

非定常問題の F. E. M. 近似と Trotter-Kato の定理

電気通信大学 牛島 照夫

適合性のもとでは、有界性と収束性が同値であることを主張する Lax の同値定理は、線形発展方程式の（差分）近似理論における指導原理と考えられる。Trotter-Kato の半群の近似理論を適切に再構成することによって、F. E. M. 近似に対してもこの原理が成立することを、二階の放物型および双曲型の方程式を作用素論的に書き直した発展方程式を例として述べたい。摂動系と、いわゆる *lumping* の問題のとりあつかいについても触れたい。

ここで得られる結果は、具体的問題に対しては、既によく知られたことであるが、このような取りあつかい方によると、F. E. M. 近似の際の適合性の概念の説明に役立つと思われる。この事情の解明を示唆されたのは藤井宏博士であり、彼の助言に深く感謝申し上げる。

1. 線形半群の近似理論

バナッハ空間 X における有界線形作用素の全体からなる空間 $L(X)$ に値をとるクラス C_0 の半群 $T(t)$ ($t \geq 0$) をここでは連続半群とよぶ。(連続半群とその生成作用素に関しては、たとえば [1] を見よ。)

$L(X)$ 値関数 $T(t)$ ($t \geq 0$) が時間単位 $\tau (> 0)$ の離散半群であるとは、ある $T(\tau) \in L(X)$ が存在して

$$T(t) = T(\tau)^{[t/\tau]}$$

となることをいう。離散半群 $T(t)$ の生成作用素 $A \in L(X)$ を

$$A = \tau^{-1}(T(\tau) - 1)$$

によって定義する。

バナッハ空間の列 X_n ($n=1, 2, \dots$) が、バナッハ空間 X に K -収束する ($X_n \xrightarrow{K} X$) とは、次の二条件をみたす、近似作用素 $P_n \in L(X, X_n)$ が存在することである。

$$(K. 1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n x\| = \|x\| \quad \text{for any } x \in X.$$

$$(K. 2) \quad \text{ある } n \text{ によらない } N \text{ があって}$$

$$\forall x_n \in X_n; \exists x^{(n)} \in X \quad \text{s.t. } x_n = P_n x^{(n)} \text{ \& } \|x^{(n)}\| \leq N \|x_n\|.$$

以下 $X_n \xrightarrow{K} X$ なるバナッハ空間の列 $\{X_n\}$ を固定する。

列 $\{x_n \in X\}$ が $x \in X$ に K -収束する ($x_n \xrightarrow{K} x$) とは、

$$\|x_n - P_n x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \text{ となることをいい、列 } \{x_{\lambda, n}$$

$\in X_n\} \lambda \in \Lambda$ が $x_\lambda \in X$ に $\lambda \in \Lambda$ に関して一様に K -収束

するとは, $\|x_{\lambda n} - P_n x_\lambda\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ が $\lambda \in \Lambda$ に関して一様なことをいう。列 $\{A_n \in L(X_n)\}$ が $A \in L(X)$ に K -収束する ($A_n \xrightarrow{K} A$) とは, 任意の $x \in X$ に対して, $A_n P_n x \xrightarrow{K} A x$ となることをいう。列 $\{A_{\lambda n} \in L(X_n)\}_{\lambda \in \Lambda}$ が $A_\lambda \in L(X)$ に一様に K -収束するとは, 任意の $x \in X$ に関して $\{A_{\lambda n} P_n x\}$ が $A_\lambda x$ に $\lambda \in \Lambda$ に関して一様に K -収束することをいう。

さて, X における閉作用素 A から生成される連続半群 $T(t)$ を固定する。連続半群の列 (又は, 離散半群の列) $\{T_n(t) \in L(X_n)\}$ が与えられており, その生成作用素を A_n とする。離散半群の列を考えるときは, $T_n(t)$ の時間単位を τ_n とすると,

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = 0$$

がなりたっているとする。次の三条件を考えよう。

(A) (適合性) ある $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して, $(\lambda - A_n)^{-1} \in L(X_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) と $(\lambda - A)^{-1} \in L(X)$ が存在して,

$$(\lambda - A_n)^{-1} \xrightarrow{K} (\lambda - A)^{-1}.$$

(B) (有界性) $\sup_{n, 0 \leq t \leq 1} \|T_n(t)\| < \infty$.

