

Abstract setting for Toeplitz operators

山形大 理 富山 淳

東北大 理 ・ 萩田公三

§1. まづがき. T を単位円周とし, T 上のルベック測度に対する $L^2(T)$, $L^\infty(T)$ を考える. $L^\infty(T)$ の関数 ϕ の $L^2(T)$ 上での掛算作用素を M_ϕ とかき, $L^2(T)$ から Hardy class $H^2(T)$ への射影を P とすると, ϕ による $H^2(T)$ 上の Toeplitz 作用素 T_ϕ は

$$T_\phi = PM_\phi|_{H^2(T)} \quad \text{i.e.} \quad P(\phi f) \quad (f \in H^2(T))$$

として定義される. $C(T)$ を T 上の (複素数値) 連続関数環とし $\mathcal{B}(C(T))$ を $\{T_\phi | \phi \in C(T)\}$ で生成された C^* -環とする. このときよく知られているように $\mathcal{B}(C(T))$ は $H^2(T)$ 上の既約な C^* -環 (GCR 環) であり, T の commutator ideal はコンパクト作用素環 $\mathcal{K}(H^2(T))$ と一致し, exact sequence

$$\{0\} \longrightarrow \mathcal{K}(H^2(T)) \longrightarrow \mathcal{B}(C(T)) \xrightarrow{P} C(T) \longrightarrow \{0\}$$

が得られる. ここで $P(T_\phi) = \phi$ ($\phi \in C(T)$) である.

この結果は所謂 index 理論の新展開として最近目ざましい発

展をみせている B-D-F 理論 (Brown - Douglas - Fillmore, [3] [4], [5] etc.) の一ツの出発点となつたものであるが、この定理や他の同様の $L^\infty(T)$ についての "結果自体" の C^* -環としての意味は今迄あまりよく考へられてゐなかつたように思ふ。ここでは上のことを可換な C^* -環の線型表現の話として一般的にとらへる構造を調べると共に、一般の閉数環についての Toeplitz 作用素の議論を考へてみる。

§ 2. Toeplitz 作用素の abstract setting. X をコンパクトハウスドルフ空間, $C(X)$ を X 上の連続閉数環とし A を X 上の閉数環とする. A の Shilov 境界を $\Gamma(A)$, Choquet 境界を $Q(A)$ とかく. A は一般には自己共役環でなないが A 上の有界線型汎関数 α が $\alpha(1) = \|\alpha\| = 1$ をみたすとき A -環の時と同様に state, A の state 全体の中の端点を pure state と呼ぶことにする. よく知られてゐるように A の pure state は $C(X)$ の pure state に一意に拡大出来、この拡大は $Q(A)$ の点の evaluation α_x にほかならない. 以下の議論はこのことも一ツのものとしてゐる. ここで Krein-Milman の定理から上のこととは A の pure state の $C(X)$ への state としての拡大も一意になることを示してゐることに注意する. ヒルベルト空間 H に対して X 上の有界線型作用素全体を $\mathcal{L}(H)$ 又 $\mathcal{B}(H)$ を

コンパクト作用素全体とする。 $\tau \in C(X)$ から $L(H)$ への線型表現で $\tau(1) = 1$, $\|\tau\| \leq 1$ とするものとする。 τ はこの条件の下では positive 文字像になるが、もっと強く completely positive 文字像になる [15]。従って Stinespring の定理 ([15]) により H を含むヒルベルト空間 K (dilation space) と $C(X)$ から $B(K)$ への $*$ -表現 π があり、 $P \in H$ への射影としたとき

$\tau(\phi) = P\pi(\phi)|_H$ とかける。 $\tau(\phi)$ は Toeplitz 作用素の abstract form であるが、ここで ϕ が A 上で isometric であれば

$$\|\tau(\phi)\| \geq \max_{t \in P(A)} |\phi(t)|$$

である。

実際 $\mathcal{Q}(A)$ の元 τ (A 及び $C(X)$ 上の character と考える) について、これによる $\tau(A)$ の pure state を $\tau(C(X))$ の state $\hat{\alpha}$ に拡大すると、 $C(X)$ で τ を拡大の一意的に $\hat{\alpha} \circ \tau = \tau$ とおいて

$$|\phi(t)| = |\hat{\alpha} \circ \tau(\phi)| \leq \|\tau(\phi)\|$$

が出てくる。これから $P(A) = X$ のときには、この状況下でも既に τ は isometric 表現になる。次の二つの仮定をおく。

(a) τ は A 上で isometric

(b) $\tau(\phi\psi) = \tau(\phi)\tau(\psi)$ ($\phi \in C(X)$, $\psi \in A$)

