

K3曲面の退化

大阪大学理学部 西 仁二

序. K3曲面の退化を、射影的とかケーラー的であることと仮定せずに、一般的に考察する。目標は、極小モデルのようなある種の“良い”モデルをみつけることであるが、射影的である場合とは違って、素性の“悪い”ものが、色々出てくる。しかし、例を多く構成していくうちに、素性の“悪い”ものにも規則があって、ある種の形に分類されることかわかる。こうして、モデルとなるべきものがある程度見えてきたので、その候補の形を述べたい。

§ 1. $\pi: X \rightarrow \Delta$ を、3次元複素多様体 X から、1次元円板 $\Delta = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < \varepsilon\}$ への、全射固有正則写像で、各ファイバーは、連結とする。さらに、 π は、 $\Delta^* = \Delta - \{0\}$ 上で、*smooth* であると仮定する。このような $\pi: X \rightarrow \Delta$ のことを、曲面の退化と呼ぶ、あるいは単に、退化と呼ぶことにする。

曲面の退化 $\pi': X' \rightarrow \Delta$ が、 $\pi: X \rightarrow \Delta$ の *modification* で

あると、双有理型写像 $X' \dashrightarrow X$ で、次の図式

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\varphi} & X \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi \\ & \Delta & \end{array}$$

と可換にし、さらに、制限 $\varphi: \pi^{-1}(\Delta^*) \rightarrow \pi^{-1}(\Delta^*)$ が双正則になるような φ が存在するときという。

退化 $\pi: X \rightarrow \Delta$ が、準安定であるとは、特異ファイバー X_0 ($\pi=0$ で定義される X の因子) が、被約で、単純正規交又な因子であるときという。Mumford の定理により、勝手な退化は、base change を行うことにより、準安定な modification をもつ。

ここでは、 K の曲面の退化 $\pi: X \rightarrow \Delta$ 、つまり、一般ファイバー $X_t = \pi^{-1}(t)$ ($t \neq 0$) が、 K の曲面であるような退化を、準安定のときに限って考察し、“良” modification をみつけることも目標にする。

§2. K の曲面の準安定退化について、ある種のケーラー性の仮定のもとでは、Kulikov らにより、詳しく研究されている。まず、これらの結果のいくつかを復習する。

定理 1 (Kulikov [1], Persson-Pinkham [4])。 $\pi: X \rightarrow \Delta$ を

$K3$ 曲面の準安定退化で、次の条件 (*) をみたすとする。

(*) X_0 の各既約成分は、ケーラー曲面である。

このとき、 $\pi: X \rightarrow \Delta$ には、modification $\pi': X' \rightarrow \Delta$ で、

(i) π' は準安定、

(ii) X' の標準束 $K_{X'}$ は自明、

となるものが存在する。

上のような $\pi': X' \rightarrow \Delta$ は、 $\pi: X \rightarrow \Delta$ の良い“モデル”であると考えられる。また、その特異ファイバー X_0 は次のように記述される。

定理 2 (Kulikov)。 $\pi: X \rightarrow \Delta$ を $K3$ 曲面の準安定退化で、 $K_X = \mathbb{1}$ とし、さらに、(*) を仮定する。このとき、 X_0 は次のいずれかである。

I. X_0 は $K3$ 曲面。

II. $X_0 = V_1 + \dots + V_N$ ($N \geq 2$) を既約分解とすると、 V_1 と V_N は、有理曲面で、 $V_2, \dots, V_{N-1}$ は、楕円線織面、また、2重曲線の楕円曲線で、双対グラフ $\pi(X_0)$ は、

$$\dot{V}_1 - \dot{V}_2 - \dots - \dot{V}_N$$

となる。

III. $X_0 = V_1 + \dots + V_N$ を既約分解とすると、 V_i はすべて

有理曲面で、また、2重曲線は、各成分 V_i 上で、rational cycle (つまり $\mathbb{P}^1$ の cycle) をつくっていて、それぞれ $\pi(X)$ は、2次元球面 S^2 の三角形分割にうつっている。