(C) (収束性) 任意の $T < \infty$ に対して $t \in [0, T]$ につき
一様に

$$T_n(t) \xrightarrow{K} T(t).$$

定理 1. (A-B-C 定理, [2]) 条件 (A) と (B) が同時に成り立つこと、条件 (C) が成り立つことは同値である。

2. 抽象放物型方程式の近似解の収束性

ヒルベルト空間 X で稠密に定義され、ヒルベルト空間 Y の中への閉線形作用素 T で、ある $\delta > 0$ に対して

$$(5) \quad \|Tu\|_Y \geq \delta \|u\|_X \quad \text{for } \forall u \in D(T)$$

となるものを固定して考える。便宜上、 X を X^0 と書き、 $D(T)$ に、 $(u, v)_1 = (Tu, Tv)_Y$ で内積をいれてできるヒルベルト空間を X^1 と書く。 $A = T^*T$ は X における正定値 ($\geq \delta^2$) 自己共役作用素である。したがって、その平方根 $A^{1/2} \geq \delta$ が存在して

$$D(A^{1/2}) = D(T), \quad \|A^{1/2}u\|_X = \|Tu\|_Y$$

をみたす。作用素 B は、 $D(B) \supset D(T)$ をみたす X における閉作用素とする。このことは、ある定数 β が存在して、

$$(6) \quad \|Bu\| \leq \beta \|A^{1/2}u\| \quad \text{for } \forall u \in D(T)$$

を意味する。

次の発展方程式を考えよう。

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} u + Au + Bu = 0, & t > 0 \\ u(0) = u_0 \in X. \end{cases}$$

定義域を, $D(T)$ とする二次形式

$$(7) \quad C(u, v) = -(Tu, Tv) - (Bu, v)$$

は, 閉じた角形式 ([1] 参照) であるから, $C = -A - B$,

$D(C) = D(A)$ によって定まる作用素 C は, 解析的半群 $T(t)$ を生成する。さらに, ある実数 ω に対して

$$(8) \quad \|T(t)\| \leq e^{t\omega} \quad \text{for } t \geq 0$$

と評価されることもわかる。(E) の (広義の) 解 $u(t)$ は, $u(t) = T_t u_0$ と書ける。

仮定 任意の $n > 0$ に対して $D(T)$ に含まれる X の閉部分空間 X_n があって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n^i u - u\|_{X^i} = 0 \quad \text{for } u \in X^i$$

となる。ここで P_n^i は, X^i から X_n への直交射影である ($i=0,1$)。

空間 X_n に X から導びかれたヒルベルト構造を入れて考えると, 近似作用素を, $P_n = P_n^0$ として

$$(9) \quad X_n \xrightarrow{K} X$$

である。作用素 T の X_n の上への制限を T_n と書くと,

$T_n \in L(X_n, Y)$ であり, その共役作用素を T_n^* とし,

$A_n = T_n^* T_n$ とおく。すなわち,

$$(10) \quad (A_n u, v)_X = (T_n u, T_n v)_Y \quad \text{for } u, v \in X_n$$

によって, X_n での有界自己共役作用素 A_n が定められる。

$$(11) \quad \alpha_n = \|A_n\| < \infty$$

とおこう。 A_n のスペクトルは、区間 $[\delta^2, \alpha_n]$ の外には存在しない。作用素 B の近似作用素を、 $B_n = P_n B$ とする。すなわち、

$$(12) \quad (B_n u, v)_X = (Bu, v)_X \quad \text{for } u, v \in X_n$$

によって、 X_n 上の有界作用素 B_n を定める。(6) より

$$(13) \quad \|B_n u\| \leq \beta \|A_n^{1/2} u\| \quad \text{for } u \in X_n$$

である。

まず、次の方程式で記述される半離散近似を考察しよう。

$$(E_n) \begin{cases} \frac{d}{dt} u_n + A_n u_n + B_n u_n = 0, & t > 0 \\ u_n(0) = u_{n0} \in X_n \end{cases}$$

