

原点死滅過程に対する調和関数について

矢野 孝次* (京都大学大学院理学研究科)

概要

原点死滅過程に対する調和関数が存在して正值であるとき、その調和変換を用いて周遊測度の積分分解公式が一般に得られる。しかしながら、調和関数の存在および正值性は一般にはわからない。本報告では、一次元レヴィ過程の場合の結果をまとめる。

1 序

$E = [0, \infty)$ 上の原点反射壁ブラウン運動を $\{X(t), \mathbb{P}_x\}$ と書き、原点吸収壁のそれを $\{X(t), \mathbb{P}_x^0\}$ と書く。原点まわりの周遊点過程の特性測度を $\mathbf{n}$ と書く。このとき、関数 $h(x) = x$ は

$$\mathbb{E}_x^0[h(X(t))] = h(x) \quad \text{for all } t > 0 \text{ and all } x \in E \quad (1.1)$$

を満たし、かつある有限な定数 c_0 (局所時間の選び方に依じて決まる) が存在して

$$\mathbf{n}[h(X(t))] = c_0 \quad \text{for all } t > 0 \quad (1.2)$$

を満たす。さらに、

$$\text{for } A \in \mathcal{F}_t, \quad \mathbb{P}_x^h(A) = \begin{cases} \frac{1}{h(x)} \mathbb{E}_x^0[h(X(t)); A] & \text{if } x \in E \setminus \{0\} \\ \frac{1}{c_0} \mathbf{n}[h(X(t)); A] & \text{if } x = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

で定まる過程 $\{X(t), \mathbb{P}_x^h\}$ は3次元ベッセル過程であり、周遊測度 $\mathbf{n}$ の積分分解公式

$$\mathbf{n}(\cdot) = \int_0^\infty \mathbb{P}_0^h(\cdot | X(t) = 0) \rho(t) dt \quad (1.4)$$

が成り立つ。但し、 $\rho(t)$ は $t^{-3/2}$ の定数倍である。

一般に、非負関数 $h(x)$ が (1.1) および (1.2) を満たすとき、(原点死滅過程に対する) **調和関数** と呼ぶことにする。上で述べたことはもっと一般に成り立つ。実際、一次元拡散過程はスケール関数を、あるいはまた対称レヴィ過程 ([8]) は修正0レゾルベントを、それぞれ調和関数に持ち、積分分解公式

$$\mathbf{n}(\cdot) = \int_0^\infty \mathbb{P}_0^h(\cdot | X(t) = 0) \rho(t) dt + \kappa \mathbb{P}_0^h(\cdot) \quad (1.5)$$

が成り立つ。但し、 κ は非再帰性のパラメタである。しかしながら、一般には調和関数が存在するか否かわからない。本報告の目的は、一次元レヴィ過程の場合について、結果をまとめるとともに、非対称の場合の問題点について述べることである。

*Email: kyano@math.kyoto-u.ac.jp

2 調和関数と積分分解公式

ここでは、一次元レヴィ過程の場合に限って述べる (実際はもっと一般的な仮定の下で議論を展開することができる).

$\{X(t), \mathbb{P}_x\}$ を一次元レヴィ過程とする. レヴィ-ヒンチン指数を $\Psi(\lambda)$ と書くと, $\lambda \in \mathbb{R}$ のとき $\mathbb{E}_0[e^{i\lambda X(t)}] = e^{-t\Psi(\lambda)}$ であり, 定数 $b \in \mathbb{R}$ と $v \geq 0$ およびレヴィ測度 ν を用いて

$$\Psi(\lambda) = ib\lambda + v\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x 1_{(-1,1)}(x)) \nu(dx) \quad (2.1)$$

と表される. 但し, ν は $\nu(\{0\}) = 0$ かつ $\int_{\mathbb{R}} (|x|^2 \wedge 1) \nu(dx) < \infty$ を満たす. $\Psi(\lambda)$ の実部および虚部をそれぞれ $\theta(\lambda)$ および $\omega(\lambda)$ と書く:

$$\theta(\lambda) = \operatorname{Re} \Psi(\lambda) = v\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos \lambda x) \nu(dx), \quad (2.2)$$

$$\omega(\lambda) = \operatorname{Im} \Psi(\lambda) = b\lambda + \int_{\mathbb{R}} (\lambda x 1_{(-1,1)}(x) - \sin \lambda x) \nu(dx). \quad (2.3)$$

ここで, θ は非負の偶関数, ω は奇関数であることに注意する.

