

SL₂ の被覆群の跡公式とその応用

京都大学大学院理学研究科 池田保
京都大学大学院理学研究科 平賀郁

1 SL₂ の被覆群の跡公式の安定化

講演では SL₂ の偶数次の被覆群の跡公式の安定化と、その応用として Hilbert modular form に対する Kohnen plus space の理論への応用について述べた。講演の時点では Kohnen plus space は基礎体の判別式が奇数の場合にしか構成されていなかったが、その後の研究によりこの条件は外すことができたので、この講究録では一般的な形で述べることにする。

まず、移行因子 (transfer factor) を定義し、その性質について述べる。移行因子 $\delta_{\psi}^+(\tilde{h}, g)$ の定義は Adams, Schultz, Trehan らによる。

F を局所体, n を偶数とする。 F は 1 の原始 n 乗根をもつものとする。 F における 1 の n 乗根のなす群を μ_n で表す。 μ_n の $\mathbb{C}^{\times}$ への埋め込みを一つ取って固定し、以後 $\mu_n \subset \mathbb{C}^{\times}$ とみなす。

F の非自明な加法的指標 $\psi : F \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$ を一つ取って固定する。 $\phi \in \mathcal{S}(F)$ を F 上の Schwartz 函数とすると、 ϕ の Fourier 変換 $\hat{\phi}$ は

$$\hat{\phi}(x) = \int_F \phi(y) \psi(xy) dy$$

により定義される。ここで Haar 測度 dy は Plancherel の公式 $\int_F |\phi(x)|^2 dx = \int_F |\hat{\phi}(x)|^2 dx$ が成り立つように正規化されているとする。 $a \in F^{\times}$ とするとき、任意の $\phi \in \mathcal{S}(k)$ に対して

$$\int_F \phi(x) \psi(ax^2) dx = \alpha_{\psi}(a) |2a|^{-1/2} \int_F \hat{\phi}(x) \psi(-\frac{x^2}{4a}) dx$$

が成り立つような定数 $\alpha(a) = \alpha_{\psi}(a)$ が存在する。これを ψ により定まる a の Weil 定数という。Weil 定数 $\alpha_{\psi}(a)$ は次の等式を満たす。

$$\begin{aligned} \alpha_{\psi}(ab^2) &= \alpha_{\psi}(a), \\ \alpha_{\psi}(-a) &= \overline{\alpha_{\psi}(a)}, \\ \alpha_{\psi}(a)^8 &= 1, \\ \frac{\alpha_{\psi}(a)\alpha_{\psi}(b)}{\alpha_{\psi}(1)\alpha_{\psi}(ab)} &= \langle a, b \rangle_2, \quad (a, b \in F^{\times}). \end{aligned}$$

ここで $\langle, \rangle_2$ は F 上の 2 次の Hilbert 記号である。

SL₂(F) の Kubota 2-cocycle $c(g_1, g_2)$ は次式で定義される。

$$c(g_1, g_2) = \left\langle \frac{x(g_1)}{x(g_1g_2)}, \frac{x(g_2)}{x(g_1g_2)} \right\rangle_n,$$

$$\mathbf{x} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{cases} c & \text{if } c \neq 0, \\ d & \text{if } c = 0. \end{cases}$$

ここで $\langle, \rangle_n$ は F 上の n 次の Hilbert 記号である. Metaplectic 群 $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ は Kubota 2-cocycle $\mathbf{c}(g_1, g_2)$ で定義される $\mathrm{SL}_2(F)$ の n 重被覆群である. すなわち $\mathrm{SL}_2(F)$ の元は組 $[g, \zeta]$, ($g \in \mathrm{SL}_2(F)$, $\zeta \in \mu_n$) からなり, それらの積は $[g_1, \zeta_1] \cdot [g_2, \zeta_2] = [g_1 g_2, \mathbf{c}(g_1, g_2) \zeta_1 \zeta_2]$ で与えられる. 簡明のため, $[g, 1]$ を単に $[g]$ で表すことがある. H を $\mathrm{SL}_2(F)$ の部分集合とすると, H の $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ における逆像を $\tilde{H}$ で表す.

