

log Hodge 構造と分類空間(臼井三平氏との共同研究)

加藤和也 (東京大学)

長い間 p -進世界でくらしてきた私は、 $\mathbb{C}$ 上の世界に来て Hodge 構造を考えようとする、
地面の上に出てきたもののように苦しかったのであるが、臼井さんと共同研究を
することができ、何とかやっております。

§1. Griffiths の夢

$\mathcal{H}_g$ を上半平面とし、 Γ を $SL(2, \mathbb{Z})$ の合同部分群とすると、 $\Gamma \backslash \mathcal{H}_g$ はモジュラー曲線
と呼ばれる重要なものになり、これを

$$(1) \quad \Gamma \backslash \mathcal{H}_g \subset \Gamma \backslash (\mathcal{H}_g \cup IP^1(\mathbb{Q})) = (\Gamma \backslash \mathcal{H}_g) \cup \{\text{有限個の cusp}\}$$

の形にコンパクト化することも重要なことである。

$\mathcal{H}_{g, g}$ ($g \geq 1$) を Siegel 上半空間 ($\mathcal{H}_g = \mathcal{H}_{g, 1}$ である) とし、 Γ を $Sp(g, \mathbb{Z})$ の
合同部分群とすると、 $\Gamma \backslash \mathcal{H}_{g, g}$ は重要なものになり、そのコンパクト化

$$(2) \quad \Gamma \backslash \mathcal{H}_{g, g} \subset \begin{array}{l} \text{佐武-Baily-Borel compact 化} \\ \subset \text{Mumford compact 化} \end{array}$$

も重要である。

この $\mathcal{H}_{g, g}$ はある特別な型の polarized Hodge 構造の分類空間である。

Griffiths は、一般に、fix された重み、Hodge number を持つ polarized
Hodge 構造の分類空間 D を定義した (§2 参照)。

重み = 1, Hodge number が: $h^{1,0} = h^{0,1} = g$, 他の $h^{p,q} = 0$
の場合

$$D = \mathcal{H}_{g, g}$$

である。

一般の D に対しても, $Sp(g, \mathbb{Z})$ にあたる群 $G_{\mathbb{R}}$, $Sp(g, \mathbb{Z})$ にあたる群 $G_{\mathbb{Z}} \subset G_{\mathbb{R}}$ が定義され, これらは D に作用している.

Griffiths の夢 ([G]) Γ を $G_{\mathbb{Z}}$ の合同部分群とすると, $\Gamma \backslash D$ に適切な無限遠点をつけくわえて

$$\Gamma \backslash D \subset (?)$$

の形に (1)(2) を一般化したい.

田井さんと私の方法は, この問題に

polarized Hodge 構造の分類空間

$\subset$ polarized log Hodge 構造の分類空間

という形に, 答えようとするものである. これは Mumford compact 化の理論を, polarized log Hodge 構造の考えで解釈しなおし, 一般化しようとするものである.

「polarized log Hodge 構造」とは, 「polarized Hodge 構造の退化したもの」に log structure の理論によって把握したものである.

log structure の理論 (§4 参照) は, 退化をあたかうための理論であって, 退化して悪臭くなっているように見える対象に, log structure をふりかけると, その対象が本来持っているはずの美点があらわれるというものである.

最近外国での研究集会で, 美女と野獣 (Beauty and Beast) の話において野獣が少女の愛を受けて本来の王子の姿にもどったことと, log structure を比較して, 黒板に

ugly object	$\xrightarrow{\text{log structure}}$	nice object
Beast	$\xrightarrow{\text{love of girl}}$	prince

と並べて書いた所, 斎藤義久氏から, こゝに

love of girl

というふしぎな一致があらわれているという指摘もあり、私も、
聴いていた人も、ふしぎさに驚いたことがあった。

polarized log Hodge 構造を、「退化したもの」と呼びはしたが、
それは「不完全なもの」「いいかげんなもの」ではなく、log structure の
眼で見て愛をそそげば、polarized log Hodge 構造が無限遠へ
まわって退化している様子は、むしろ無限遠へ向かわないふつうの
polarized Hodge 構造よりも、「苦勞人の良さのような味わい深さを持ち、
より多くの差点を示すもののように思われる。