空間 X_n において、 $C_n = -A_n - B_n$ の生成する半群 $T_n(t) (= e^{tC_n})$ が、

$$(14) \quad \|T_n(t)\| \leq e^{t\omega} \quad \text{for } t \geq 0$$

をみたすと仮定してよいのは、(8) が成立するのと同じ理由である。評価 (13) によって、 ω は n に依存しないでとれるから、列 $\{T_n(t)\}$ は、条件 (B) をみたしている。

次に列 $\{C_n\}$ と C が、条件 (A) をみたしていることを調べる。

始めに、 $B=0$ の場合を考えよう。

補題 1. 仮定のもとで $\forall u \in X$ に対して

$$A_n u_n = P_n f, \quad Au = f$$

をみたす $u_n \in X_n$ と $u \in X$ は、一意的存在して

$$\|u_n - u\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty),$$

$$\|T(u_n - u)\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

証明 u_n, u の一意存在は (5) が保証する.

$$(15) \quad A_n u_n = P_n^0 f \iff u_n = P_n' u$$

なる関係に注目すると、仮定より

$$\|u_n - u\| \leq \delta^{-1} \|T(u_n - u)\| = \|u_n - u\|_1 \longrightarrow 0.$$

補題 1 から、 $A_n^{-1} \xrightarrow{K} A^{-1}$ が直ちに得られ、 $A-B-C$ 定理により

$$e^{-tA_n} \xrightarrow{K} e^{-tA}$$

が、 $t \in [0, T]$ で一様になりたつ。 $\|e^{-tA_n}\| \leq 1$ であるから、逆に

$$(16) \quad (\lambda + A_n)^{-1} \xrightarrow{K} (\lambda + A)^{-1} \quad \text{for } \forall \lambda \geq 0$$

が成立つことはすぐにあかる。

次に、 $B \neq 0$ の場合に進む。まず、

$$(17) \quad B_n (\lambda + A_n)^{-1} \xrightarrow{K} B (\lambda + A)^{-1} \quad \text{for } \forall \lambda \geq 0$$

である。実際

$$\begin{aligned} & \|B_n (\lambda + A_n)^{-1} P_n f - P_n B (\lambda + A)^{-1} f\| \\ &= \|P_n B \{(\lambda + A_n)^{-1} P_n f - (\lambda + A)^{-1} f\}\| \\ &\leq \beta \|T \{(\lambda + A_n)^{-1} P_n f - (\lambda + A)^{-1} f\}\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta \| T \{ A_n^{-1} (1 - \lambda(\lambda + A_n)^{-1}) P_n f \\
&\quad - A^{-1} (1 - \lambda(\lambda + A)^{-1}) f \} \| \\
&\leq \beta \| T \{ A_n^{-1} P_n f - A^{-1} f \} \| \\
&\quad + \lambda \beta \| T \{ A_n^{-1} [(\lambda + A_n)^{-1} P_n f - P_n (\lambda + A)^{-1} f] \} \| \\
&\quad + \lambda \beta \| T \{ A_n^{-1} P_n (\lambda + A)^{-1} f - A^{-1} (\lambda + A)^{-1} f \} \|
\end{aligned}$$

である。第一項において $u = A^{-1} f$ とすると、 $A_n^{-1} P_n f = u_n = P_n' u$ 。したがって、補題1によって、第一項 $\rightarrow 0$ 。

同様に、 $u = A^{-1} (\lambda + A)^{-1} f$ とおくと、第三項 $\rightarrow 0$ がわかる。

(16) より

$$\begin{aligned}
\text{第二項} &= \lambda \beta \| A_n^{1/2} A_n^{-1} [(\lambda + A_n)^{-1} P_n f - P_n (\lambda + A)^{-1} f] \| \\
&\leq \frac{\lambda \beta}{\delta} \| (\lambda + A_n)^{-1} P_n f - P_n (\lambda + A)^{-1} f \| \\
&\rightarrow 0.
\end{aligned}$$