点 $x \in \mathbb{R}$ の到達時刻を

$$T_x = \inf\{t > 0 : X(t) = x\} \quad (2.4)$$

と書く. **原点正則** とは, $\mathbb{P}_0(T_0 = 0) = 1$ が成り立つことを言う. 原点正則かつ複合ポアソンのためには, 以下の条件が必要十分である (Kesten [4] and Bretagnolle [1]):

$$(L1) \quad \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Re} \frac{1}{q + \Psi(\lambda)} d\lambda < \infty \text{ for all } q > 0;$$

$$(L2) \quad \text{either } v > 0 \text{ or } \int_{(-1,1)} |x| \nu(dx) = \infty.$$

条件 (L1) より強い次の条件を導入する:

$$(L1') \quad \int_0^\infty \frac{1}{q + \theta(\lambda)} d\lambda < \infty \text{ for all } q > 0.$$

以下, 条件 (L1') および (L2) を仮定する. 条件 (L1') より $|e^{-t\Psi(\lambda)}| = e^{-t\theta(\lambda)} \in L^1(d\lambda)$ が成り立ち, フーリエ逆変換により

$$p_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Re} e^{-i\lambda x - t\Psi(\lambda)} d\lambda, \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

が推移確率密度を与える:

$$\mathbb{E}_x[f(X(t))] = \int_{\mathbb{R}} f(y)p_t(y-x)dy. \quad (2.6)$$

さらに, 条件 (L1') により, $p_t(x)$ のラプラス変換

$$r_q(x) := \int_0^\infty e^{-qt} p_t(x) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Re} \frac{e^{-i\lambda x}}{q + \Psi(\lambda)} d\lambda \quad (2.7)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{(q + \theta(\lambda)) \cos \lambda x + \omega(\lambda) \sin \lambda x}{(q + \theta(\lambda))^2 + \omega(\lambda)^2} d\lambda \quad (2.8)$$

(但し $q > 0$) が存在して, レゾルベント密度を与える:

$$R_q f(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-qt} f(X(t)) dt \right] = \int_{\mathbb{R}} f(y) r_q(y-x) dy. \quad (2.9)$$

実数値 càdlàg path 全体を $\mathbb{D}$ で表し,

$$\mathbb{D}^0 = \{w \in \mathbb{D} : w(t) = w(t \wedge T_0) \text{ for all } t \geq 0\} \quad (2.10)$$

とおく. 集合 $\mathbb{D}^0$ に属する path を **excursion** とも呼ぶ. 座標過程を $X(t)$ で表す: $X(t)(w) = w(t)$ for $w \in \mathbb{D}$ and $t \geq 0$. 座標過程に関する自然な filtration を

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X(s) : s \leq t) \quad (2.11)$$

と書く. 原点正則性より, **原点局所時間** $L(t)$ が存在する, すなわち, 正值連続加法的汎関数であって, X が原点にいるときのみ増加, すなわち

$$\int_0^\infty 1_{\{X(t) \neq 0\}} dL(t) = 0 \quad (2.12)$$

を満たすものが存在し, 定数の差を除いて一意である. さらに, $L(t)$ として次式を満たす version がとれる:

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-qt} dL(t) \right] = r_q(-x) \quad \text{for all } q > 0 \text{ and } x \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

強マルコフ性より

$$\mathbb{E}_x[e^{-qT_0}] = \frac{r_q(-x)}{r_q(0)}, \quad q > 0, x \in \mathbb{R} \quad (2.14)$$

が成り立つことに注意しておく. 式 (2.13) 局所時間の右連続逆過程を $\eta(l)$ と書く:

$$\eta(l) = \inf\{t \geq 0 : L(t) > l\} \quad \text{for } l \geq 0. \quad (2.15)$$

このとき、過程 $\{\eta(l), \mathbb{P}_0\}$ は subordinator であり、 $X(t)$ が非再帰的なときは時刻 $\lambda := L(\infty)$ で爆発する。ここで一般に、 $\mathbb{D}$ 上の σ -有限測度 $\mathbf{n}$ であって

$$\mathbf{n}[T_0 \wedge 1] < \infty, \quad \mathbf{n}(\mathbb{D}) = \infty \quad \text{and} \quad \mathbf{n}(\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}^0) = 0 \quad (2.16)$$