無限遠について考えるには、遠くほど大きく見える眼を持たなければならぬようである。

以下、§2 で Griffiths の分類空間 D を復習し、§3 で Griffiths の
夢に出てくる空間(?)の作り方について述べ、§4 でその空間と
polarized log Hodge 構造の関係について述べる。

§2 Griffiths の分類空間 D

Griffiths の分類空間 D の定義を紹介する

次のものを fix する。

w — 重みと呼ばれる整数

$h^{p,q}$ — Hodge number と呼ばれる整数の族 (p, q は整数を走る)

H_0 — lattice と呼ばれる有限生成自由 $\mathbb{Z}$ 加群

$\langle, \rangle_0$ — $\mathbb{Q}$ 双線型形式 $H_{0,\mathbb{Q}} \times H_{0,\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}$

($\because H_{0,\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes H_0$.)

そしてこれは次の条件をみたすものと仮定する

$$(i) \quad h^{p,q} = h^{q,p} \quad \forall p, q$$

$$(ii) \quad p+q = w \Rightarrow h^{p,q} = 0.$$

$$(iii) \quad \text{rank}_{\mathbb{Z}}(H_0) = \sum_{p,q} h^{p,q}$$

(iv) $\langle, \rangle$ は非退化で, w が偶数なら対称形式, 奇数なら交代形式.

Griffiths の分類空間 D は

$D = \{F : F = (F^p)_{p \in \mathbb{Z}} \text{ は } H_{0,\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes H_0 \text{ に } \lambda \text{ 降 filtration で}$

$$\dim_{\mathbb{C}}(F^p) = \sum_{r \geq p} h^{r, w-r} \quad \forall p \in \mathbb{Z} \quad \dots\dots (a)$$

をみたし,かつ $(H_0, \langle, \rangle_0, F)$ が重み w の polarized Hodge 構造となるもの}

と定義される. (重み w の polarized Hodge 構造になる) とは, 次の (i)(u) をみたすこと:

$$p+q > w \Rightarrow \langle F^p, F^q \rangle_0 = 0 \quad \dots\dots (i)$$

$$\left. \begin{aligned} H^{p,q} &= F^p \cap \overline{F^q} \text{ とおくと, } H_{0,\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=w} H^{p,q} \text{ となり,} \\ \text{もし } p+q=w, x \in H^{p,q}, x \neq 0 \text{ なら, } i^{p-q} \langle x, \bar{x} \rangle_0 &> 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (u)$$

一方

$\check{D} = \{F : F = (F^p)_{p \in \mathbb{Z}} \text{ は } H_{0,\mathbb{C}} \text{ に } \lambda \text{ 降 filtration で}$

上の (a)(i) をみたす ((u) はみたさなくてよい) もの}

とおく. $D, \check{D}$ は複素解析多様体で $D \subset_{\text{open}} \check{D}$ となる

例 (この例を上半平面 case と呼ぶ...) $w=1$, $h^{1,0} = h^{0,1} = 1$, 他の $h^{p,q} = 0$.

$H_0 = \mathbb{Z}^2$ (base e_1, e_2), $\langle, \rangle$ は交代形式で $\langle e_2, e_1 \rangle = 1$

とする. このとき

$$D = \mathcal{H}_g, \subset \check{D} = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$$

となる. $\tau \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ に対応する $\check{D}$ の元 F_{τ} は次のように与えられる.

$$p \leq 0 \text{ なら } F_{\tau}^p = H_{0,\mathbb{C}}$$

$$p \geq 2 \text{ なら } F_{\tau}^p = \{0\}$$

$$F_{\tau}^1 \text{ は, } \tau \in \mathbb{C} \text{ なら } \mathbb{C}(\tau e_1 + e_2), \tau = \infty \text{ なら } \mathbb{C}e_1.$$

例 (Siegel 上半空間 case と呼ぶ...) 上の例の一般化である,

$w=1$, $h^{1,0} = h^{0,1} = g$, 他の $h^{p,q} = 0$ の場合には, $D = \mathcal{H}_g$ となる.