$\mathcal{K}(C(X))$ を $\{\tau(\phi) \mid \phi \in C(X)\}$ から生成された C^* -環、 $\mathcal{C}(C(X))$ をその commutator ideal とする。 $\mathcal{B}(C(X))$ は又 $\{\tau(\psi) \mid \psi \in A\}$ から生成された C^* -環とも考えうる。

補題 2.1. $T(\varphi)$ ($\varphi \in A$) は subnormal 作用素である.

証明. 前に述べた T の形から, $\varphi \in A$ に対して

$$P\pi(\varphi)^*\pi(\varphi)|_H = T(\varphi)^*T(\varphi) = P\pi(\varphi)^*P\pi(\varphi)|_H$$

$$\Rightarrow P\pi(\varphi)^*(1-P)\pi(\varphi)|_H = 0 \quad \text{よって} \quad (1-P)\pi(\varphi)P = 0$$

$$\text{よって} \quad T(\varphi) = \pi(\varphi)|_H$$

X の 元 $t \in Q(A)$ かつ t は $T(A)$ の pure state を α_t とする. 次の補題が本節の鍵になるものである.

補題 2.2. α_t は $\bigcap_{\phi \in Q(A)} \mathcal{L}(\phi)$ の state に一意に拡大出来, 拡大された state は $\bigcap_{\phi \in Q(A)} \mathcal{L}(\phi)$ の character である.

証明. $T(A)$ は $\bigcap_{\phi \in Q(A)} \mathcal{L}(\phi)$ の character は分離出来るから, α_t の state 拡大が character になることを示せばよい. $\hat{\alpha}$ を α_t の state 拡大とし

$$\mathcal{L} = \{T \in \bigcap_{\phi \in Q(A)} \mathcal{L}(\phi) \mid \hat{\alpha}(T^*T) = 0\} \text{ (left kernel)}$$

と置く. 前に述べたように $\hat{\alpha}(T(\phi)) = \phi(t)$ であるから 任意の $\phi \in A$ に対して条件 (b) から

$$\hat{\alpha}((T(\varphi) - \varphi(t))^*(T(\varphi) - \varphi(t))) = \hat{\alpha}(T((\bar{\varphi} - \overline{\varphi(t)})(\varphi - \varphi(t))))$$

$$= \hat{\alpha}(T(|\varphi - \varphi(t)|^2)) = 0.$$

よって $T(\varphi) - \varphi(t) \in \mathcal{L}$. $\mathcal{L}$ は $\bigcap_{\phi \in Q(A)} \mathcal{L}(\phi)$ の左イデアルであるから

$$\bigcap_{\phi \in Q(A)} \mathcal{L}(\phi)(T(\varphi) - \varphi(t)) \subset \mathcal{L}$$

よって任意の $T \in \bigcap_{\phi \in Q(A)} \mathcal{L}(\phi)$ に対して

$\hat{\alpha}(T(\tau(\varphi) - \varphi(\tau))) = 0$. 従って任意の $T \in \mathcal{B}(C(X))$,
 $S \in T(A)$ に対して

$$\hat{\alpha}(TS) = \hat{\alpha}(T)\hat{\alpha}(S).$$

一方補題 2.1 から $SS^* \leq S^*S$ であるから特に $S - \alpha_t(S)$
 に対して、 $S - \alpha_t(S) \in \mathcal{L}$ より

$$\hat{\alpha}((S - \alpha_t(S))(S - \alpha_t(S))^*) = 0.$$

即ち $S^* - \overline{\alpha_t(S)} \in \mathcal{L}$. 従ってあと同様にして

$$\hat{\alpha}(TS^*) = \hat{\alpha}(T)\overline{\hat{\alpha}(S)}, \text{ i.e. } \hat{\alpha}(ST) = \hat{\alpha}(S)\hat{\alpha}(T)$$

$\mathcal{B}(C(X))$ は $T(A)$ から生成されているから以上から $\hat{\alpha}$ は $\mathcal{B}(C(X))$
 の character である.