§3. このから、ケーラー性の条件はとらずして、一般的に、K3曲面の準安定退化を考察する。まず、Kulikov と Persson-Pinkham による定理1を拡張することから始める。

定理3. $\pi: X \rightarrow \Delta$ を K3曲面の準安定退化とする。このとき、 π の準安定な modification $\pi': X' \rightarrow \Delta$ で、次の1)すゝめがとれたようなものが存在する。

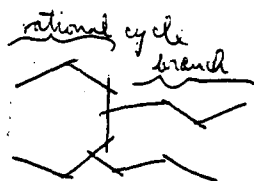
1) $K_{X'} = \mathbb{1}$

2) X'_0 は、ひとつの成分として、2重曲線がちょうど1本の積曲線であるようなホップ曲面を含む。

3) X'_0 は、ひとつの成分として、(CB)-曲面を含む。

さらに、(1), (2), (3) とは disjoint である。

ここで、(CB)-曲面とは、有限個の曲線しかもたない $\mathbb{P}^2$ 曲面で、(CB) を含むようなものをいう。また、(CB) とは、曲面上の因子で、rational cycle で、そこから曲線の枝(branch)が



のようになっているものを指す。

注意. 上の定理3の(1), (2), (3)のそれぞれの場合に、例が存在する。つまり、KulikovとPersson-Pinkhamによる定理1において、(*)の条件は不可欠である。

次に、定理3の(1)の場合で、(*)をみたさないものを分類する。

定理4. $\pi: X \rightarrow \Delta$ を、 $K3$ 曲面の準安定退化で、 $K_X = 1$ で、(*)の条件をみたさない(つまり、 X_0 内にケーラーでない曲面がある)とする。このとき、 X_0 は次のいずれかである。

Ⅱ'. (ホップ曲面を含む)

Ⅲ'. (双曲型井上曲面を含む)

Ⅱ'+Ⅲ'. (放物型井上曲面を含む)

ここでは、Ⅱ', Ⅲ', Ⅱ'+Ⅲ'の詳細な記述はしない。[2]を参照。

§ 4. 定理 2, 4 により, $K_X = 1$ のときは, 一般的に,
 $K3$ 曲面の準安定退化 $\pi: X \rightarrow \Delta$ について, 大体わかった。
 次に, 定理 3 における (2) (つまり, “同じホップ曲面”ともつ)
 と (3) (つまり, (CB)-曲面ともつ) の場合について考える。

まず, 以前から ([2] 参照) 知られていた例を, (2), (3) の
 それぞれの場合について述べる。

例 1 (H-I). H_α と次のようなホップ曲面とする:

$$H_\alpha = \mathbb{C}^2 - \{0\} / \langle g \rangle,$$

$$g: (z_1, z_2) \mapsto (\alpha z_1, \alpha z_2), \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad 0 < |\alpha| < 1.$$

このとき, H_α は, $\mathbb{P}^1$ 上の, 楕円曲線 $E = \mathbb{C}^* / \langle \alpha \rangle$ とファイバー
 とするファイバー束になり, $K_{H_\alpha} = -2E$ となる。

$$V_0 = H_\alpha,$$

V_1 : 楕円的 $K3$ 曲面で, E と一般ファイバーとを束ねるもの。

このとき,

準安定な $K3$ 曲面の退化 $\pi: X \rightarrow \Delta$ で,

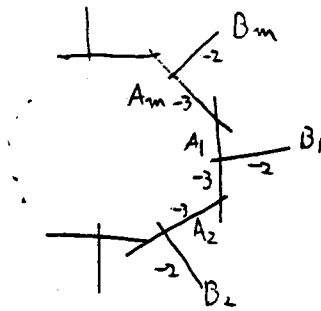
$$X_0 = V_0 \cup V_1$$

となるものが存在する。

($K_X = V_0$ と可成りである。)