§3 空間(?) の作り方

Mumford の夢に出てくる空間(?) を作る 私どもの方法は, 次のとおりである. この §3 では polarized log Hodge 構造の概念には関係なしにこの空間をつくり, §4 で polarized log Hodge 構造と関係つける.

$(w, (h^{p,q})_{p,q}, H_0, \langle, \rangle_0)$ を §2 のとおりとし, 固定する

さらに $\text{fan } \Sigma$ (定義 3.2) というものを固定するとき,

$$D_{\Sigma} \supset D$$

となる空間 D_{Σ} が与えられる (定義 3.3), それから

$$(?) = \Gamma \backslash D_{\Sigma} \supset \Gamma \backslash D$$

が得られるのである (Γ についてはあとで説明).

Siegel 上半空間 case の, Mumford compact 化, もこのようにして得られるものになっている

ただ 田井さんと私の方法の, いまだ不十分な所は,

「十分大きな fan を見つける方法を まだ得ていない」

ということである. fan Σ , Σ' について

$$\Sigma \subset \Sigma' \Rightarrow D_\Sigma \subset D_{\Sigma'}$$

であり, Siegel 上半空間 case の場合には 十分大きい Σ をとらないと, できた空間 $\Gamma \backslash D_\Sigma$ は コンパクトにならない. Siegel 上半空間 case の場合には Mumford らによって十分大きい Σ を作る方法が見出されており, 十分大きい Σ についての $\Gamma \backslash D_\Sigma$ が Mumford compact 化になるのである.

一般の場合には Σ をどんなに大きくとっても $\Gamma \backslash D_\Sigma$ が compact になりえないこともある. (Σ をどんなに大きくとっても $D_\Sigma = D$ としかなりえないことすらある. 「 $w \geq 2$, $h^{w,0} = h^{0,w} = 1$, 他の $h^{p,q} = 0$ の場合かろう」).

しかしそれでも, 「十分大きい fan という概念を定義することはできるのである (説明略) が, この十分大きい fan を一般に作る方法を まだ得ていないのである.

いろいろ定義を並べてのちに D_Σ を定義する.

$$\mathcal{G}_{\mathbb{Q}} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Q}\text{-線型写像 } h: H_{0,\mathbb{Q}} \rightarrow H_{0,\mathbb{Q}} \text{ で} \\ \langle h x, y \rangle + \langle x, h y \rangle = 0 \quad \forall x, y \in H_{0,\mathbb{Q}} \\ \text{をみたすものの全体} \end{array} \right\}$$

と置く.

定義 3.1 nilpotent cone とは, $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ の部分集合 σ で: 次の

(i) - (iv) をみたすもののことである.

(i) $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ の有限個の元 $N_1, \dots, N_n$ があって

$$\sigma = \sum_{j=1}^n \mathbb{Q}_{\geq 0} N_j \quad (= \{ \sum_{j=1}^n y_j N_j ; y_j \in \mathbb{Q}, y_j \geq 0 \})$$

と書ける。

(ii) $N \in \sigma \Rightarrow N$ は巾零

(iii) $N, N' \in \sigma \Rightarrow NN' = N'N$.

(iv) $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$.

この σ は、無限遠へ近くなって退化してゆくものの、その無限遠の方向をあらわす役目をする。

定義 3.2 fan とは、 $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ の nilpotent cone からなる空でない集合 Σ で、

次の (i) (ii) をみたすもの。

(i) $\sigma \in \Sigma$ で σ' が σ の face なら、 $\sigma' \in \Sigma$.

(ii) $\sigma, \sigma' \in \Sigma \Rightarrow \sigma \cap \sigma'$ は σ の face.