$\mathrm{SL}_2(F)$ の正則半単純な元 h_1, h_2 が安定的に共役であるとは $h_1 = gh_2g^{-1}$ を満たす $g \in \mathrm{GL}_2(F)$ が存在することである. $\mathrm{GL}_2(F)$ から $\mathrm{SL}_2(F)$ への写像 τ^+, τ^- を

$$\tau^+(g) = (\det g)^{-n/2} g^n, \quad \tau^-(g) = -(\det g)^{-n/2} g^n$$

により定義する. τ^+, τ^- が誘導する $\mathrm{PGL}_2(F)$ から $\mathrm{SL}_2(F)$ への写像も同じ記号で表す. $\mathrm{PGL}_2(F)$ の元 g が τ -正則であるとは $\tau^+(g)$ が正則であることとする. 正則半単純な元 $[h, \zeta] \in \widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ と τ -正則半単純な元 $g \in \mathrm{PGL}_2(F)$ に対して, 移行因子 $\delta_\psi^+([h, \zeta], g)$ を次のように定義する (cf. [1], [10]). まず, $h \in \mathrm{SL}_2(F)$ と $\tau^+(g)$ が安定的に共役でない場合は, $\delta_\psi^+([h, \zeta], g) = 0$ とおく. $h \in \mathrm{SL}_2(F)$ と $\tau^+(g)$ が安定的に共役の場合は

$$\delta_\psi^+([h, \zeta], g) = \begin{cases} \zeta \frac{\alpha_\psi(1)}{\alpha_\psi(\det g)} \langle \det g, -\mathbf{x}(h) \rangle_2 & \text{if } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ \zeta \langle \det g, \mathbf{x}(h) \rangle_2 & \text{if } n \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

によって移行因子 $\delta_\psi^+([h, \zeta], g)$ を定義する. また, もう一つの移行因子 $\delta_\psi^-(\tilde{h}, g)$ を

$$\delta_\psi^-(\tilde{h}, g) = \alpha_\psi(1)^{-2} \delta_\psi^+([-1_2]\tilde{h}, g)$$

によって定義する. このとき, これらの移行因子について次の補題が成り立つ.

補題 1. $g, g' \in \mathrm{PGL}_2(F)$, $\tilde{h}, \tilde{h}' \in \widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$, $\varepsilon \in \{+, -\}$ とする. このとき, 次の (1), (2), (3) が成り立つ.

- (1) $\delta_\psi^\varepsilon(\tilde{h}, g)$ は $\tilde{h}$ に関して genuine な関数である. すなわち $\delta_\psi^\varepsilon([h, \zeta], g) = \zeta \delta_\psi^\varepsilon([h], g)$.
- (2) g と g' が $\mathrm{PGL}_2(F)$ において共役ならば $\delta_\psi^\varepsilon(\tilde{h}, g) = \delta_\psi^\varepsilon(\tilde{h}, g')$.
- (3) $\tilde{h}$ と $\tilde{h}'$ が $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F)}$ において共役ならば $\delta_\psi^\varepsilon(\tilde{h}, g) = \delta_\psi^\varepsilon(\tilde{h}', g)$.

補題 2. $g, g' \in \mathrm{PGL}_2(F)$, $h, h' \in \mathrm{SL}_2(F)$, $\varepsilon, \varepsilon' \in \{+, -\}$ とする. 次の (1), (2), (3), (4) が成り立っているとする.

- (1) $\tau^\varepsilon(g) = h$ かつ $\tau^{\varepsilon'}(g') = h'$.
- (2) h と h' は楕円的である.
- (3) h と h' は安定的に共役である.
- (4) g と g' は共役ではない.