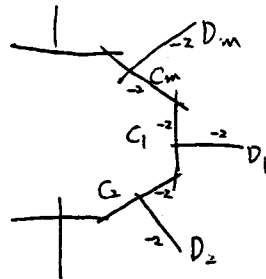
例 2 (CB-I). S と次のような曲線の配置をもつ (CB) 曲面

とある。



$$A_i, B_i \cong \mathbb{P}^1$$

また、 Z_I と次のような曲線の配置をもつ $K3$ 曲面とする。



$$C_i, D_i \cong \mathbb{P}^1$$

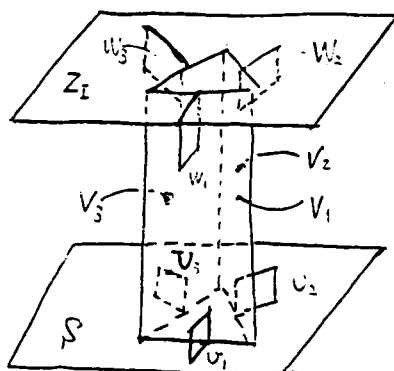
このとき、

$K3$ 曲面の準安定退化 $\pi: X \rightarrow \Delta$ で、

$$X_0 \supset S, Z_I$$

となるものが存在する。

このような退化の構成法であるが、まず、2次元の正規交叉の H をもつ多様体 X_0 、 S と Z_I を含み、特異ファイバーとなるようなものとみつりてきて、実際、 X_0 が変形に付、 $K3$ 曲面に smoothing できることを示す。 $m=3$ のときの 2次元正規交叉多様体 X_0 の記述の H をここで行う；(すなわち、以下にあるような曲線はすべて $\mathbb{P}^1$ である。)



ここで、 W_i, U_i は P^2 での以下の配置をもつ

$$W_i: \begin{array}{c|c} D_i & \\ \hline 1 & F_i \end{array}, \quad U_i: \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline B_i & E_i \end{array}$$

V_i は有理曲面で、次のような配置をもつ:

$$\begin{array}{c|c|c} -1 & C_i & \\ \hline -1 & -2 & F_i \\ \hline G_i & -2 & E_i \\ \hline 0 & A_i & \end{array} \quad (G_{i+1} = G_i).$$

($K_X = 2S + \sum U_i + \sum V_i + \sum W_i$ とする。)

注意. K_3 曲面のピカル数 ρ は、 $\rho \leq 2D$ より、 Z_I に対して、 $m \leq 10$ である。さらに、 $m \leq 9$ のときは、Nikulin の結果より、このような Z_I は存在することがわかる。

これまでに知られていた、定理3の(1), (2)の場合の例は、上の例1, 2のような形に、本質的にはなっていた。しかし、これは、実は、“十分に退化している”とは言えなく、もっと退化した(1), (2)の例が見つかった。それ以下に述べる。

$$V_i: \begin{array}{c|c|c} & C_i & \\ \hline A_{i-1} & \begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array} & B_{i-1} \\ \hline & C_{i-1} & \\ \hline \end{array} \quad (C_5 = C_2) ; K_{V_i} = -A_{i-1} - B_{i-1} - C_i - C_{i-1} \quad (i=2,3,4)$$

V_5 は、有理曲面で、次のふうな P^1 の配置をもつとする。

$$V_5: \begin{array}{c} B_1 \quad B_3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ -2 \quad -2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ B_2 \end{array} ; K_{V_5} = -B_1 - B_2 - B_3$$

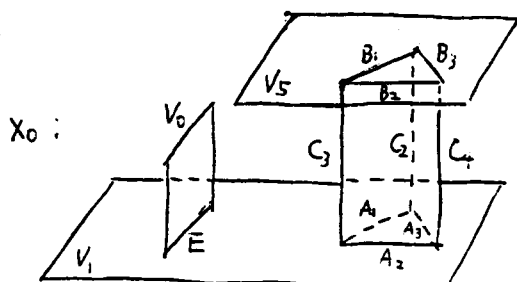
このとき、

K_3 曲面の準安定退化 $\pi: X \rightarrow \Delta$ で、

$$X_0 = V_0 + V_1 + \cdots + V_5$$

となるものが存在する。

($K_X = V_0$ となっている。)