$\Delta \in \mathcal{B}(C(X))$ の character の集合とし、弱*位相を考
 えておく. $\mathcal{B}(C(X))$ の任意の character α は条件 (b) から $C(X)$ の ch-
 aracter を定義するから、 α に対して X の点 t_α が (一意に) ま
 ちまって $\alpha(\tau(\phi)) = \phi(t_\alpha)$ ($\phi \in C(X)$) とかける. $\Gamma(\tau)$ を
 この連続写像による Δ の X 内の像とすると、 $\Gamma(\tau)$ はコンパクト
 であり更に Δ は $\Gamma(\tau)$ と同位相になっている. 一方 commutat-
 or ideal $\mathcal{C}(C(X))$ はすべての character の kernel の共通部分
 であるから $\mathcal{B}(C(X))/\mathcal{C}(C(X))$ は自然な形で Δ 上の連続関数
 環 $C(\Delta)$ とみちあうことが出来る. よって上の補題と合せて次
 の結果を得られる.

定理 2.3. $\{C(X), A\}$ の表現 T について (a), (b) の仮定を

かく、このとき $\Gamma(\tau)$ は A の閉境界であり、 $\mathcal{C}(C(X))$ から $C(\Gamma(\tau))$ への $*$ -準同型 ρ を

$$\{0\} \longrightarrow \mathcal{C}(C(X)) \xrightarrow{i} \mathcal{C}(C(X)) \xrightarrow{\rho} C(\Gamma(\tau)) \longrightarrow \{0\}$$

が ~~exact~~ exact sequence にちるようになるとする。ここで i は埋込みの写像、 ρ は $\rho(\tau(\phi)) = \phi|_{\Gamma(\tau)}$ をみたす。

この定理は $\mathcal{C}(C(X))$ の構造を明らかにすればこの形では一番一般的な結果である。ここで $\tau(\phi)$ のノルムの評価は前に述べた形よりもっと精密に決まってくる。まず

$$I = \{ \phi \in C(X) \mid \tau(\phi) = 0 \}$$

とかくと条件 (b) から I は $C(X)$ の ideal にちるから X の閉集合 $S(\tau)$ が存在して

$$I = \{ \phi \in C(X) \mid \phi|_{S(\tau)} = 0 \}$$

$S(\tau)$ を τ の support と呼ぶことにする。 $S(\tau)$ のつくり方と前の定理から

系 2.4. $\phi \in C(X)$ について

$$\begin{aligned} \max \{ |\phi(t)| \mid t \in S(\tau) \} &\geq \|\tau(\phi)\| \geq \|\tau(\phi)\|_{sp} \\ &\geq \max \{ |\phi(t)| \mid t \in \Gamma(\tau) \} \end{aligned}$$

ここで $\|\tau(\phi)\|_{sp}$ は $\tau(\phi)$ の spectrum norm である。

これから例えば $\tau(\phi)$ が quasi-nilpotent なら $\phi|_{\Gamma(\tau)} = 0$ となること(従って時には $\phi = 0$) がわかる。上の三つの集合は $S(\tau) \supset \Gamma(\tau) \supset \Gamma(A)$ となつてゐるが一般にはこの

らが等しいとは限^らない。

さて Toeplitz 作用素の議論で実際に意味あるのは $\mathcal{L}(C(X))$ が既約で I 型の C^* -環に落ちているときであるが、 $\mathcal{L}(H)$ と $\mathcal{L}(C(X))$ の共通部分については次のことが成り立つ。

系 2.5. $\mathcal{L}(C(X))$ が $\mathcal{L}(C(X))$ の中で弱位相で稠密であるとする。

$$\mathcal{L}(H) \cap \mathcal{L}(C(X)) \subset \mathcal{L}(C(X))$$

これは $\mathcal{L}(C(X))$ の pure state である character を $\mathcal{L}(H)$ の pure state に拡大したものは条件から normal にはちり得ない、従って [7; 定理 3] から $\mathcal{L}(H)$ 上で 0 に落ちることから導びかれる。

Character の空間 Δ の形については Bunce [2] の結果を利用して、 Δ は $\mathcal{T}(A)$ の中の互に可換な subnormal 作用素^{の組} $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ の joint approximate spectrum $\sigma_\pi(T_1, T_2, \dots, T_n)$ の $\{T_i\}$ を動かした時の inductive limit であるというふうにも出来る。