これらから、(17) かなりたつことがわかった。次に、 n によらず一様に、 $\lambda \rightarrow +\infty$ のとき

$$(18) \quad \| B_n (\lambda + A_n)^{-1} \| \rightarrow 0$$

であることに注意する。実際

$$\begin{aligned}
\| B_n (\lambda + A_n)^{-1} \| &\leq \beta \| A_n^{1/2} (\lambda + A_n)^{-1} \| \\
&\leq \beta \sup_{\mu \geq \delta} \frac{\mu^{1/2}}{\lambda + \mu} \leq \frac{\beta}{2\lambda^{1/2}} \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

レゾルベントの展開式：

$$(\lambda - C_n)^{-1} = (\lambda + A_n + B_n)^{-1}$$

$$= \sum_{n=0}^N (-1)^n (\lambda + A_n) \{B_n (\lambda + A_n)^{-1}\}^n + \sum_{n \geq N+1} "$$

と (17), (18) に注意すれば、十分大きな全ての λ に対して

$$(19) \quad (\lambda - C_n)^{-1} \xrightarrow{K} (\lambda - C)^{-1}$$

であることがわかる。

次に、離散近似を考察する。陰公式

$$u_n(t + \tau_n) = (1 - \tau_n A_n - \tau_n B_n)^{-1} u_n(t)$$

は、 $\lim_{n \rightarrow 0} \tau_n = 0$ なる限り、常に収束することは、半群の

近似の一般論からしたかう ([2] 参照)。陽公式

$$(E_{\tau_n}^{\tau_n}) \begin{cases} u_n(t + \tau_n) = (1 - \tau_n A_n - \tau_n B_n) u_n(t), \\ \quad : t \tau_n \leq t < (t+1) \tau_n, \quad t = 0, 1, 2, \dots \\ u_n(t) = u_{0n} \in X_n, \\ \quad : 0 \leq t < \tau_n \end{cases}$$

の収束性に関しては次の結果を述べることができる。

定理 2. $\lim_{n \rightarrow 0} \tau_n = 0$ かつ

$$(20) \quad \sup_n \tau_n \alpha_n = \gamma < 2$$

とし、 $u_{0n} \longrightarrow u_0$ (in X) とする。このとき差分方程式 $(E_{\tau_n}^{\tau_n})$ の解 $u_n(t)$ は、方程式 (E) の広義解 $u(t)$ に、 $t \in [0, T]$ で一様に収束する。なお $B=0$ の場合は、 $\gamma=2$ でもよい。

証明. 時間単位を τ_n とする。 C_n から生成される離散半群 $T_n(t)$ に関して、条件 (A), (B) を確かめればよい。

条件 (A) は、すでに (19) で調べたから、条件 (20) の下で、 (E_{δ}^{τ}) の解の有界性がしめせればよい。以下しばらく添字 t を省略して計算する。

$$\begin{aligned}
 \|u(t+\tau)\|^2 &= \|(1-\tau A)u(t)\|^2 + \tau^2 \|Bu(t)\|^2 \\
 &\quad - 2\tau \operatorname{Re}(Bu(t), u(t)) + 2\tau^2 \operatorname{Re}(Bu(t), Au(t)) \\
 &\leq \|(1-\tau A)u(t)\|^2 + \tau^2 \beta^2 \|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 \\
 &\quad + 2\tau\beta \|A^{\frac{1}{2}}u(t)\| \|u(t)\| \\
 &\quad + 2\tau\beta\gamma \|A^{\frac{1}{2}}u(t)\| \|u(t)\| \\
 &\leq \|(1-\tau A)u(t)\|^2 + \tau\beta^2\gamma \|u(t)\|^2 \\
 &\quad + \tau\beta(1+\gamma) (\varepsilon \|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + \varepsilon^{-1} \|u(t)\|^2) \\
 &= \int_{\delta}^{\alpha} \left\{ (1-\tau\lambda)^2 + \varepsilon \cdot \beta(1+\gamma) \cdot \tau\lambda \right\} d(E(\lambda)u(t), u(t)) \\
 &\quad + \tau(\beta^2\gamma + \frac{\beta(1+\gamma)}{\varepsilon}) \|u(t)\|^2
 \end{aligned}$$