ここで σ の face とは「 σ のへり」という感じのもので、たとえば

$\sigma = \mathbb{Q}_{\geq 0} N_1 + \mathbb{Q}_{\geq 0} N_2$, N_1 と N_2 が $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立のとき、 σ のへりとは

σ 自身, $\mathbb{Q}_{\geq 0} N_1$, $\mathbb{Q}_{\geq 0} N_2$, $\{0\}$

の 4 つである。一般には σ の face とは、 σ の部分集合 σ' で、

「 $x, y \in \sigma$ に対し「 $x+y \in \sigma'$ 」と「 $x \in \sigma'$ かつ $y \in \sigma'$ 」は同値」

「 $x \in \sigma'$, $a \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \Rightarrow ax \in \sigma'$ 」

「 $0 \in \sigma'$ 」

をみたすものである。

定義 3.3 Σ を fan とするとき

$$D_{\Sigma} = \{(\sigma, Z) ; Z \text{ は } \sigma\text{-nilpotent orbit}\}$$

と定義する. ここで σ -nilpotent orbit とは, $\check{D}$ の部分集合 Z で次の

(i) - (iii) を満たすもののことである.

$$(i) \quad F \in Z \Rightarrow Z = \exp(\sigma_{\mathbb{C}})F$$

ここに $\sigma_{\mathbb{C}}$ は σ が生成する $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ 内の $\mathbb{C}$ 部分線型空間で $\exp(\sigma_{\mathbb{C}})F$ は $F \in \exp(\sigma_{\mathbb{C}})$ の元で示してできる orbit をあらわす

$$(ii) \quad F \in Z, N \in \sigma \Rightarrow N(F^p) \subset F^{p-1} \quad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

$$(iii) \quad \sigma = \mathbb{Q}_{\geq 0} N_1 + \cdots + \mathbb{Q}_{\geq 0} N_n \text{ となる } N_1, \dots, N_n \text{ をとり, } F \in Z$$

とすると,

$$z_j \in \mathbb{C}, z_j \text{ の虚部 } \gg 0 \quad (1 \leq j \leq n) \Rightarrow \exp\left(\sum_{j=1}^n z_j N_j\right) F \in D$$

例 3.4 $\Xi = \{\mathbb{Q}_{\geq 0} N; N \in \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}, N \text{ は中零}\}$

とみると Ξ は fan であり, したがって D_{Ξ} が定義される

「十分大きい fan」という概念は定義を略するが, この Ξ が十分大きい fan である場合も多々あり, 上半平面 case では Ξ は十分大きく

$$D_{\Xi} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$$

となり, 欲する無限遠点が完全に得られる.

Siegel 上半空間 case で $g \geq 2$ の場合には, Ξ は十分大きくはない.

なお, 上半平面 case で, $\infty \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ に対応する D_{Ξ} の元 (σ, Z) は,

$$\sigma = \mathbb{Q}_{\geq 0} N, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \check{D}$$

で与えられる. $z \in \mathbb{C}, \tau \in \mathbb{C}$ に對し $\exp(zN)F_{\tau} = F_{\tau+z}$ であり,

σ -nilpotent orbit の条件 (iii) は, 「 $\tau \in \mathbb{C}$ とすると,

$$z \in \mathbb{C}, z \text{ の虚部 } \gg 0 \Rightarrow \tau + z \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$$

ということであるから, みたされる.

次に商 $\Gamma \backslash D_{\Sigma}$ を作るための準備をする。

$$G_{\mathbb{Z}} = \{ \gamma : H_0 \xrightarrow{\sim} H_0 ; \mathbb{Z} \text{ 加群の同型,} \\ \langle \gamma x, \gamma y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in H_0 \}$$

とおく。 Γ を $G_{\mathbb{Z}}$ の部分群とする。

定義 3.5 Γ と $G_{\mathbb{Z}}$ の部分群 Γ が, compatible であるとは, 次の (i) (ii) が成立することである。

$$(i) \quad \gamma \in \Gamma, \sigma \in \Sigma \Rightarrow \gamma \sigma \gamma^{-1} \in \Sigma.$$

$$(ii) \quad \Gamma(\sigma) = \{ \gamma \in \Gamma ; \gamma \text{ は unipotent, } \log(\gamma) \in \sigma \}$$

とあくと, 各 $\sigma \in \Sigma$ について $\sigma = \mathbb{Q}_{\geq 0} \log(\Gamma(\sigma))$.