一般にヒルベルト空間 H 上の互に可換な作用素の組 $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ に対してその joint approximate spectrum $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ とは

$$\mathcal{L}(H)(T_1 - \lambda_1) + \mathcal{L}(H)(T_2 - \lambda_2) + \dots + \mathcal{L}(H)(T_n - \lambda_n)$$

が $\mathcal{L}(H)$ の proper 右イデアルに落ちることとして定義出来

るが実は C^* -環の枠内では上の定義は $\{T_i\}$ を含む C^* -環に
 ようちなことが示せる。次の命題は又 Bunce [2] の議論の精
 化でもちる。

命題 2.6. $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ を H 上の互に可換な有界作用素の組
 とし、 B を $\{T_i\}$ と単位作用素を含む $\mathcal{L}(H)$ の C^* -部分環とする。
 このとき $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ について次のことは同値である。

$$(1) \quad (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \sigma_\pi(T_1, T_2, \dots, T_n)$$

$$\text{i.e. } \mathcal{L}(H)(T_1 - \lambda_1) + \mathcal{L}(H)(T_2 - \lambda_2) + \dots + \mathcal{L}(H)(T_n - \lambda_n) \not\subseteq \mathcal{L}(H)$$

$$(2) \quad B(T_1 - \lambda_1) + B(T_2 - \lambda_2) + \dots + B(T_n - \lambda_n) \not\subseteq B$$

$$(3) \quad \exists B \text{ の state } \alpha; \quad \alpha(T_i) = \lambda_i$$

$$\alpha(ST_i) = \alpha(S)\alpha(T_i) \quad (\forall S \in B)$$

$$(4) \quad \exists \mathcal{L}(H) \text{ の state } \alpha; \quad \alpha(T_i) = \lambda_i$$

$$\alpha(ST_i) = \alpha(S)\alpha(T_i) \quad (\forall S \in \mathcal{L}(H))$$

ここで (3), (4) の state としては pure state をとることも出来
 る。

証明は略するが補題 2.2 の証明はこの序の方と関連してあ
 り、この意味では Bunce の結果と Zelazko [18] の結果を使えば定
 理 2.3 を示すことも出来る。

§3. 固執環の Toeplitz 作用素. μ を X 上の有限非負な正
 則ボレル測度とし、 $H^2(\mu)$ を $L^2(\mu)$ での A の閉包とする。 $L^\infty(\mu)$

の函数 ϕ の $L^2(\mu)$ 上での掛算作用素 M_ϕ , $P \in H^2(\mu)$ への $L^2(\mu)$ での射影とすると、 ϕ による (一般化した) Toeplitz 作用素 T_ϕ は

$$T_\phi f = PM_\phi f = P\phi f \quad (f \in H^2(\mu))$$

として定義出来る。 $H^\infty(\mu)$ を A の $L^\infty(\mu)$ での弱*閉包とする。

このとき通常の Toeplitz 作用素の場合と同様に、 $\phi \in L^\infty(\mu)$,

$\varphi \in H^\infty(\mu)$, $f \in H^2(\mu)$ により

$$T_\varphi f = \varphi f, \quad T_\phi T_\varphi f = T_{\phi\varphi} f = P\phi\varphi f$$

が成り立つ。よって T_φ は $H^2(\mu)$ 上の subnormal 作用素である。

又更に $\varphi \in H^\infty(\mu)$ により

$$\left(\int |\varphi|^j d\mu \right)^{1/j} \leq \|T_\varphi^j 1\|_2^{1/j} \|1\|_2^{1/j} \leq \|T_\varphi\| \|1\|_2^{1/j} \quad (j=1,2,\dots)$$

から $j \rightarrow \infty$ として $\|\varphi\|_\infty \leq \|T_\varphi\|$ よって $\|\varphi\|_\infty = \|T_\varphi\|$ が得られる。従って今 $\tau(\phi) = T_\phi$ とすれば τ は $\{L^\infty(\mu), H^\infty(\mu)\}$ の線型表現として前節の条件をみたすし、又 $\text{supp } \mu \supset \Gamma(A)$ の時は $\{C(X), A\}$ の表現としてその条件をみたしている。特に