そこで、 A のスペクトル分解 $A = \int_{\delta}^{\alpha} \lambda dE(\lambda)$ を用いた。

さて、 $\eta \geq 0$ とし、 $f_{\eta}(x) = (1-x)^2 + \eta x$ が、 $0 \leq x \leq \gamma$ で $0 \leq f_{\eta} \leq 1$ をみたすための十分条件を考えることにより、次の主張を得る。

“ $\beta \neq 0$ のとき、 ε を十分小さくとれば、

$$0 < \tau\lambda \leq \gamma \quad (0 < \gamma < 2)$$

なる $\tau\lambda$ に対して

$$(1-\tau\lambda)^2 + \varepsilon\beta(1+\gamma)\tau\lambda \leq 1$$

となるようにできる。”

そのような、 ε を固定すると、(20)より、 $\tau\alpha \leq \delta$ であるから、適当な実数 $\omega = \omega_\varepsilon$ に対して

$$\|u(t+\tau)\|^2 \leq (1+2\tau\omega) \|u(t)\|^2$$

となる。これから

$$\|u(t)\|^2 \leq (1+2\tau\omega)^{[t/\tau]} \|u(0)\|^2$$

結局 n によらずに、

$$\|u_n(t)\| \leq e^{t\omega} \|u_n(0)\| \quad \text{for } \forall t \geq 0$$

が成立することになる。

$\beta=0$ のときは、 $0 \leq \tau\lambda \leq 2$ であれば、 $(1-\tau\lambda)^2 \leq 1$ であるから、

$$\|u_n(t)\| \leq \|u_n(0)\| \quad \text{for } \forall t \geq 0$$

が成立している。

3. 波動方程式型発展方程式の場合

空間 X^0, X^1 と、作用素 A は、2. で考えたものとする。
さらに、2. における仮定もなりたっているとしよう。次の二階の発展方程式を考える。

$$(E) \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} u + Au = 0, & t > 0 \\ u(0) = u^1, & \left(\frac{d}{dt} u\right)(0) = u^0, \quad u^i \in X^i \end{cases}$$

近似方程式は、

$$(E_n) \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} u_n + A_n u_n = 0, & t > 0 \\ u_n(0) = u_n^1, & \left(\frac{d}{dt} u_n\right)(0) = u_n^0, u_n^i \in X_n \end{cases}$$

である。さて

$$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} X^1 \\ X \\ X^0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{X}_n = \begin{pmatrix} X_n^1 \\ X_n \\ X_n^0 \end{pmatrix}, \quad P_n = \begin{pmatrix} P_n^1 & 0 \\ 0 & P_n^0 \end{pmatrix}$$

とおく。ただし、 X_n に X^i から導びかれるヒルベルト構造をいれたヒルベルト空間を、 X_n^i ($i=0,1$) と書いた。仮定より近似作用素を P_n として、

$$\mathfrak{X}_n \xrightarrow{K} \mathfrak{X}$$

となる。 (E) , (E_n) は、それぞれ $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_n$ における一階方程式:

$$(E) \quad \frac{d}{dt} u = \mathcal{O} u, \quad u(0) \in \mathfrak{X},$$

$$(E_n) \quad \frac{d}{dt} u_n = \mathcal{O}_n u_n, \quad u_n(0) \in \mathfrak{X}_n,$$

と同等である。ここで

$$u = \begin{pmatrix} u \\ \frac{d}{dt} u \end{pmatrix}, \quad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -A & 0 \end{pmatrix}, \quad D(\mathcal{O}) = \begin{pmatrix} D(A) \\ X \\ D(T) \end{pmatrix}$$