を満たすものを取り、それを特性測度とするポアソン点過程 $p(l) = (p(l; t))_{t \geq 0}$ on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を考える。これについて

$$\eta_p(l) = \sum_{s \leq l} T_0(p(s)) \quad (2.17)$$

とおき、

$$\lambda_p = \inf\{l > 0 : \eta_p(l) = \infty\} \quad (2.18)$$

とおく。条件 (2.16) より $\eta_p(l)$ は $l \in [0, \lambda_p)$ について狭義増加であり、従って連続な逆過程 $L_p(t)$ が存在する。こうして

$$X_p(t) = \begin{cases} p(l; t - \eta_p(l-)) & \text{if } \eta_p(l-) \leq t < \eta_p(l) \text{ for some } l \in [0, \lambda_p], \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.19)$$

とおく。次の定理は Itô [3] および Meyer [5] による。

Theorem 2.1 ([3] and [5]). 条件 (2.16) を満たし、かつ

$$\{\eta_p, L_p, X_p, \lambda_p, \mathbb{P}\} \stackrel{\text{law}}{=} \{\eta, L, X, \lambda, \mathbb{P}_0\} \quad (2.20)$$

を満たす $\mathbb{D}$ 上の σ -有限測度 $\mathbf{n}$ が一意的に存在する。この測度 $\mathbf{n}$ を周遊測度と呼ぶ。

ポアソン点過程の compensation formula により、次が成り立つ。

Theorem 2.2. 任意の非負可測関数 f に対し、

$$\mathbf{n} \left[\int_0^{T_0} e^{-qt} f(X(t)) dt \right] = \frac{1}{r_q(0)} \int_{\mathbb{R}} f(y) r_q(y) dy. \quad (2.21)$$

特に、 $f \equiv 1$ として、

$$\int_0^\infty e^{-qt} \mathbf{n}(T_0 > t) dt = \frac{1}{qr_q(0)}. \quad (2.22)$$

q 倍して $q \rightarrow 0+$ とすると

$$\kappa := \mathbf{n}(T_0 = \infty) = \lim_{q \rightarrow 0+} \frac{1}{r_q(0)} \quad (2.23)$$

である。 $X(t)$ が再帰的なら $\kappa = 0$ 、非再帰的なら > 0 である。

ここで, $E = \mathbb{R}$ とする. 非負関数 $h(x)$ が調和関数であるとは, (1.1) および (1.2) を満たすことと定義する. この条件は次の条件と同値である:

$$qR_q h(x) = h(x) + r_q(-x) \quad \text{for all } q > 0 \text{ and } x \in E. \quad (2.24)$$

Theorem 2.3. 以下の条件を仮定する:

(H) h は調和関数であって $x \in E \setminus \{0\}$ において常に $h(x) > 0$;

(T) 密度関数 $\rho(t)$ が存在して $\mathbf{n}(T_0 \in dt) = \rho(t)dt$ on $(0, \infty)$.

このとき, 周遊測度 $\mathbf{n}$ は次の積分分解公式を満たす:

$$\mathbf{n}(\cdot) = \int_0^\infty \mathbb{P}_0^h(\cdot | X(t-) = 0) \rho(t) dt + \kappa \mathbb{P}_0^h(\cdot). \quad (2.25)$$

但し, $\{X(t), \mathbb{P}_x^h\}$ は式 (1.3) で定まる調和変換である.

この定理の仮定 (H) と (T) とがともに満たされているかどうかを問いたい.

3 修正 0 レゾルベント

一次元レヴィ過程の調和関数の候補を与えるため,

$$h_q(x) = r_q(0) - r_q(-x), \quad q > 0, x \in E \quad (3.1)$$

とおく. 極限 $h_0 := \lim_{q \rightarrow 0+} h_q$ がもし存在するとき, それを修正 0 レゾルベントと呼ぶ.

Proposition 3.1 ([9]). 修正 0 レゾルベント h_0 が存在すると仮定する. このとき,

$$R_q h_0(x) < \infty \quad \text{for all } q > 0 \text{ and all } x \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

さらに, ある非負可測関数 $f(x)$ であって

$$R_q f(x) < \infty \quad \text{for all } q > 0 \text{ and all } x \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

かつ

$$h_q(x) \leq f(x) \quad \text{for all } q > 0 \text{ and all } x \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

なるものが存在したと仮定する. このとき, h_0 は調和関数である.

