

A note on strictly superstable generic structures

池田 宏一郎 (Hosei University)
法政大学経営学部

(Faculty of Business Administration, Hosei University)

ジェネリック構造とは有限構造 (有限超グラフ) を特殊な方法で貼り合わせて作った無限構造である. このジェネリック構造を構成する際に必要になってくるのが, 局所次元

$$\delta(A) = |A| - \alpha|R^A|$$

である (ここで, A は有限超グラフ, α は 1 以下の正の実数, R^A は A の超辺全体の集合). Hrushovski が最初に作った有名なジェネリック構造は

1. 可算範疇的擬平面 ([4])
2. 群をもたない non-locally modular な強極小構造 ([5])

であるが, ともに forking に関して non-trivial となっている. その理由は簡単にいえば, (1) は係数が $\alpha < 1$ であり, (2) は R が 3 変数以上であるからである.

一方, Baldwin の問題 [1, 2] の解として得られた真に超安定なジェネリック構造 [6] は, R が 2 変数で係数が $\alpha = 1$ であるので forking に関して trivial になっている. そこで本稿では, non-trivial で真に超安定ジェネリック構造を構成するために, R が 3 変数であるジェネリック構造を構成することを目指す.

1 Preliminaries

以下, 記号や定義などは Baldwin-Shi[3] あるいは Wagner[7] に基づく.

L を 3 項関係 $R(*, *, *)$ からなる言語とする. $A, B, C, \dots$ は R を超辺とする超グラフ, すなわち,

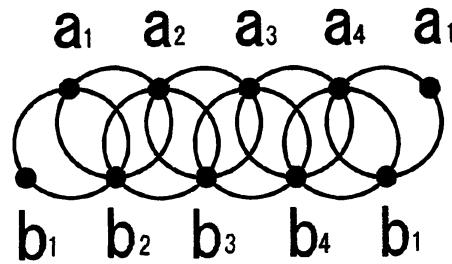
- $R(a_1, a_2, a_3) \leftrightarrow R(a_i, a_j, a_k);$
- $R(a_1, a_2, a_3) \rightarrow a_i \neq a_j.$

を満たす有限 L -構造とする (ここで, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$).

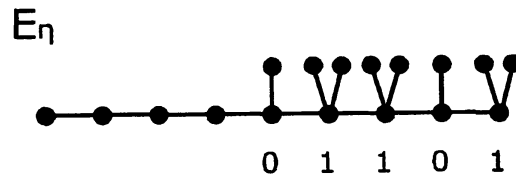
グラフにおける n -cycle に対応するものを, 超グラフにおいて定義する: 各 $n \geq 3$ に対して,

- $R(a_1, a_2, b_2), R(a_2, a_3, b_3), \dots, R(a_{n-1}, a_n, b_n), R(a_n, a_1, b_1);$
- $R(b_1, b_2, a_1), R(b_2, b_3, a_2), \dots, R(b_{n-1}, b_n, a_{n-1}), R(b_n, b_1, a_n).$

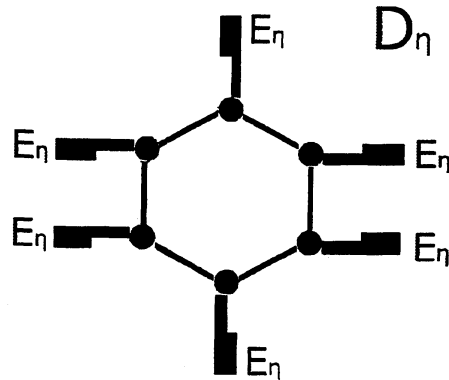
を満たす構造 $a_1 \dots a_n b_1 \dots b_n$ を C_n で表し, n -hypercycle と呼ぶことにする. (下の図は 4-hypercycle.)



一方, [6] において, 各 $\eta \in 2^{<\omega}$ に対して, グラフ D_η を次のように定義した: まず, ある関数 $f: 2^{<\omega} \rightarrow \{3, 4, 5, \dots\}$ をひとつ固定する. このとき, たとえば $\eta = (01101)$ に対して, グラフ E_η を



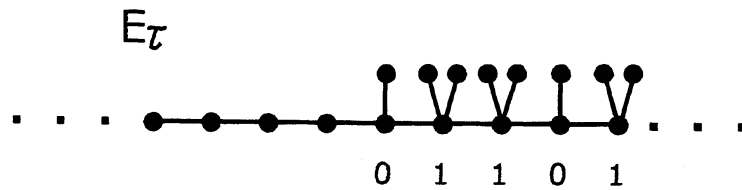
のように定義する. そして, D_η を



のように定義する. (図は $f(\eta) = 6$ の場合.)