例 3.6 Σ (例 3.4) は, $G_{\mathbb{Z}}$ のすべての指数有限部分群と compatible である。しかし, たとえば Σ と単位群 $\{1\}$ は, (i) は成立するが (ii) が成立しないので, compatible ではない。

Σ と Γ が compatible なら, Γ は D_{Σ} に,

$$\Gamma \ni \gamma : (\sigma, Z) \mapsto (\gamma \sigma \gamma^{-1}, \gamma Z)$$

によって作用する (定義 3.5 の条件 (i) による)。したがって商空間 $\Gamma \backslash D_{\Sigma}$ をつくることができる。この $\Gamma \backslash D_{\Sigma}$ に, $\Gamma \backslash D$ 上の複素正則関数の層を延長し, さらに log structure も付すことができるのである (ここで, 定義 3.5 の条件 (ii) が使われる; たとえば上半平面 case において Σ と単位群 $\{1\}$ は条件 (ii) をみたさないが, D_{Σ} を $\{1\}$ で代った空間 $\mathcal{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ には, $\mathcal{H}$ 上の正則関数の層は, まともな形には, 延長できない) しかしこの層の定義, log structure の定義は, あまりに長い説明になるので省略する。

§4 polarized log Hodge 構造

結論は、§3 でつくった空間 $\Gamma \backslash D_{\Sigma}$ が、polarized log Hodge structure の分類空間 (moduli space) だということである

以下、

§4.1 fs log analytic space

§4.2 polarized log Hodge 構造

§4.3 classifying space (上述の「結論」)

の順に述べていく

§4.1 fs log analytic space

X を ringed space とするとき、 X 上の log structure とは、 X 上の可換半群の層 M で、準同型 $\alpha: M \rightarrow \mathcal{O}_X$ が付されたものであり、 $\alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^{\times}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X^{\times}$ (α による) が成立するもののことである。ここで $\mathcal{O}_X$ は乗法について可換半群の層とみなす。(半群といえは単位元 1 を持ち、準同型といえは "1 を 1 にうつすものとする")

log analytic space とは、 $\mathbb{C}$ 上の analytic space で、log structure を付されたものである

fs log analytic space とは、log analytic space のうち、その log structure が下の定義 4.2 の意味で "fs" であることをいう

定義 4.1 可換半群 P が fs であるとは、次の (i) - (iii) をみたすこと。

(i) P は有限生成

(ii) $ae = ac \Rightarrow e = c$ が成立する。

(iii) により $P \hookrightarrow$ 群 $P^{gp} = \{ae^{-1}; a, e \in P\}$)

(iii) $a \in P^{\text{gp}}, a^n \in P \exists n \geq 1 \Rightarrow a \in P$.

定義 4.2. ringed space X 上の log structure M を fs であるとは,
 X 上 local に, 可換半群 P を fs であるものと準同型 $\beta: P \rightarrow \mathcal{O}_X$
 $(P$ は $\mathbb{N}$ で X 上の定数層と見ている) があって, M は可換半群の層
 の $\varprojlim$ にあたる

$$\begin{array}{ccc} \beta^{-1}(\mathcal{O}_X^\times) & \hookrightarrow & \text{定数層 } P \\ \downarrow & & \\ \mathcal{O}_X^\times & & \end{array}$$

の push out になっており, α は, β と包含写像 $\mathcal{O}_X^\times \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ から導かれるもの
 になっていることである

例 4.3 X を smooth (つまり特異点のない) analytic space とし,

Y を X 上の normal crossing をもつ divisor とし,

$$M = \{f \in \mathcal{O}_X; f \text{ は } Y \text{ の外で可逆}\}$$

とし, $\alpha: M \rightarrow \mathcal{O}_X$ を包含写像とする この M を付した X は,

fs log analytic space である.

§ 4.2 polarized log Hodge 構造

X を fs log analytic space とする. (その log structure を M_X と書く)

X 上の polarized log Hodge 構造, というものを導入する.