などである。作用素 $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_n$ は、それぞれ $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_n$ において、ユニタリ作用素の群を生成するから、 $e^{t\mathcal{O}}$ と、 $e^{t\mathcal{O}_n}$ に対して、条件 (B) が満たされている。補題 1 から

$$\mathcal{O}_n^{-1} \xrightarrow{K} \mathcal{O}^{-1}$$

となるから、 $A-B-C$ 定理より、 $t \in [-T, T]$ で一様に、

$$e^{t\alpha_n} \xrightarrow{K} e^{t\alpha}$$

となる。これを、 (E) と (E_n) に翻訳すれば、

$\|u_n^i - u^i\|_i \rightarrow 0 \quad (i=0, 1)$ ならば、 (E_n) の解 $u_n(t)$ は、 (E) の広義解 $u(t)$ に次の意味で収束することがわかる。

$$(2/1) \quad \begin{cases} \|u_n(t) - u(t)\|_1^2 + \left\| \frac{d}{dt} u_n(t) - \frac{d}{dt} u(t) \right\|_0^2 \\ \longrightarrow 0, \quad t \in [0, T] \text{ で一様。} \end{cases}$$

さて、 $(D_\tau u)(t) = \tau^{-1}(u(t+\tau) - u(t))$, $(D_{\bar{\tau}} u)(t) = (D_\tau u)(t - \tau)$, $D_\tau \bar{\tau} = D_\tau D_{\bar{\tau}}$ とおく。

定理3. $\tau_n \rightarrow 0$ かつ $\sup_n \tau_n \|T_n\| = \gamma < 2$ とし、 $\|u_n^i - u^i\|_i \rightarrow 0 \quad (i=0, 1)$ とする。このとき差分方程式:

$$D_{\tau_n \bar{\tau}_n} u_n(t) + A_n u_n(t) = 0$$

$$: k\tau_n \leq t \leq (k+1)\tau_n, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$u_n(t) = u_n^1, \quad D_{\bar{\tau}_n} u_n(t) = u_n^0, \quad u_n^i \in X_n$$

$$: 0 \leq t < \tau_n$$

の解 $u_n(t)$ は、方程式 (E) の広義解 $u(t)$ に $(*)$ の意味で収束する。ただし $\frac{d}{dt} u_n(t)$ は、 $(D_{\bar{\tau}_n} u_n)(t)$ におきかえる。

略証 $u_n = \begin{pmatrix} u_n \\ D_{\bar{\tau}_n} u_n \end{pmatrix}$ に対する差分方程式は、

$$u_n(t + \tau_n) = (1 + \tau_n \alpha_n + \tau_n^2 \beta_n) u_n(t), \quad \beta_n = \begin{pmatrix} -A_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。 $\tau_n \|T_n\| = O(1)$ のとき十分大きな λ に対しては、

$$\|(\lambda - \mathcal{O}_n - \tau_n B_n)^{-1} - (\lambda - \mathcal{O}_n)^{-1}\| = O(\tau_n)$$

となることか、 $\mathcal{O}_n$, B_n の消散性より得られる。

$e^{t\mathcal{O}_n} \xrightarrow{K} e^{t\mathcal{O}}$ より、 $(\lambda - \mathcal{O}_n - \tau_n B_n)^{-1} \xrightarrow{K} (\lambda - \mathcal{O})^{-1}$ を得る (条件 (A))。

$\tau_n \|T_n\| \leq \gamma < 2$ なることより

$$\|u_n(t)\| \leq \left(\frac{1+\gamma/2}{1-\gamma/2}\right)^{1/2} \|u_n(0)\| \quad \forall t \geq 0$$

が得られる (条件 (B))。離散半群に対する A-B-C 定理より定理 3 を得る。

具体的な方程式を扱うためには、さらに、擾動系

$$\frac{d^2}{dt^2} u + C \frac{du}{dt} + Au + Bu = 0$$

$$B \in L(X^1, X^0), \quad C \in L(X^0)$$

を考える必要がある。そのために必要な抽象論を述べておく。

今 1. の条件 (C) が成立っているとし、列 $\{B_n \in L(X_n)\}$ がある $B \in L(X)$ に対して、 $B_n \xrightarrow{K} B$ であるとする。