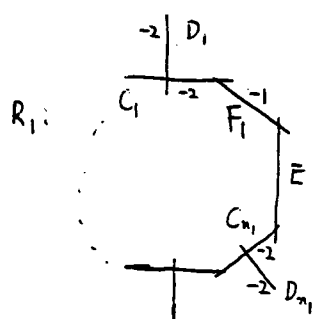


この例は、定理2の“タイプⅢ”の多様体 $V_1 + V_2 + \cdots + V_5$ とも、
ている。

次に、(CB)-曲面で、定理2のタイプⅡの多様体 V_i を、何個なり
イバーに含めようとする K_3 曲面の準安定退化をつくる。

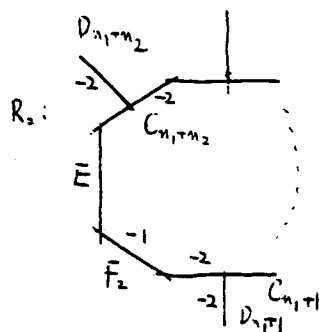
例5 (CB-II). S は例2の(CB)-曲面とする。

Z_{II} を、正規交叉の n をもつ 2 次元多様体 $Z_{II} = R_1 + R_2$ とする。
 ここで、 R_1, R_2 は、次のような曲線の配置をもつ有理曲面で、
 Z_{II} 内では楕円曲線 E に沿って交差しているとする。



$$(E^2)_{R_1} = -l_1$$

$$K_{R_1} = -E$$



$$(E^2)_{R_2} = -l_2$$

$$K_{R_2} = -E$$

$$C_i, D_i (1 \leq i \leq n_1 + n_2) \cong \mathbb{P}^1$$

$$F_j (j=1, 2) \cong \mathbb{P}^1$$

このとき、

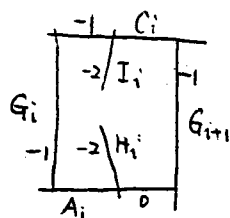
K_3 曲面の準安定退化 $\pi: X \rightarrow \Delta$ で、

X_0 が (CG)-曲面 S と多様体 $Z_{II} (n_1 + n_2 = m, l_1 + l_2 = 2)$ を含む
 ようなものが存在する。

ここで、 X_0 内の他の成分は次のように記述される。(なお、

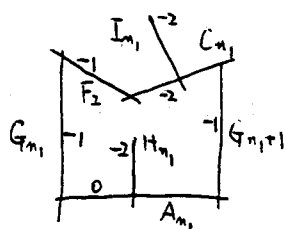
以下に現れる曲線はすべて $\mathbb{P}^1$ である。)

• $V_i (1 \leq i \leq n_1 - 1, n_1 + 1 \leq i \leq n_1 + n_2 - 1)$: 有理曲面



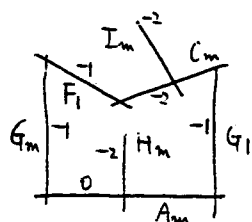
$$K_{V_i} = -G_i - G_{i+1} - 2C_i - I_i$$

• V_{n_1} : 有理曲面



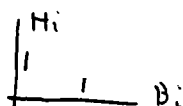
$$K_{U_{n_1}} = -G_{n_1} - G_{n_1+1} - 2F_2 - 2C_{n_1} - I_{n_1}$$

• $V_{n_1+n_2} = V_m$: 有理曲面.