Proof. レゾルベント方程式

$$r_q(z-x) - r_p(z-x) + (q-p) \int_{\mathbb{R}} r_q(y-x) r_p(z-y) dy = 0 \quad (3.5)$$

により, $q > 0$ および $p > 0$ に対して

$$R_q h_p(x) = \frac{h_p(x)}{q-p} + \frac{r_q(-x)}{q-p} - \frac{p r_p(0)}{q(q-p)}. \quad (3.6)$$

ここで,

$$\lim_{p \rightarrow 0+} p r_p(0) = 0 \quad (3.7)$$

が成り立つことに注意する (証明は [9] を見よ) と, Fatou's lemma より

$$q R_q h_0(x) \leq \liminf_{p \rightarrow 0+} q R_q h_p(x) = h_0(x) + r_q(-x) < \infty. \quad (3.8)$$

また, 優関数 f の存在を仮定すると, 優収束定理により $R_q h_p \rightarrow R_q h_0$ が成り立ち, $h = h_0$ に対して (2.24) を得る. よって h_0 は調和関数であると言えた. $\square$

Remark 3.2. 修正 0 レゾルベント h_0 が存在するとき, 式 (2.14) より

$$r_q(0) \mathbb{E}_x[1 - e^{-qT_0}] \rightarrow h_0(x) \quad \text{as } q \rightarrow 0+ \quad (3.9)$$

が成り立つ. さらにもし, $\alpha > 0$ として $r_q(0)$ の正則変動性

$$r_q(0) \sim c_r q^{\frac{1}{\alpha}-1} \quad \text{as } q \rightarrow 0+ \quad (3.10)$$

が満たされるならば, $h_0(x) > 0$ なる任意の点 $x \in E$ において, 原点到達時刻の漸近挙動

$$\mathbb{P}_x(T_0 > t) \sim \frac{h_0(x)}{c_r \Gamma(1/\alpha)} t^{\frac{1}{\alpha}-1} \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad (3.11)$$

が Tauber 型定理より得られる.

対称な場合

対称な場合, それは $\omega(\lambda) \equiv 0$ の場合であるが, この場合は $q \downarrow 0$ のとき $h_q(x) \uparrow h_0(x)$ であり, 条件 (H) が満たされることが容易に示される. また,

$$r_q(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{q + \theta(\lambda)} d\lambda = \int_{[0, \infty)} \frac{1}{q + \xi} \sigma(d\xi) \quad (3.12)$$

と表せる測度 σ がとれることから,

$$\frac{1}{q r_q(0)} = \int_{[0, \infty)} \frac{1}{q + \xi} \sigma^*(d\xi) \quad \text{for all } q > 0 \quad (3.13)$$

と表せる測度 σ^* がとれて, 次の定理が成り立つ.

Theorem 3.3 ([8]). 条件 (L1') および (L2) に加えて対称性を仮定する. このとき,

$$\rho(t) = \int_{(0,\infty)} e^{-t\xi} \xi \sigma^*(d\xi), \quad \kappa = \sigma^*({0}) \quad (3.14)$$

として条件 (T) が満たされる. さらに, 条件 (H) を満たす h_0 が存在し,

$$h_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \lambda x}{\theta(\lambda)} d\lambda \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

狭義安定過程の場合

ブラウン運動の場合を除いた狭義安定過程の場合は, レヴィ測度が

$$\nu(dx) = \begin{cases} c_+ |x|^{-\alpha-1} dx & \text{on } (0, \infty) \\ c_- |x|^{-\alpha-1} dx & \text{on } (-\infty, 0) \end{cases} \quad (3.16)$$

の形で与えられ, レヴィ-ヒンチン指数が

$$\Psi(\lambda) = c_\theta |\lambda|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sgn}(\lambda) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) \quad (3.17)$$

の形で与えられる. ここで, 原点正則性の過程より $1 < \alpha < 2$ であり, c_+ と c_- は正の定数で $c_+ + c_- > 0$ であり, $S_\alpha = 2\Gamma(\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{2}$ とおくと, $c_\theta > 0$ と $\beta \in [-1, 1]$ は

$$c_\theta = (c_+ + c_-) \frac{\pi}{\alpha S_\alpha}, \quad \beta = \frac{c_+ - c_-}{c_+ + c_-}, \quad (3.18)$$

で与えられる. このとき

$$\theta(\lambda) = c_\theta |\lambda|^\alpha \quad \text{and} \quad \omega(\lambda) = c_\omega |\lambda|^\alpha \operatorname{sgn}(\lambda) \quad (3.19)$$