このとき、次が成り立つ.

$$\frac{\delta_{\psi}^{\varepsilon'}([h], g')}{\delta_{\psi}^{\varepsilon}([h], g)} = -\frac{\delta_{\psi}^{\varepsilon'}([h'], g')}{\delta_{\psi}^{\varepsilon}([h'], g)}.$$

$\widetilde{C_0(\mathrm{SL}_2(F))}$ を $\mathrm{SL}_2(F)$ 上の support が compact で anti-genuine かつ滑らかな函数全体のなす空間とする. ただし $\tilde{\varphi}$ が anti-genuine とは $\tilde{\varphi}([h, \zeta]) = \zeta^{-1} \tilde{\varphi}([h])$ が成り立つことである. また, $C_0(\mathrm{PGL}_2(F))$ を $\mathrm{PGL}_2(F)$ 上の support が compact で滑らかな函数全体のなす空間とする. $\tilde{h} = [h, \zeta] \in \mathrm{SL}_2(F)$, $g \in \mathrm{PGL}_2(F)$, $\tilde{\varphi} \in \widetilde{C_0(\mathrm{SL}_2(F))}$, $\varphi \in C_0(\mathrm{PGL}_2(F))$ に対して軌道積分

$$I(\tilde{h}, \tilde{\varphi}) = \Delta(h) \int_{Z_{\mathrm{SL}_2}(\tilde{h}) \backslash \mathrm{SL}_2} \tilde{\varphi}(\tilde{x}^{-1} \tilde{h} \tilde{x}) d\tilde{x},$$

$$I(g, \varphi) = \Delta(g) \int_{Z_{\mathrm{PGL}_2}(g) \backslash \mathrm{PGL}_2} \varphi(x^{-1} g x) dx,$$

を考える.

$\varepsilon \in \{+, -\}$ とするとき, $\varphi^{\varepsilon} \in C_0(\mathrm{PGL}_2(F))$ が移行因子 $\delta_{\psi}^{\varepsilon}$ に関する $\tilde{\varphi} \in \widetilde{C_0(\mathrm{SL}_2(F))}$ の移行 (transfer) であるとは, $g \in \mathrm{PGL}_2(F)$ で $\tau^{\varepsilon}(g)$ が正則半単純ならば

$$\sum_h \delta_{\psi}^{\varepsilon}([h], g) I([h], \tilde{\varphi}) = I(g, \varphi^{\varepsilon})$$

が成り立つことをいう. ここで h は $\mathrm{SL}_2(F)$ の正則半単純な共役類を走るものとする. 任意の anti-genuine な函数 $\tilde{\varphi} \in \widetilde{C_0^{\infty}(\mathrm{SL}_2(F))}$ に対して, 移行因子 $\delta_{\psi}^{\varepsilon}$ に関する移行 $\varphi^{\varepsilon} \in C_0^{\infty}(\mathrm{PGL}_2(F))$ が存在することが知られている. また, $\tilde{\varphi} \in \widetilde{C_0(\mathrm{SL}_2)}$ が $\tilde{\varphi}([-1_2] \tilde{h}) = \alpha(1)^2 \tilde{\varphi}(\tilde{h})$ を満たすときには δ_{ψ}^{+} に関する移行と δ_{ψ}^{-} に関する移行は同じものになる. このときは単に $\tilde{\varphi}$ の移行という.