以上が, グラフにおける D_η の定義であるが, 先に cycle に対し hypercycle を定義したように, 超グラフに対して D_η に対応するものを同じように定義できる. これらをここでは jelly fish と呼ぶことにする.

さらには, 上で有限列 $\eta \in 2^{<\omega}$ に対して E_η を定義したが, 無限列 $\tau \in 2^\omega$ に対しても同様に E_τ が定義できる. ここではこのような E_τ を snake と呼ぶ. (下の図は $\tau = (01101 \dots)$ の場合.)



Definition 1.1 1. $\delta(A) = |A| - |R^A|$ と定義する. (R^A は A の超辺の数)

2. $\delta(B/A) = \delta(B \cup A) - \delta(A)$ と定義する.

3. $B \cap C = A$ を満たす A, B, C に対して, $R^{BC} = R^B \cup R^C$ であるとき, B と C は A 上自由 (free) であるといい, $B \perp_A C$ と書く. このとき構造 BC を $B \oplus_A C$ と書く.

Note 1.2 hypercycle や jelly fish は $\delta = 0$. さらに, それらの部分構造は $\delta \geq 0$.

E を jelly fish の部分構造で $\delta = 0$ となる構造全体のクラスとする. F を連結な有限構造でその部分構造がすべて $\delta > 0$ となる構造全体のクラスとする. また, $E \cup F$ の要素の有限個の ($\emptyset$ 上の) 直和全体を K とする.

Definition 1.3 1. 有限構造 $A \subset B$ に対して, 任意の $X \subset B - A$ に対して $\delta(X/A) \geq 0$ が成り立つとき, A は B の中で closed であるといい, $A \leq B$ と書く.

2. 有限構造のクラス K が次の条件を満たすとき融合性 (amalgamation property) をもつという: $A \leq B \in K, A \leq C \in K$ ならば, B, C の A 上のあるコピー B', C' に対して, $B', C' \leq B' \cup C' \in K$ が成り立つ.

Lemma 1.4 1. K は部分構造に関して閉じている.

2. K は融合性をもつ.

Proof. (1) は K の定義よりあきらか. (2) を証明する. $A \leq B \in K$ かつ $A \leq C \in K$ とする. このとき $D = B \oplus_A C$ と仮定しても構わない. さらに D は連結であるとしてよい. もし B, C がともに hypercycle をもたないならば, $B, C \in F$ を得るので, F の定義より $D \in F \subset K$. よって B か C のいずれかが hypercycle をもつと仮定してよい. ここでは B が hypercycle をもつとする. $A \leq B$ かつ D の連結性より, B 中の hypercycle は必ず A 中にあり, それはただひとつ存在する. それを C_n とすると, B, C はそれぞれ $\text{jelly fish } D_n$ の部分構造になっているはず. (ここで $\eta = f^{-1}(n)$.) よって融合性が成り立つことは明らか.

Definition 1.5 K を有限構造のあるクラスとする. このとき, 可算構造 M が次の3つの条件を満たすとき, $(K, \leq)$ -ジェネリックであるという:

- $A \subset_\omega M$ ならば $A \in K$;
- $A \leq B \in K$ かつ $A \leq M$ ならば, B の A 上のコピーで M の中で closed なものが存在;
- 任意の $A \subset_\omega M$ に対して, $A \subset B \leq M$ となる有限構造 B が存在.

Lemma 1.4 より, ここでの K に対してジェネリック構造 M がただひとつ存在することがわかる. 以下, M を M の big model とする.

Lemma 1.6 $\text{Th}(M)$ は ω -安定でない.

Proof 同型でない snake が非可算個存在するので.

2 Proof of Theorem

Definition 2.1 1. $e \in \mathcal{M}$ が j-element であるとは, e を含む連結成分が jelly fish になっていることとする.

2. $e \in \mathcal{M}$ が s-element であるとは, e を含む連結成分が snake になっていることである.

3. $e \in \mathcal{M}$ が r-element であるとは, j-element でも s-element でもないこととする.

4. $e \in \mathcal{M}$ が jr-element であるとは, e が j-element か r-element のいずれかであることである

5. $A \subset \mathcal{M}$ が j-set (s-set, r-set, jr-set) であるとは, 任意の $e \in A$ が j-element (s-element, r-element, jr-set) であることである.

