ 。 $L' \in h$ であるから h は空でない。 L' が有限モデルをもつことから h は有限集合である。この集合の 1 つの極大元を K とする。極大元であるから、 K が irreducible な有限モデル P をもつことが分る。 P の Jankov の命題式 [cf. 3] を X_P とすると、 $X_P \in L$ かつ $X_P \notin \Delta(L)$ が以下のように示せる。

$X_P \notin L$ とすると $L \leq L(P) = K$ 。これは K が h の元であることに反する。

$X_P \in \Delta(L)$ とすると、 $\Delta(L) \not\subseteq L(P)$ 。補題 1.9 により

、 $L \neq L(P^-) \nexists L(P)$: これは $K = L(P)$ が L の極大元であることに反する。 (Q.E.D)

定理 3.5. と論理全体の集合の濃度が連続濃度であることから、次の定理が得られる。

定理 3.7. $\Delta^\alpha(W) = L_J$ となる ordinal α が連続濃度 ordinal 以下の limit ordinal で存在する。このような ordinal のうち最小なものを究極 ordinal といい ω_0 と書く。

定理 3.8. $\mathcal{L}_\omega = \sum_{\alpha=\omega}^{\omega_0} \mathcal{L}_\alpha$ (直和)

問題 3.9. ω_0 を求めよ。

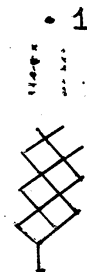
任意の n に対して $\lambda^n(L)$ が有限になる論理を strongly finite model property (sfmp) を持つ論理ということにする。 $\Delta^\alpha(W)$ がはじめて sfmp を持たなくなる ordinal α を sfmpo と書く。明らかに (補題 2.1 による)、sfmpo は limit ordinal である。また $\text{sfmpo} \geq \omega \cdot 2$ である。

問題 3.10. sfmpo を求めよ。

sfmpo の定義より、次の定理は明らかである。

定理 3.11. $L \in \mathcal{L}_\alpha$ ($\alpha < \text{sfmpo}$) $\Rightarrow$ L は fmp を持つ

下図のようなモデルを M とする。



問題 3.12. $\Delta^{sfmpo}(W) = L(M)$?

問題 3.13. L が $sfmp$ を持たない $\Rightarrow L \subseteq L(M)$?

上の二つの問題は互いに同値である。

さて、 fmp を持たない論理をはじめて含む GS_α の ordinal を $fmpo$ と書くことにする。

問題 3.14. $fmpo$ を求めよ。 $sfmpo$ と $fmpo$ の関係はどうか? (例えば $sfmpo = fmpo$ か?)

参考文献

- [1] A. Diego, Sur les algèbres de Hilbert, Collection de logique mathématique, Série A, No. 21, Paris, 1966.
- [2] T. Hosoi, On intermediate logics I, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. I, 14 (1967), 293-312.
- [3] V. A. Jankov, Constructing a sequence of strongly independent superintuitionistic propositional calculi, Soviet Math. Dokl., 9 (1968), 806-807.
- [4] Y. Komori, The finite model property of the intermediate propositional logics on the finite slices, (to appear).