F が非アルキメデス的であり, ψ はオーダー 0 であるとする. また $n \in \mathfrak{o}^{\times}$ と仮定する. このとき, 被覆 $\mathrm{SL}_2(F) \rightarrow \mathrm{SL}_2(F)$ は極大コンパクト部分群 $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})$ 上で一意的に分裂する. この分裂により $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})$ を $\mathrm{SL}_2(F)$ の部分群とみなすことにする. $\mathcal{H}(\mathrm{PGL}_2(F) // \mathrm{PGL}_2(\mathfrak{o}))$ を $(\mathrm{PGL}_2(F), \mathrm{PGL}_2(\mathfrak{o}))$ に関する Hecke 環とし, $\widetilde{\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(F) // \mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}))}$ を $(\mathrm{SL}_2(F), \mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}))$ に関する anti-genuine なテスト関数からなる Hecke 環とする. このとき, 標準的な同型写像

$$i_v : \mathcal{H}(\mathrm{PGL}_2(F) // \mathrm{PGL}_2(\mathfrak{o})) \simeq \widetilde{\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(F) // \mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}))}$$

で移行を保存するものが存在する. $\varphi \in \mathcal{H}(\mathrm{PGL}_2(F) // \mathrm{PGL}_2(\mathfrak{o}))$ とするとき, φ は $i_v(\varphi) \in \widetilde{\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(F) // \mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}))}$ の移行である.

F を 1 の原始 n 乗根を含む代数体とする. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$ を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$ の n 重被覆群とする. $C_0(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}))$ を $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ 上のサポートが compact で滑らかな函数全体のなす空間とする. $g = (g_v) \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$, $\varphi = \prod_v \varphi_v \in C_0(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}))$ とするとき, 軌道積分 $I(g, \varphi)$ を

$$I(g, \varphi) := \prod_v I(g_v, \varphi_v)$$

によって定義する. 同様に, $\widetilde{C_0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}))}$ を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$ 上のサポートが compact で滑らかな anti-genuine な函数全体のなす空間とする. $h = (h_v) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$, $\tilde{\varphi} = \prod_v \tilde{\varphi}_v \in \widetilde{C_0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}))}$

に対して軌道積分 $I(h, \tilde{\varphi})$ を

$$I(h, \tilde{\varphi}) := \prod_v I(h_v, \tilde{\varphi}_v)$$

によって定義する. $\varphi^\varepsilon = \prod_v \varphi_v^\varepsilon \in C_0(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}))$, $\tilde{\varphi} = \prod_v \tilde{\varphi}_v \in \widetilde{C_0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}))}$ とする. すべての v について φ_v^ε が $\tilde{\varphi}_v$ の $\delta_{\psi_v}^\varepsilon$ に関する移行であるとき, φ^ε は $\tilde{\varphi}$ の δ_ψ^ε に関する移行であるという.

定理 1. φ^+ , φ^- を $\tilde{\varphi}$ のそれぞれ δ_ψ^+ , δ_ψ^- に関する移行とすると,

$$2 \sum_{\substack{h \in \mathrm{SL}_2(F)/\sim \\ h: \text{正則楕円の}}} I(h, \tilde{\varphi}) = \sum_{\substack{g \in \mathrm{PGL}_2(F)/\sim \\ g: \tau\text{-正則楕円の}}} (I(g, \varphi^+) + I(g, \varphi^-))$$

が成り立つ.

定理 1 は SL_2 の跡公式の楕円項の安定化を与えている.

2 Kohnen plus space の理論への応用

安定跡公式の応用として, Kohnen plus space の理論の Hilbert modular form への一般化を考察する. この節では $n = 2$ とし, 被覆群は 2 重被覆群のみを考える. Hilbert symbol $\langle, \rangle$ も 2 次のもののみを考える. まず最初に一変数の保型形式に関する Kohnen plus space の理論を復習する. $\Gamma_0(4) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ $1/2$ の保型因子 $j^{1/2}(\gamma, z)$ は

$$j^{1/2}(\gamma, z) = \left(\frac{c}{d}\right) \epsilon_d^{-1} (cz + d)^{1/2}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4), z \in \mathfrak{h},$$

$$\epsilon_d = \begin{cases} 1, & \text{if } d \equiv 1 \pmod{4}, \\ \sqrt{-1}, & \text{if } d \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