そのため, まず X^{log} という位相空間を導入する

$$X^{\text{log}} = \{(x, h); x \in X,$$

h は準同型 $M_{X,x} \rightarrow S^1 = \{z \in \mathbb{C}^\times; |z|=1\}$ で

$$h(u) = \frac{u(x)}{|u(x)|} \quad \forall u \in \mathcal{O}_{X,x}^* \text{ をみたすもの}\}$$

$X^{\log}$ の位相の入れ方については省略する ([加中] 参照). $X^{\log}$ はこの [加中] で定義された方法で今書いているが, [川並] においても独立に別の方法で定義された.

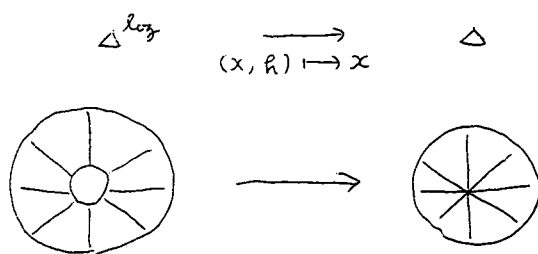
例 4.4 $X = \Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ とおく.

そして $\{0\}$ を Δ の normal crossing な divisor と見て, 例 4.3 のように

$\log$ structure を入れる. (M_Δ と記す)

$$M_{\Delta, x} = \begin{cases} \mathcal{O}_{\Delta, x}^\times & x \in \Delta - \{0\} \text{ のとき} \\ \mathcal{O}_{\Delta, 0}^\times \times \{z^n : n \geq 0\} & x = 0 \text{ のとき} \\ & (z \text{ は座標関数}) \end{cases}$$

そして $\Delta^{\log}$ は次のようになる



すなわち, $x \in \Delta - \{0\}$ の逆像は 1 点. だが, $0 \in \Delta$ の逆像は

S^1 と同型になる. ($(0, h) \in \Delta^{\log}$ に $h(z) \in S^1$ を対応させる.)

例 4.5 $f: E \rightarrow \Delta$ を, Δ の原点において退化する, 楕円曲線の有名な family で,

$$q \in \Delta - \{0\} \text{ に対し, } f^{-1}(q) = \mathbb{C}^\times / q^\mathbb{Z}$$

となるものとする. $q \in \Delta$ に対し

$$f^{-1}(q) \cong \begin{cases} \text{torus} & q \neq 0 \text{ のとき} \\ \text{pinched torus} & q = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

となる.

Δ に例 4.4 のように log structure を入れ, E は, normal crossing divisor $f^{-1}(0)$ に対する log structure を入れる. このとき, 以下のことに,

$$f^{\log} : E^{\log} \rightarrow \Delta^{\log}$$

については

$$(f^{\log})^{-1}(y) \cong \text{torus} \quad \forall y \in \Delta^{\log}$$

となり, log の魔法によって退化が消えてくれるのである.

X を fs log analytic space とするとき, X 上の polarized log Hodge 構造とは, $X^{\log}$ 上の (X 上のではなく!!) local system である付加構造を付したものである.

たとえば例 4.5 において $R^1 f_* \mathbb{Z}$ は Δ の原点において次のように退化する: $q \in \Delta$ に対し

$$(R^1 f_* \mathbb{Z})_q = H^1(f^{-1}(q), \mathbb{Z}) = \begin{cases} H^1(\text{torus}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2 \\ H^1(\text{point}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \end{cases}$$

しかし $R^1(f^{\log})_* \mathbb{Z}$ は退化せず, $\Delta^{\log}$ 上の rank 2 の local system である. この $R^1(f^{\log})_* \mathbb{Z}$ に付加構造を付けたものが, E によって与えられる Δ 上の polarized log Hodge 構造になるのである.