Note 2.2 1. $A \subset_{\omega} \mathcal{M}$ が r-set であることは定義可能.

2. a と b が連結かつ a が j-element (s-element, r-element) ならば, b も j-element (s-element, r-element) .

Lemma 2.3 1. $A \leq B \in \mathbf{F}, A \subset C \in \mathbf{F}, B \perp_A C$ とする. このとき $D = B \oplus_A C \in \mathbf{F}$.

2. $A \subset \mathcal{M}, A \leq B \in \mathbf{K}, A$ は r-set, B は連結であるとする. このとき B の A 上のコピーが $\mathcal{M}$ の中に存在する.

Proof (1) 任意の $X \subset D$ に対して, $\delta(X) > 0$ を示せばよい. 実際, $\delta(X) = \delta((X \cap B) \cup (X \cap C)) = \delta(X \cap C) + \delta(X \cap B / X \cap A) \geq 1 + 0 > 0$.

(2) そうでないとする. B は連結であると仮定してよい. A が r-set であるので $B \in \mathbf{F}$. このとき

$$\{X \cong A\} \cup \{X \text{ is r-set}\} \cup \{(\neg \exists Y)(YX \cong BA)\}$$

は無矛盾. よってこの論理式の M における解を A' とする. A' も r-set であるので, $C' = \text{cl}(A')$ とすると $C' \in \mathbf{F}$. B' を $B'A' \cong BA$ かつ $B' \perp'_A C'$ を満たすように取ると, (1) より $B' \oplus_{A'} C' \in \mathbf{F}$. よって genericity より, B' の A' 上コピーが $M \subset \mathcal{M}$ の中に存在してしまい矛盾.

Lemma 2.4 $A \leq \mathcal{M}, A \leq B \in \mathbf{K}, A$ は jr-set, B は連結であるとする. このとき B の A 上のコピーで closed なものが $\mathcal{M}$ の中に存在する.

Proof. このとき A は j-set か r-set のいずれかであると考えられる。 A が j-set のときはほぼあきらか。 A が r-set のときを示す。 まず Lemma 2.3 より, B の A 上のコピー B' が M の中に取れる。 このとき, コピー B' が closed に取れないと仮定して矛盾を導く。 いまこの仮定より, コンパクト性を用いると, ある $m \in \omega$ が存在して, どんな M の中のコピーも m -closed に取れないことがわかる。 このとき

$$\{X \cong A\} \cup \{X : m\text{-closed} + r\text{-set}\} \cup \{(\neg \exists Y)(YX \cong BA \wedge (Y : m\text{-closed}))\}$$

は無矛盾。 よってこの論理式のジェネリック構造 M における解を A' とする。 ここで, $C' = \text{cl}(A')$ とし, B' を $B'A' \cong BA$ かつ $B' \perp_{A'} C'$ を満たすように取る。 A' は r-set であるので, $B', C' \in F$ であると仮定できる。 よって Lemma 2.3 より $B' \oplus_{A'} C' \in F \subset K$ 。 従ってジェネリックであることにより, B' の C' 上のコピー B'' が $B''C' \leq M$ を満たすように取れる。 このとき $B'' \leq_m B''C' \leq M \leq M$ が成り立つ。 これは A' が上の論理式の解であることに矛盾。

Note 2.5 $A \subset M$ の s-element 全体を $s(A)$ と書き, jr-element 全体を $jr(A)$ と書く。

Definition 2.6 $a \in M$ を含む連結成分を $U(a)$ で表す。 $A \subset M$ に対して, $U(A) = \bigcup_{a \in A} U(a)$ と書く。

Lemma 2.7 $A \leq B \leq M, A \leq B' \leq M$ かつ $B \cong_A B'$ とする。 このとき $U(s(B)) \cong_A U(s(B'))$ であるならば $\text{tp}(B/A) = \text{tp}(B'/A)$ 。