により定義される. $k \geq 2$ を正整数とすると $j^{k+(1/2)}(\gamma, z) = (j^{1/2}(\gamma, z))^{2k+1}$ とおく. この保型因子に関する $\Gamma_0(4)$ の正則尖点形式の空間を $S_{k+(1/2)}(\Gamma_0(4))$ で表す. この尖点形式の空間の Kohnen plus subspace は次のように定義される.

$$S_{k+(1/2)}^+(\Gamma_0(4)) = \left\{ h(z) \in S_{k+(1/2)}(\Gamma_0(4)) \left| h(\tau) = \sum_{(-1)^k n \equiv 0, 1(4)} c(n) q^n \right. \right\}$$

このとき, Kohnen は以下のような結果を証明した.

定理 (Kohnen) Hecke 環上の加群として (標準的ではない) 同型

$$S_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \simeq S_{k+(1/2)}^+(\Gamma_0(4)).$$

が存在する. $S_{k+(1/2)}(\Gamma_0(4))$ 上の Hecke 作用素 U , W を以下のように定義する.

$$Uh(z) = \frac{1}{4} \sum_{i \pmod{4}} h\left(\frac{z+i}{4}\right),$$

$$Wh(z) = (-2\sqrt{-1}z)^{-k-(1/2)} h\left(-\frac{1}{4z}\right).$$

このとき, Kohnen plus space $S_{k+(1/2)}^+(\Gamma_0(4))$ は $\mathbf{U}, \mathbf{W}$ を用いて以下のように特徴づけられる.

$$S_{k+(1/2)}^+(\Gamma_0(4)) = \{h \in S_{k+(1/2)}(\Gamma_0(4)) \mid \mathbf{WU}h = (-1)^{(k^2+k)/2} 2^k h\}.$$

F を次数 d の総実代数体、 $\mathbf{A}$ を F の adèle 環とする. $\psi_1: \mathbf{A}/F \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を $\mathbf{A}/F$ の加法的指標で無限成分が $x \mapsto \exp(2\pi\sqrt{-1}x)$ となるようなものとする. $\mathcal{D}_F$ を $F/\mathbb{Q}$ の共役差積とする. F の $\mathbb{R}$ への相異なる埋め込みを $\iota_1, \dots, \iota_d$ で表す. $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ を d 個の整数の組で $k_i \geq 2$, $(i = 1, 2, \dots, d)$ とする. F の単数 $\eta \in \mathfrak{o}_F^\times$ で $(-1)^{k_i \iota_i(\eta)} > 0$, $(i = 1, \dots, d)$ を満たすものが存在するものと仮定する. 以下ではこのような単数 η を一つ取って固定する. $k_1 = \dots = k_d = k$ の場合には $\eta = (-1)^k$ と取るものとする. $\mathbf{A}/F$ の加法的指標 ψ を $\psi(x) = \psi_1(\eta x)$ により定義する.

v を F の非アルキメデス的素点とすると、 $\mathrm{SL}_2(F_v)$ のコンパクト開部分群 $\Gamma_{0,v}(4)$ を

$$\Gamma_{0,v}(4) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(F_v) \mid a, d \in \mathfrak{o}_v, b \in \mathcal{D}_v^{-1}, c \in 4\mathcal{D}_v \right\}$$

によって定義する. ここで $\mathcal{D}_v = \mathfrak{o}_{F_v} \mathcal{D}_F$ である. $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F_v)}$ を $\mathrm{SL}_2(F_v)$ の二重被覆群とし, $\Gamma_{0,v}(4)$ の $\widetilde{\mathrm{SL}_2(F_v)}$ における逆像を $\widetilde{\Gamma_{0,v}(4)}$ で表す. $\widetilde{\Gamma_{0,v}(4)}$ の genuine な指標 $\varepsilon_v: \widetilde{\Gamma_{0,v}(4)} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を次のように定義する.