$\text{supp } \mu = \Gamma(A)$ の時は

$$\Gamma(A) = \text{supp } \mu \supset S(\tau) \supset \Gamma(\tau) \supset \Gamma(A)$$

であるから定理 2.3 から次の結果が成り立つ。

定理 3.1. 上の状況の下で $\text{supp } \mu = \Gamma(A)$ とする。このとき

$\mathcal{I}(C(X))$ から $C(\Gamma(A))$ への $*$ -準同型 ρ をとって

$$\{0\} \rightarrow \mathcal{C}(C(X)) \xrightarrow{i} \mathcal{I}(C(X)) \xrightarrow{\rho} C(\Gamma(A)) \rightarrow \{0\}$$

が exact sequence であるように出来る. ここで $\rho(T_\phi) = \phi|_{\Gamma(A)}$ である.

A の character の $\Gamma(A)$ での表現測度はいつも上の条件をみたすとは限らないうが、 A から上のような状況は次のようにしてつくることが出来る. 今には表現測度 μ を特に $\mathcal{Q}(A)$ に集中しているようにとると、 $\Gamma(A|_{\text{supp } \mu}) = \text{supp } \mu$ であるから、 $A|_{\text{supp } \mu}$ の $\text{supp } \mu$ 上の関数として Γ の閉包 A' をとればよい.

前の系 2.4 に対応する結果はここでは

$$\text{系 3.2. } \|T_\phi\| = \|T_\phi\|_{sp} = \max\{|\phi(t)| \mid t \in \Gamma(A)\}.$$

$$\text{特に } T_\phi \text{ quasi-nilpotent} \iff \phi|_{\Gamma(A)} = 0$$

系 2.5 の条件のこゝでの対応条件としては

系 3.3. $H^2(\mu) \neq L^2(\mu)$ とし、更に $H^2(\mu)$ の Γ の実数値関数は定数のみとする. このとき $\mathcal{J}(C(X))$ は既約 C^* -環で、又

$$\mathcal{Z}(H) \cap \mathcal{J}(C(X)) \subset \mathcal{C}(C(X)).$$

よって $\phi_{ij} \in C(X)$ について、 $\sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^n T_{\phi_{ij}}$ がコンパクト作用系であれば関数 $\sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \phi_{ij}$ は $\Gamma(A)$ 上で 0 になる. 特に T_ϕ がコンパクトなことは $\phi|_{\Gamma(A)} = 0$ とは同値である.

証明. X 上の定数関数 1 は $H^2(\mu)$ で $\mathcal{J}(C(X))$ の generating vector になっているから、その commutant $\mathcal{J}(C(X))'$ の separating

vector である. $\gamma > 0$ として $\mathcal{J}(C(X))'$ の non-zero を射影 Q に対して $Q1$ は $H^2(\mu)$ の non-zero を実数値関数にする. 従ってこの仮定の下では $Q1 = 1$ とする $Q = 1$, 即ち $\mathcal{J}(C(X))$ は既約である. 又 $\mathcal{J}(C(X))$ を可換とすると既約性から $H^2(\mu)$ は 1 次元に落ちてしまうから $H^2(\mu) \neq L^2(\mu)$ より $\mathcal{C}(C(X)) \neq \{0\}$. 従って系 2.5 からある結果も得られる.

次に $L^\infty(\mu)$ の場合は、 $L^\infty(\mu)$ の character の空間を $\mathcal{M}(L^\infty(\mu))$ とすると、 $L^\infty(\mu)$ は $\mathcal{C}(\mathcal{M}(L^\infty(\mu)))$ と同一視出来るから、 $H^\infty(\mu)$ が $\mathcal{M}(L^\infty(\mu))$ の点と分離するとそこには前節の結果を $\{L^\infty(\mu), H^\infty(\mu)\}$ にあてはめることが出来る. 特に

定理 3.4. ~~両辺理想の条件~~ $\mathcal{M}(L^\infty(\mu)) = \Gamma(H^\infty(\mu))$ のとき、 $\mathcal{J}(L^\infty(\mu))$ から $L^\infty(\mu)$ への $*$ -準同型 ρ をとって

$$\{0\} \longrightarrow \mathcal{C}(L^\infty(\mu)) \xrightarrow{i} \mathcal{J}(L^\infty(\mu)) \xrightarrow{\rho} L^\infty(\mu) \longrightarrow \{0\}$$

が exact sequence であるように出来る. ここで $\rho(T_\phi) = \phi$.