である. 但し, $c_\omega = c_\theta \beta \cdot (-\tan \frac{\pi\alpha}{2})$. また, c_p, c_r を正定数として

$$p_t(0) = c_p t^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad r_q(0) = c_r q^{\frac{1}{\alpha}-1} \quad (3.20)$$

が成り立つ. 公式 (2.22) により,

$$\rho(t) = \frac{1 - \frac{1}{\alpha}}{c_r \Gamma(\frac{1}{\alpha})} t^{\frac{1}{\alpha}-2} \quad (3.21)$$

として条件 (T) が満たされる. また, 修正 0 レゾルベントが存在して

$$h_0(x) = \frac{1 - \beta \operatorname{sgn}(x)}{c_\theta (1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\pi\alpha}{2}) C_\alpha} |x|^{\alpha-1}, \quad (3.22)$$

で与えられる (cf. Port [6]). 但し, $C_\alpha = 2\Gamma(\alpha) \cdot (-\cos \frac{\pi\alpha}{2})$. さらに, h_0 は調和関数である (詳細は [9] を見よ. なお, $\beta = \pm 1$ で $\pm x < 0$ の場合は Silverstein [7, Theorem 2]). この式より, $-1 < \beta < 1$ のときは $h = h_0$ として条件 (H) が満たされる. 一方, $\beta = \pm 1$ のときは, $\pm x \geq 0$ のとき $h_0(x) = 0$ であり, $h = h_0$ は条件 (H) を満たさない.

Remark 3.4. $\beta = 1$ の場合, 負の跳びがないから, 周遊路は以下のどちらかに限られる:

(i) 時刻 T_0 まで正の値のみをとる.

(ii) はじめ負の値をとり, ある時刻で正に変わり, その後時刻 T_0 まで正の値のみとる. しかしながら, 上のいずれもが実現し得るのかどうかは不明で, 周遊測度の性質はよくわかっていない. なお, 末尾確率 $\mathbb{P}_x(T_0 > t)$ の漸近挙動について, $x < 0$ のときは Port [6, Theorem 2] により, $x > 0$ のときは Chaumont [2, pp.386] により,

$$\mathbb{P}_x(T_0 > t) \sim \begin{cases} C_+(\alpha, 1)t^{-\frac{1}{\alpha}}x & \text{if } x > 0 \\ C_-(\alpha, 1)t^{-\rho}|x|^{\alpha-1} & \text{if } x < 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

が知られている. 但し, $\rho = 1 - \frac{1}{\alpha}$ であり, $C_+(\alpha, 1)$ と $C_-(\alpha, 1)$ は正定数.

Remark 3.5. 非対称な場合には一般論はないが, [9] において, 条件 (H) および (T) の十分条件を, $-1 < \beta < 1$ に対する狭義対称安定過程を少し緩めた形で与えている.

参考文献

- [1] J. Bretagnolle. Résultats de Kesten sur les processus à accroissements indépendants. In *Séminaire de Probabilités, V (Univ. Strasbourg, année universitaire 1969-1970)*, pages 21–36. Lecture Notes in Math., Vol. 191. Springer, Berlin, 1971.
- [2] L. Chaumont. Excursion normalisée, méandre et pont pour les processus de Lévy stables. *Bull. Sci. Math.*, 121(5):377–403, 1997.
- [3] K. Itô. Poisson point processes attached to Markov processes. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. III: Probability theory*, pages 225–239, Berkeley, Calif., 1972. Univ. California Press.
- [4] H. Kesten. *Hitting probabilities of single points for processes with stationary independent increments*. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 93. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.
- [5] P. A. Meyer. Processus de Poisson ponctuels, d’après K. Ito. In *Séminaire de Probabilités, V (Univ. Strasbourg, année universitaire 1969-1970)*, pages 177–190. Lecture Notes in Math., Vol. 191. Springer, Berlin, 1971. Erratum in p. 253, Séminaire de Probabilités, VI, Lecture Notes in Math., Vol. 258, 1972.
- [6] S. C. Port. Hitting times and potentials for recurrent stable processes. *J. Analyse Math.*, 20:371–395, 1967.
- [7] M. L. Silverstein. Classification of coharmonic and coinvariant functions for a Lévy process. *Ann. Probab.*, 8(3):539–575, 1980.
- [8] K. Yano. Excursions away from a regular point for one-dimensional symmetric Lévy processes without Gaussian part. *Potential Anal.*, 32(4):305–341, 2010.
- [9] K. Yano. On harmonic function for the killed process upon hitting zero of asymmetric Lévy processes. *J. Math-for-Ind.*, to appear.