作用素 $A+B$ は連続半群 $S(t)$ を生成する。同様に作用素

$A_n + B_n$ は連続半群 ($T_n(t)$ が離散半群のときは、離散半群) $S_n(t)$ を生成する。(離散半群 $S_n(t)$ は、 $S_n(t) = (T_n(\tau_n) + \tau_n B_n)^{[t/\tau_n]}$ で与えられる。) このとき、

定理 4. $t \in [0, T]$ につき一様に、 $S_n(t) \xrightarrow{K} S(t)$.

4. lumped mass 型の近似

2. で論じた方程式 (E) で $B=0$ のときに話をかざる。

X_n の他に、 X の閉部分空間 $\bar{X}_n$ で次の三条件をみたすものを考えよう。

$$(L.1) \quad \exists J_n \in L(X_n, \bar{X}_n), \quad K_n \in L(\bar{X}_n, X_n)$$

$$K_n J_n = 1/X_n, \quad J_n K_n = 1/\bar{X}_n$$

$$(L.2) \quad \|J_n\|, \|K_n\| \leq N \quad (n \text{ によらない}).$$

$$(L.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|J_n^* J_n P_n^0 u - u\|_0 = 0 \quad \text{for } u \in X^0.$$

そこで、共役作用素 J_n^* は、 $u \in X_n$ と $v \in \bar{X}_n$ に対して

$$(J_n u, v)_X = (u, J_n^* v)_X$$

かなりたつように定めたものである。新たな近似方程式として、

$$(\tilde{E}_n) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} J_n^* J_n u_n(t) + A_n u_n(t) = 0 \\ u_n(0) = u_n \in X_n \end{cases}$$

又は、同じことであるが、 $\bar{u}_n(t) = J_n u_n(t)$ に対して

$$(\bar{E}_n) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \bar{u}_n(t) + \bar{A}_n \bar{u}_n(t) = 0 \\ \bar{u}_n(0) = \bar{u}_n \in \bar{X}_n \end{cases}$$

を考察することにする。そこで、 $\bar{A}_n = K_n^* A_n K_n \in L(\bar{X}_n)$ は、 $\bar{X}_n$ での正值自己共役作用素である。

さて、条件 $(L, 1) \sim (L, 3)$ の下では、近似作用素を、 $\bar{P}_n = J_n P_n^0$ として

$$\bar{X}_n \xrightarrow{K} X$$

であることがわかる。さらに

$$\bar{A}_n^{-1} \xrightarrow{K} A^{-1}$$

もしたがう $((A))$ 。一方、 $\|e^{t\bar{A}_n}\| \leq 1$ $((B))$ 。

したがって、 $A-B-C$ 定理により

$$e^{t\bar{A}_n} \xrightarrow{K} e^{tA}$$

が、 $t \in [0, T]$ で一様になりつつ、半離散近似に対する結果の定理 2 も、 $\alpha_n = \|\bar{A}_n\|$ と改めれば、そのまま成立する。又振動系に対する考察もできる。波動方程式型の場合も平行して論じることができる。なお、条件 $(L, 3)$ は、次の条件におきかえてもよい。

$$(L, 3)' \quad \|J_n u_n - u_n\|_0 \leq \varepsilon(n) \|u_n\|_1 \quad \text{for } u_n \in X_n$$

ここで $\varepsilon(n)$ は、 $n \rightarrow 0$ のとき $\varepsilon(n) \rightarrow 0$ となる。

5. 空間 1 次元の場合の例

$$(F) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \left(\frac{\partial}{\partial x} a(x) \frac{\partial}{\partial x} + b(x) \frac{\partial}{\partial x} + c(x) \right) u(t, x) \\ \quad : t > 0 \quad 0 < x < 1, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - \sigma_0 \right) u(t, 0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \sigma_1 \right) u(t, 1) = 0 \\ \quad : t > 0, \\ u(0, x) = u(x). \end{cases}$$