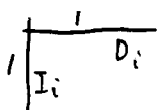
$$K_{V_m} = -G_m - G_1 - 2F_1 - 2C_m - I_m$$

• $U_i (1 \leq i \leq m) \cong \mathbb{P}^2$:



$$K_{U_i} = -B_i - 2H_i$$

• $W_i (1 \leq i \leq m) \cong \mathbb{P}^2$



$$K_{W_i} = -I_i - 2D_i$$

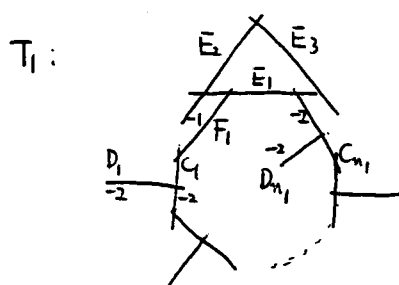
$$(K_X = 2S + \sum U_i + \sum V_i + \sum W_i \text{ となる。})$$

注意. 例2では、 $K3$ 曲面 Z_2 が存在するたのには、ビカール数の制約がある。たように、ここでは、上のような多様体 $Z_2 = R_1 + R_2$ が存在するたのには、 $m = n_1 + n_2$ の制約がある。実際、ホッジの指数定理より、 $m = n_1 + n_2 \leq 8$ ($n_1 \leq 4, n_2 \leq 4$) でなければならぬ。また、このように $n_1 \leq 4, n_2 \leq 4$ に対しては、 Z_2 が存在することがわかる。

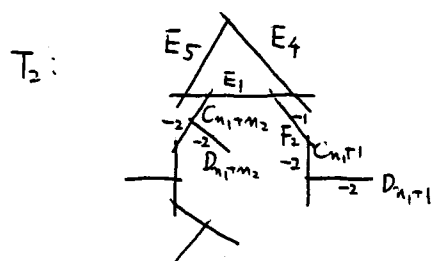
この節の最後に、(CB)-曲面と、定理2のタイプⅢの多様体と、特異ファイバーに含めようするK3曲面の準安定退化を調べる。

例1 (CB-Ⅲ). S と例2の(CB)-曲面とする。

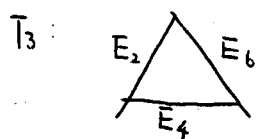
Z_{III} は、正規交叉の4をもつ2次元多様体 $Z_{\text{III}} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ とする。ここで、 T_1, T_2, T_3, T_4 は、次のような $\mathbb{P}^1$ の配置をもつ有理曲面で、 Z_{III} 内では次の E_i に沿って交わり合っている。



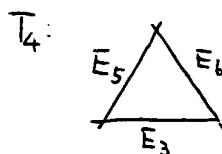
$$K_{T_1} = -E_1 - E_2 - E_3$$



$$K_{T_2} = -E_1 - E_4 - E_5$$



$$K_{T_3} = -E_2 - E_4 - E_6$$



$$K_{T_4} = -E_3 - E_5 - E_6$$

このとき、

$K3$ 曲面の準安定退化 $\pi: X \rightarrow \Delta$ で、

X_0 が (CB) -曲面 S と多様体

$$Z_{II} \quad (n_1 + n_2 = m, (E_i^2)_{T_1} + (E_i^2)_{T_2} = -4, \\ (E_i^2)_{T_1} + (E_i^2)_{T_2} = -2 \quad (2 \leq i \leq 6))$$

を含むようなものが存在する。

X_0 内の他の成分は、前例 5 とほぼ同じ形で述べることができる。

注意 例 2 や例 5 と同様に、上の Z_{II} が存在する ためには、 $m = n_1 + n_2$ に制約がある。実際、ホッジの指数定理より、 $m = n_1 + n_2 \leq 8$ ($n_1 \leq 4, n_2 \leq 4$) でなければならぬ。また、このような $n_1 \leq 4, n_2 \leq 4$ に対しては、 Z_{II} が存在することもある。