$v \nmid 2$ のときには ε_v は $\widetilde{\Gamma_{0,v}(4)}$ の唯一の genuine な指標とする. $v \mid 2$ のときには

$$\varepsilon_v([g, \zeta]) = \zeta \frac{\alpha_{\psi_v}(1)}{\alpha_{\psi_v}(d)} \langle d, \mathbf{x}(g) \rangle_v, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_{0,v}(4).$$

と定義する. ここで α_{ψ_v} は Weil 定数である.

$j(\gamma, z) = cz + d$, $(\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), z \in \mathfrak{h})$ を通常の保型因子とする. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の二重被覆群を $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ とするとき, $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} \times \mathfrak{h}$ の保型因子 $\tilde{j}(\tilde{\gamma}, z)$ を

$$\tilde{j}\left(\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \zeta\right], z\right) = \begin{cases} \zeta\sqrt{d} & \text{if } c = 0, d > 0, \\ -\sqrt{-1}\zeta\sqrt{|d|} & \text{if } c = 0, d < 0, \\ \zeta(cz + d)^{1/2} & \text{if } c \neq 0. \end{cases}$$

によって定義する. ただし $-\pi/2 < \arg((cz + d)^{1/2}) \leq \pi/2$ とする. 定義より $\tilde{j}([\gamma, \zeta], z)^2 = j(\gamma, z)$ が成り立つ.

$\mathrm{SL}_2(F)$ の合同部分群 $\Gamma_0(4)$ を

$$\Gamma_0(4) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(F) \mid a, d \in \mathfrak{o}_F, b \in \mathcal{D}_F^{-1}, c \in 4\mathcal{D}_F \right\}$$

によって定義する. $\Gamma_0(4) \times \mathfrak{h}^d$ の保型因子 $j^{k+(1/2)}(\gamma, z)$ を

$$j^{k+(1/2)}(\gamma, z) = \prod_{v < \infty} \varepsilon_v([\gamma]) \prod_{i=1}^d (\tilde{j}(\iota_i([\gamma]), z_i))^{2k_i+1}$$

によって定義する. $F = \mathbb{Q}$ の場合にはこの定義は古典的な定義と一致する. この保型因子によって定まる重さ $k + (1/2)$ の Hilbert 尖点形式の空間を $S_{k+(1/2)}(4)$ で表す. すなわち,

$$S_{k+(1/2)}(4) = \{h : \mathfrak{h}^d \xrightarrow{\text{hol}} \mathbb{C}, \mid \\ h(\gamma(z)) = j^{k+(1/2)}(\gamma, z)h(z), \forall \gamma \in \Gamma_0(4), \quad h : \text{尖点形式}\}.$$

とおく. $S_{k+(1/2)}(4)$ に属する尖点形式 $h(z)$ は F の整数環 $\mathfrak{o}_F$ を添数集合にもつ Fourier 展開

$$h(z) = \sum_{\xi \in \mathfrak{o}_F} c(\xi)q^\xi,$$

を持つ. ここで $q^\xi := \exp(2\pi\sqrt{-1} \sum_{i=1}^d (\iota_i(\xi)z_i))$ である. $\widetilde{\text{SL}_2(\mathbb{A})}$ を adèle 群 $\text{SL}_2(\mathbb{A})$ の 2 重被覆群とすると, $S_{k+(1/2)}(4)$ の元は adèle 空間 $\text{SL}_2(F) \backslash \widetilde{\text{SL}_2(\mathbb{A})}$ 上の保型形式 φ で次の性質 (1) ~ (4) を満たすものとみなすことができる.

- (1) v を有限素点とすると, $\varphi(gk) = \varepsilon_v^{-1}(k)\varphi(g)$, ($g \in \widetilde{\text{SL}_2(\mathbb{A})}$, $k \in \Gamma_{0,v}(4)$).
- (2) φ は重さ $k + (1/2)$ を持つ. すなわち $k_i(\theta) = \iota_i \left(\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \right)$, ($i = 1, 2, \dots, d$) とするとき,

$$\varphi(gk_i(\theta)) = \exp((k_i + (1/2))\sqrt{-1}\theta)\varphi(g), \quad (g \in \widetilde{\text{SL}_2(\mathbb{A})}, -\pi < \theta \leq \pi)$$

が成り立つ.