Proof. 簡単のため, B, B' が有限である場合を示す。 勝手な $c \in M - B$ を取り, $C = \text{cl}(cB)$ とする。 このとき往復論法より

$$C'B' \cong_A CB, \quad U(s(C')) \cong_A U(s(C))$$

を満たす $C' \leq M$ が存在することが示されれば十分。 c を含む C の連結成分を C_0 とし, $B_0 = B \cap C_0, A_0 = A \cap C_0$ とする。 また, B'_0 を $B_0B \cong_A B'_0B'$ を満たすように取る。 このとき, 上のことを示すには

$$C'_0B'_0 \cong_{A_0} C_0B_0, \quad U(s(C'_0)) \cong_{A_0} U(s(C_0))$$

を満たす $C_0 \leq M$ が存在することがいえればよい。 次の2つの場合に分けて考える。

Case 1: c が jr-element の場合。

このとき B_0 も jr-element なので, $U(s(B)) \cong_A U(s(B'))$ なので, B'_0 も jr-element. ここで, C'_0 を $C_0 B_0 \cong_{A_0} C'_0 B'_0$ となるように取ると, C'_0 は連結かつ K の元. よって Lemma 2.4 より, $C'_0 B'_0 \cong_{A_0} C_0 B_0$ を満たす $C_0 \leq M$ が存在. さらに, $U(s(C'_0)) = U(s(C_0)) = \emptyset$ であることに注意すれば, Case 1 の場合は成り立つことがわかる.

Case 2: c が s-element の場合.

$c \in U(s(B_0))$ であるので, $C_0 \subset U(s(B_0))$ が成り立つ. よって求める C'_0 は $U(s(B'_0))$ の中から取れる.

Definition 2.8 1. $\bar{a} \in M$ に対して, $d(\bar{a}) = \delta(\text{cl}(\bar{a}))$ と定義する.

2. $d(\bar{a}/\bar{b}) = d(\bar{a}\bar{b}) - d(\bar{b})$ と書く.

3. $\bar{a} \in M$ と $A \subset M$ に対して, $d(\bar{a}/A) = \lim_{\bar{b} \in A} d(\bar{a}/\bar{b})$ と定義する.

4. $B \cap C = A$ を満たす $A, B, C \subset M$ が, $B \perp_A C$ かつ $BC \leq M$ を満たすとき, $B \downarrow_A^d C$ と書く.

Fact 2.9 $A, B, C \leq M$ が $B \cap C = A$ を満たすとする. このとき次は同値.

1. $d(B/C) = d(B/A)$

2. $B \downarrow_A^d C$

Lemma 2.10 $\text{Th}(M)$ は超安定.

Proof. 任意の $\lambda \geq 2^{\aleph_0}$ と濃度 λ の $N \prec M$ に対して, $|S(N)| = \lambda$ が示せばよい. タイプ $p \in S(N)$ を固定し, $\bar{b}$ を p の解とする. このとき $d(\bar{b}/N) = d(\bar{b}/A)$ を満たす可算な $A \subset N$ が存在. $B = \text{cl}(\bar{b}A)$ とする. ここで $B \cap N = A$ が成り立っていると仮定しても構わない. (必要ならば A を取り直す.) このとき Fact 2.9 より $B \downarrow_A^d N$. $B' \downarrow_A^d N$ を満たす $\text{tp}(B/A)$ の解 B' を任意に選ぶ.

Claim: $\text{tp}(B'/N) = \text{tp}(B/N)$.

Proof: Fact 2.9 より, $BN, B'N \leq M$ および $B \cong_N B'$ を得る. 一方, $\text{tp}(B/A) = \text{tp}(B'/A)$ より, あきらかに $U(s(B)) \cong_A U(s(B'))$. N がモデルであることより, $U(s(B)) \perp_A N$ and $U(s(B')) \perp_A N$. したがって $U(s(B)) \cong_N U(s(B'))$. よって Lemma 2.7 より $\text{tp}(B/N) = \text{tp}(B'/N)$ を得る.

以上より次の定理が得られる.

Theorem 2.11 真に超安定で non-trivial なジェネリック構造が存在する.

References

- [1] J. T. Baldwin, Problems on pathological structures, In Helmut Wolter Martin Weese, editor, *Proceedings of 10th Easter Conference in Model Theory* (1993) 1–9
- [2] J. T. Baldwin, A field guide to Hrushovski's constructions, <http://www.math.uic.edu/~jbaldwin/pub/hrutrav.pdf>, 2009
- [3] J. T. Baldwin and N. Shi, Stable generic structures, *Annals of Pure and Applied Logic* 79 (1996) 1–35
- [4] E. Hrushovski, A stable $\aleph_0$ -categorical pseudoplane, preprint, 1988
- [5] E. Hrushovski, A new strongly minimal set, *Annals of Pure and Applied Logic* 62 (1993) 147–166
- [6] K. Ikeda, *Ab initio* generic structures which are superstable but not ω -stable, submitted
- [7] F. O. Wagner, Relational structures and dimensions, In *Automorphisms of first-order structures*, Clarendon Press, Oxford (1994) 153–181