なる混合問題を考える。ここで、 $a(x) \in C^1([0, 1])$ は、正値で、 $b(x)$, $c(x)$ は、有界可測関数とし、 σ_0 , σ_1 は正数とする。

さて、 $X = L^2([0, 1])$, $Y_0 = L^2([0, 1], a(x) dx)$ (重みつき L^2 空間), Y_1 を、 $\mathbb{C}^2$ に内積 $\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \right) = a(0)\sigma_0 u_0 \bar{v}_0 + a(1)\sigma_1 u_1 \bar{v}_1$ を入れたものとし、

$Y = Y_0 \oplus Y_1 \oplus X$ (直和ヒルベルト空間) とする。次に、

$D(T) = H^1([0, 1])$ として、 $u \in D(T)$ に対して、

$$Tu = \left(\frac{d}{dx} u(x), \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \end{pmatrix}, u(x) \right)$$

とおくと

$$D(T^*) = \left\{ V = \left(v, \begin{pmatrix} \frac{v(0)}{\sigma_0} \\ \frac{v(1)}{\sigma_1} \end{pmatrix}, u \right) : v \in H^1, u \in L^2 \right\},$$

$$T^*V = -\frac{\partial}{\partial x} (a(x)v(x)) + u(x), \quad V \in D(T^*)$$

となる。 $A = T^*T$ は、 $-\frac{d}{dx} a(x) \frac{d}{dx} + 1$ に、境界条件

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sigma_0 \right) u(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \sigma_1 \right) u(1) = 0$$

を、考えた作用素の実現になっている。さらに、

$$Bu = -b(x) \frac{\partial}{\partial x} u(x) - (c(x) + 1) u(x)$$

とおけば、 (F) は 2. で扱った (E) の形になっている。

最も簡単な、折れ線近似を考えよう。

$$\lambda(x) = \begin{cases} |1-x| & : |x| \leq 1 \\ 0 & : |x| > 1 \end{cases}, \quad \bar{\lambda}(x) = \begin{cases} 1 & : |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & : |x| > \frac{1}{2} \end{cases},$$

に対して、 $h = 1/n$ として

$$\lambda_j^h(x) = \lambda\left(\frac{x-jh}{h}\right), \quad \bar{\lambda}_j^h(x) = \bar{\lambda}\left(\frac{x-jh}{h}\right)$$

とする。

$$X_h = \left\{ \sum_{j=0}^n \varphi_j^h \lambda_j^h \right\}, \quad \bar{X}_h = \left\{ \sum_{j=0}^n \varphi_j^h \bar{\lambda}_j^h \right\}$$

とおくと、 X_h は、仮定 をみたす。さらに

$$J_h : \sum_{j=0}^n \varphi_j^h \lambda_j^h \longleftrightarrow \sum_{j=0}^n \varphi_j^h \bar{\lambda}_j^h : K_h$$

と見なせば、条件 $(L, 1) \sim (L, 3)$ をみたす。

とも容易にわかる。ちなみに $a(x) \equiv 1$ のときは

$$\|T_h\| \leq 2\sqrt{3}/h + \sqrt{6 \max(\sigma_0, \sigma_1)}/h + 1$$

$$\|\bar{T}_h\| = \|T_h K_h\| \leq 2/h + \sqrt{2 \max(\sigma_0, \sigma_1)}/h + 1$$

となる。これから

$$\alpha_h = \|\bar{A}_h\| = \|\bar{T}_h\|^2 = 4/h^2 + O(1/h)$$

定理 2 によって、 $\alpha_h/h^2 < 1/2$ ならば、我々の A に対して考えた近似方程式 $(\bar{E}_h)$ の解の収束性がいえる。この場合 $(\bar{E}_h)$ は、次の方程式を、陽に差分近似したものである：

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) - u(t, x).$$

[1] Kato, T. Perturbation theory for linear operators,
(Springer, Berlin, 1966).

[2] Ushijima, T. Approximation theory for semi-groups of
linear operators and its application to approximation
of wave equations, (pre-print).