§ 5. $K3$ 曲面の準安定退化 $\pi: X \rightarrow \Delta$ について、定理 3 により、ある modification が存在して、(1) $K_X = 1$, (2) X_0 は "新しいホップ曲面" を含む, (3) X_0 は (CB) -曲面を含む, となっている。さらに、(1) の場合については、定理 2 と定理 4 により、I, II, III, II', II', II' + III' のどれかのタイプにすることができる。前節で、残る (2) と (3) の場合について、

例と3つずつ構成した。まず、(2)の場合、ホップ曲面が、
 例1 (H-I) では I 型退化 (K3 曲面) に、例3 (H-II) では II 型退化に、
 例4 (H-III) では III 型退化に、それぞれくっついていった。
 また、(3)の場合、(CB)-曲面が、間に有理曲面をはさみながら、
 例2 (CB-I) では I 型退化に、例5 (CB-II) では II 型退化に、
 例6 (CB-III) では III 型退化に、それぞれくっついていった。これ
 らの例を一般化して、次のようにタイプを考える：

例：	H-I	H-II	H-III	CB-I	CB-II	CB-III
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
タイプ：	$\hat{I}_0$	$\hat{I}_0$	$\hat{I}_0$	$\hat{I}_1$	$\hat{I}_2$	$\hat{I}_3$

正確な $\hat{I}_0, \dots, \hat{I}_3$ の定義は、[3] を参照。ここで、添字の
 0 と 1 についてであるが、Kodaira による楕円曲線の退化の
 分類のうち、準安定なものは

$$\begin{array}{c} | \\ \hat{I}_0 \text{ (楕円曲線)} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{---} \\ \hat{I}_n \text{ (rational cycle)} \end{array}$$

となっていた。(blow-up した) ホップ曲面と (CB)-曲面も変
 形をつながっていて、上のような楕円曲線と rational cycle の
 間の関係に近い。それで、ホップ曲面の出でくる (2) の場合は
 $\hat{I}_0, \hat{I}_0, \hat{I}_0$ と、添字に 0 とつり、(CB)-曲面の出でくる (3) の
 場合は、 n と 1 で表して、 $\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3$ のように、添字に 1
 とつりた。また、ローマ数字の I, II, III は、 $\hat{I}_0$ ともなっ

ている”(つまり、 K_X の中で最小の重複度をもつ)成分が、
 $K_X = 1$ の退化のそれぞれタイプ I, II, III を形づくっているこ
 とを意味する。

$K3$ 曲面の準安定退化は、どのようなモデルをもつ、どの
 ように分類されるかについての予想を述べて終ることにする。

予想 $\pi: X \rightarrow \Delta$ を $K3$ 曲面の準安定退化とする。この
 とき、 π は、次のいずれかのタイプの modification $\pi': X' \rightarrow \Delta$
 をもつ。

$$\begin{array}{lll} \text{I, } \tilde{\text{I}}_0, \tilde{\text{I}}_1, & & (\cdots C_I) \\ \text{II, II}', \tilde{\text{II}}_0, \tilde{\text{II}}_1, & & (\cdots C_{II}) \\ \text{III, III}', \text{II} + \text{III}', \tilde{\text{III}}_0, \tilde{\text{III}}_1. & & (\cdots C_{III}) \end{array}$$

さらに、 P を local monodromy, $N = \log P$ とすると、

- (i) π が C_I の中のどれかのタイプならば、 $N=0$.
- (ii) " C_{II} " $N^2=0, N \neq 0$.
- (iii) " C_{III} " $N^3=0, N^2 \neq 0$.

文 献

- [1] V. S. Kulikov. Degeneration of K3 surfaces and Enriques surfaces. *Math. USSR Izv.*, 11 (1977), 957-989.
- [2] K. Nishiyuchi: Degeneration of K3 surfaces. *J. Math. Kyoto Univ.*, 82 (1988), 267-300.
- [3] K. Nishiyuchi: Degeneration of K3 surfaces, II. (Preprint, Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, 1988)
- [4] U. Persson and H. Pinkham: Degeneration of surfaces with trivial canonical bundle. *Ann. of Math.*, 113 (1981), 45-66.