$H^\infty(\mu)$ が次のような条件を満たすときには上の条件が得られる. 即ち

命題 3.5. 集合 $\{f = \sum_{j=1}^n |g_j| \mid g_j \in H^\infty(\mu)\}$ が $L^\infty(\mu)$ の正値関数の集合の γ で γ に 4 で稠密に落ちているとき、 $H^\infty(\mu)$ は $\mathcal{M}(L^\infty(\mu))$ の点と分離し、 $\Gamma(H^\infty(\mu)) = \mathcal{M}(L^\infty(\mu))$ とする.

証明. $\gamma = \mathcal{M}(L^\infty(\mu))$ とし $\gamma \in L^\infty(\mu)$ の Gelfand 表現とする.

Y の点 α, β をとり $H^\infty(\mu)$ 上で $\alpha = \beta$ とすると, $g \in H^\infty(\mu)$ によって

$$\alpha(|g|)^2 = \alpha(|g|^2) = |\alpha(g)|^2 = |\beta(g)|^2 = \beta(|g|)^2.$$

よって $\alpha(|g|) = \beta(|g|)$ とする。従って α, β は $L^\infty(\mu)$ の任意の正値関数上で等しい。ゆえに $\alpha = \beta$, 即ち $H^\infty(\mu)$ は Y の点を分離する。即ち $H^\infty(\mu)$ は Y 上の関数環である。次に V を Y の点 v の近傍とすると $L^\infty(\mu)$ の関数 h を

$$0 \leq h \leq 1, \quad h(v) = 1, \quad h(y) = 0 \quad y \in Y \sim V$$

と取るように出来る。従って $H^\infty(\mu)$ の関数 $g_1, g_2, \dots, g_k$ をとって

$$\|h - \sum_{j=1}^k |g_j|\|_\infty < 1/4 \quad \text{とすると}$$

$$\sum_{j=1}^k \chi(|g_j|)(v) > \frac{3}{4}, \quad \sum_{j=1}^k \chi(|g_j|)(y) < \frac{1}{4} \quad y \in Y \sim V.$$

ここで g_j をとりかえて $\chi(|g_j|)(v) = \chi(g_j)(v) \geq 0$ としてもかまわないから、上式から

$$\chi\left(\sum_{j=1}^k g_j\right)(v) > \frac{3}{4}, \quad \left|\chi\left(\sum_{j=1}^k g_j\right)(y)\right| < \frac{1}{4} \quad y \in Y \sim V.$$

よって $v \in \Gamma(H^\infty(\mu))$, 即ち $\Gamma(H^\infty(\mu)) = \mathcal{M}(L^\infty(\mu))$.

証明了。

定理 3.4 に続いて系 3.2, 3.3 と同様のことが T_ϕ ($\phi \in L^\infty(\mu)$) によって成立する。最後に系 3.3 の仮定(又は $H^\infty(\mu)$ によって $\Gamma(H^\infty(\mu)) = \mathcal{M}(L^\infty(\mu))$) の下では、もし $\mathcal{J}(C(X))$ が non-zero かつコンパクト作用素を含んでいたらとすると、 $\mathcal{C}(C(X))$

は又既約なから

$$\mathcal{L}C(H) \subset \mathcal{C}(C(X)) \subset \mathcal{C}(L^\infty(\mu)).$$

従って定理 3.1 と 3.4 から $\phi \in C(X)$ (又は $\phi \in L^\infty(\mu)$) によって M_ϕ の spectrum は T_ϕ の essential spectrum に含まれている。 T_ϕ の essential spectrum とは T_ϕ の Calkin algebra $\mathcal{L}(H)/\mathcal{L}C(H)$ での像の spectrum である。