この付加構造を定義するには, fs log analytic space X に対し, $X^{\log}$ 上の環の層 $\mathcal{O}_X^{\log}$ を定義する必要がある. $\tau: X^{\log} \rightarrow X$ を $(x, h) \mapsto x$ とする. $\mathcal{O}_X^{\log}$ は $\tau^{-1}(\mathcal{O}_X)$ -algebra であり,

$$\mathcal{O}_X^{\log} = \tau^{-1}(\mathcal{O}_X) [\log(\tau^{-1}(M_X^{gp}))]$$

と書かれたものである。(正確な定義は[加中]参照)

さて, polarized log Hodge 構造を定義する. ただし, $\Gamma \backslash D_\Sigma$ との関係を
つけやすくするため, ここでは, ある型 Φ を fix し, 「型 Φ の polarized
log Hodge 構造」の定義を述べ, 型なしの polarized log Hodge 構造や,
polarization なしの log Hodge 構造の定義は省く.

$(\omega, (h^{p,q})_{p,q}, H_0, \langle, \rangle_0)$ を §2 のとおりとして 固定し,
fan Σ と $G_\mathbb{Z}$ の部分群 Γ で, compatible であるものを固定する.

$$\Phi = (\omega, (h^{p,q})_{p,q}, H_0, \langle, \rangle_0, \Sigma, \Gamma)$$

と置く.

型 Φ の polarized log Hodge 構造とは, 4つ組

$$(H, \langle, \rangle, F, \iota)$$

で次をみたすものである.

H は, $X^{\log}$ 上の (X 上のではない!) $\mathbb{Z}$ 加群の層,

$\langle, \rangle$ は, $\mathbb{Q}$ 双線型写像 $H_\mathbb{Q} \times H_\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$

F は $\mathcal{O}_X^{\log} \otimes_\mathbb{Z} H$ に入る, $\mathcal{O}_X^{\log}$ -submodules による 降 filtration,

ι は $X^{\log}$ 上の層

$$\Gamma \backslash \text{Isom}((H, \langle, \rangle), (H_0, \langle, \rangle_0))$$

の global section (H_0 は $X^{\log}$ 上の定数層とみている)

であり, 次の (i) - (v) をみたすものである.

(i) 各 F^p ($p \in \mathbb{Z}$) は, local には, $\mathcal{O}_X^{\log} \otimes_\mathbb{Z} H$ の, $\mathcal{O}_X^{\log}$ -直和因子.

(ii) 各 F^p ($p \in \mathbb{Z}$) は, τ^* (局所有限生成自由 $\mathcal{O}_X$ 加群) と書ける.

(iii) 各 F^p ($p \in \mathbb{Z}$) の, $\mathcal{O}_X^{\log}$ 加群としての rank は $\sum_{r \geq p} h^{r, w-r}$.

(iv) $p+q > w \Rightarrow \langle F^p, F^q \rangle = 0$.

(v) (この条件(v)がややこしいけれども、要所である)

$y \in Y$ とし, $\tilde{\ell}_y : (H_y, \langle, \rangle_y) \xrightarrow{\cong} (H_0, \langle, \rangle_0)$ を, y における ℓ の代表とする. すると, ある $\sigma \in \Sigma$ があって, 次の (v-1), (v-2) が成立する. $x = \tau(y) \in X$ とおく.

(v-1) これは, $(H, \langle, \rangle)$ の x における local monodromy が σ の方向を向いている」という条件.

(v-2) これは, $(H, \langle, \rangle, F, \ell)$ が x において σ -nilpotent orbit を与える」という条件.

(v-1) の正確な形: 合成写像

$$\begin{aligned} \text{Hom}(M_{X,x}/\mathcal{O}_{X,x}^\times, -\mathbb{N}) &\subset \text{Hom}(M_{X,x}^{\text{gp}}/\mathcal{O}_{X,x}^\times, \mathbb{Z}) = \pi_1(\tau^{-1}(x)) \\ &\longrightarrow \text{Aut}(H_y, \langle, \rangle_y) \xrightarrow[\tilde{\ell}_y]{\cong} \text{Aut}(H_0, \langle, \rangle_0) \end{aligned}$$

の像は $\Gamma(\sigma)$ に含まれる.

(ここで用いた同-視 $\text{Hom}(M_{X,x}^{\text{gp}}/\mathcal{O}_{X,x}^\times, \mathbb{Z}) = \pi_1(\tau^{-1}(x))$ は「自然なもの」. 説明省略.)