§4 適用例. いくつかの具体例をあげる。

a) A を X 上の hypo-Dirichlet 環とし、 $\chi \in A$ の character, μ を χ の unique な logmodular 表現測度とすると、 $\Gamma(H^\infty(\mu)) = \text{ran}(L^\infty(\mu))$ である。従ってここで定理 3.4 を適用出来る。

b) D を複素平面上の有界領域で $D = X$ が n 個の共通部分のない analytic な Jordan 曲線からなっているとする。 a を D の点とする。 A を $\bar{D}$ で連続で D で正則な関数をつくる X 上の関数環とし μ を a と D に属する X 上の調和測度とすると、 A は hypo-Dirichlet 環であり、 $\text{supp } \mu = X$ 。従って定理 3.1 から

$$\mathcal{C}(X) \cong \mathcal{J}(C(X))/\mathcal{C}(C(X)). \quad \text{これは } \mathcal{C}(C(X)) = \mathcal{L}C(H^2(\mu))$$

の部分を除けば Abrahamse の定理 [1] に対する別の approach になる。

c) M は Stein ~~空間~~^{空間}, Ω は χ の relatively compact strongly pseudo-convex domain で smooth boundary X

をもつものとする。 A を $\bar{\Omega}$ の近傍で解析的な関数の集合の閉包とすると、 A は X 上の関数環であり $\Gamma(A) = X$ である。^{更に} $\mu \in M$ 上の hermitian metric から与えられた X 上の測度とすると $\text{supp } \mu = X$ 。一方 Folland-Kohn の結果から ([9; 定理 5.4.12]) $\mathcal{C}(C(X)) \subset \mathcal{L}(H^2(\mu))$ であり、 $H^2(\mu)$ の実数値関数は定数のみである。又明らかに $H^2(\mu) \neq L^2(\mu)$, 従って $\mathcal{C}(C(X)) = \mathcal{L}(H^2(\mu))$ 且つ $\mathcal{J}(C(X))/\mathcal{L}(H^2(\mu)) \cong C(X)$ 。^{系 3.3 より} この ~~種~~ 同様の関連結果は [11] 及び [16] の一般化にちつてゐるがその詳細は本研究会の佐藤-藪田の講演にのべらる筈である (cf. [14], [17])。

文献

1. M. B. Abrahamse, Toeplitz operators on multiply-connected regions, Amer. J. Math., 96 (1974), 261-297.
2. J. Bunce, The joint spectrum of commuting nonnormal operators, Proc. Amer. Math. Soc., 29 (1971), 499-505
3. L. G. Brown, Operator algebras and algebraic K-theory, Bull. Amer. Math. Soc., 81 (1975), 1119-1121
4. ———, R. G. Douglas and P. A. Fillmore, Unitary equivalence modulo the compact operators and extension of C^* -algebras, Springer lecture note 345, 58-128
5. ———, Extensions of C^* -algebras, operators

- with compact self-commutators, and K -homology, Bull. Amer. Math. Soc., 79 (1973), 973-978
6. L. A. Coburn and R. G. Douglas, C^* -algebras of operators on a half-space. I, IHES Publ. Math., 40 (1971), 59-67
 7. J. Dixmier, Les fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert, Ann. of Math., 51 (1950), 387-408.
 8. R. G. Douglas, Banach algebra techniques in the theory of Toeplitz operators, CBMS 15, Amer. Math. Soc., 1973.
 9. G. B. Folland and J. J. Kohn, The Neumann problem for the Cauchy-Kreimann complex, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press 1972.
 10. T. W. Gamelin, Uniform algebras, Prentice Hall 1969.
 11. J. Janas, Toeplitz operators related to certain domains in $\mathbb{C}^n$, Studia Math. 54 (1975), 73-79
 12. ———, Toeplitz operators for a certain class of functions algebras, Studia Math., 55 (1975), 157-161
 13. R. R. Phelps, Lectures ~~notes~~ on Choquet's Theorem, van Nostrand, Princeton N. J., 1966.
 14. H. Sato and K. Yabuta, Toeplitz operators on strongly pseudo-convex domains in Stein spaces, in preparation

15. W. F. Stenosing, Positive functions on C^* -algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 6 (1955), 211-216.
16. U. Venugopalkrishna, Fredholm operators associated with strongly pseudo-convex domains in $\mathbb{C}^n$, J. Functional Analysis, 9 (1972), 349-372.
17. K. Yabuta, A remark to a paper of Tanas; Toeplitz operators related to a certain domains in $\mathbb{C}^n$, to appear
18. W. Zelazko, On a problem concerning joint ~~spectra~~ approximate joint spectra, Studia Math., 45 (1973), 239-240.