(v-2) の正確な形: $s : \mathcal{O}_{X,y}^{\text{log}} \rightarrow \mathbb{C}$ (環準同型) を

$\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathbb{C}$; $f \mapsto f(x)$ の拡張とすると,

$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} H_y$ の filtration $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} F$ の $\tilde{\ell}_y$ による像 (これは $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} H_0$

の filtration) を $F(s) \in \check{D}$ と書けば;

$$\{F(s)\}_s$$

は ある σ -nilpotent orbit にぶくまれる.

§4.3 classifying space

定理 Γ は neat (下参照) であるとする. このとき, fs log analytic space X についての functor として,

$$\mathrm{Mor}(X, \Gamma \backslash D_{\Sigma}) \cong \{X \text{ 上の 型 } \Sigma \text{ の polarized log Hodge 構造} \} / \cong.$$

ここで Mor は log structure のついた $\mathbb{C}$ 上の ringed space の圏における morphism 全体の集合である.

この同型において, X 上の 型 Σ の polarized Hodge structure が与えられたとき, それに対応する $X \rightarrow \Gamma \backslash D_{\Sigma}$ は,

$$x \mapsto \text{条件 (v) にてくる } (\sigma, \sigma\text{-nilpotent orbit})$$

である.

注 $\Gamma \backslash D_{\Sigma}$ はこの定理によって次の意味で特徴づけられる.

fs log analytic space の圏を $\mathcal{A}$, log structure の付された $\mathbb{C}$ 上の ringed space の圏を $\mathcal{C}$ とし, $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{C}$ とする $\overline{\mathcal{A}}$ を,
 $\overline{\mathcal{A}} = \{B \in \mathcal{C} : \text{すべての } C \in \mathcal{C} \text{ に対し}$

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \cong \mathrm{Mor}_{\text{関手}}(\mathcal{h}_A^B, \mathcal{h}_A^C)\}$$

ニニニ

$$\mathcal{h}_A^B : \mathcal{A} \rightarrow \mathrm{Sets} ; A \mapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

$$\mathcal{h}_A^C : \mathcal{A} \rightarrow \mathrm{Sets} ; A \mapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

と定義する. すると, $\Gamma \backslash D_{\Sigma}$ は一般には $\mathcal{A}$ に属さないが,

$\overline{\mathcal{A}}$ に属することか示される.

$\overline{\mathcal{A}}$ の対象 B は「 $\mathcal{A}$ の対象から B へ, どんな morphism があるか」
 できる (つまり関手 $\mathcal{h}_A^B$ で決まる) から, $\Gamma \backslash D_{\Sigma}$ は上の定理によって特徴づけられるものになる.

§5 問題

大きな未解決問題は, §3 に述べた,

「十分大きい Σ を作り,

である. また

「period map の無限遠における様子を $\Gamma \backslash D_{\Sigma}$ を用いて研究する」

という問題も考えた.

文献

[G] Griffiths, P. A., Periods of integrals on algebraic manifolds:

Summary of main results and discussions of open problems,

Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970) 228-296.

[加中] Kato, K. and Nakayama, C., Log Betti cohomology,

log étale cohomology, and log de Rham cohomology of log schemes

over $\mathbb{C}$, to appear in Kodai J.

[川並] Katsunata, Y. and Namikawa, Y., Logarithmic deformations

of normal crossing varieties and smoothing of degenerate

Calabi-Yau varieties, Invent. Math. 118 (1994) 395-409.

本稿に述べたことは 山井三平氏の著論文 (Logarithmic Hodge structures and classifying spaces) にまとめつつあるが 未完成である, 次はその要約:

Kato, K. and Usui, S., Logarithmic Hodge structures and

classifying spaces (Summary), to appear in 「Hodge 理論, Log 幾何学,

選集」1998, 八丁岳, also submitted to Proceedings of The NATO

Advanced Studies Institute/CRM Summer School 1998: The Arithmetic and

Geometry of Algebraic Cycles, Banff, Canada.