- (3) Δ_i ($i = 1, 2, \dots, d$) を i 番目の無限成分に対応する Casimir 作用素とすると,

$$\Delta_i \varphi = -\frac{(2k_i + 1)(2k_i - 3)}{16} \varphi$$

が成り立つ.

- (4) φ は尖点的である. すなわち

$$\int_{x \in F \backslash \mathbb{A}} \varphi \left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) dx = 0, \quad (g \in \widetilde{\text{SL}_2(\mathbb{A})})$$

が成り立つ.

Hilbert 尖点形式の空間 $S_{k+(1/2)}(4)$ に対する Kohnen plus space を

$$S_{k+(1/2)}^+(4) := \left\{ h(z) \in S_{k+(1/2)}(4) \mid h(\tau) = \sum_{\substack{\xi \in \mathfrak{o}_F \\ \eta \xi \equiv \square(4)}} c(\xi)q^\xi \right\}$$

によって定義する. ここで $x \equiv \square(4)$ は $x \equiv y^2 \pmod{4\mathfrak{o}_F}$ を満たす $y \in \mathfrak{o}_F$ が存在することを意味するものとする.

v を F の非アルキメデス的素点とする. $\widetilde{\mathcal{H}}_v = \widetilde{\mathcal{H}}(\widetilde{\text{SL}_2(F_v)}) / \widetilde{\Gamma_{0,v}(4)}; \varepsilon_v$ を次のように定義される Hecke 環とする.

$$\widetilde{\mathcal{H}}(\widetilde{\text{SL}_2(F_v)}) / \widetilde{\Gamma_{0,v}(4)}; \varepsilon_v = \{f \in \widetilde{C}_0(\widetilde{\text{SL}_2(F_v)}) \mid f(k_1 h k_2) = \varepsilon_v(k_1) \varepsilon_v(k_2) f(h) \\ \forall k_1, k_2 \in \Gamma_{0,v}(4), \forall h \in \widetilde{\text{SL}_2(F_v)}\}.$$

$\widetilde{\mathrm{SL}_2(F_v)}$ の Weil 表現を ω_{ψ_v} とする. ω_{ψ_v} の表現空間は Schwartz 空間 $\mathcal{S}(F_v)$ であり, $\phi \in \mathcal{S}(F_v)$ に対して

$$\begin{aligned}\omega_{\psi_v} \left(\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \zeta \right] \right) \phi(t) &= \zeta \frac{\alpha_{\psi_v}(1)}{\alpha_{\psi_v}(a)} |a|_v^{1/2} \phi(at) \\ \omega_{\psi_v} \left(\left[\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \zeta \right] \right) \phi(t) &= \zeta \psi_v(bt^2) \phi(t) \\ \omega_{\psi_v} \left(\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \zeta \right] \right) \phi(t) &= \zeta |2|_v^{1/2} \overline{\alpha_{\psi_v}(1)} \hat{\phi}(-2t).\end{aligned}$$

が成り立つ. Weil 表現 ω_{ψ_v} は次の内積に関してユニタリ表現となる.

$$(\phi_1, \phi_2) = \int_{F_v} \phi_1(t) \overline{\phi_2(t)} dt, \quad \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}(F_v).$$

ここで dt は F_v の Haar 測度で $\mathfrak{o}_v$ の体積が 1 となるものである. ϕ_0 を $\mathfrak{o}_v$ の特性函数とする.

$$\Gamma_v = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathfrak{o}_v, b \in (4\mathcal{D}_v)^{-1}, c \in 4\mathcal{D}_v \right\}.$$

とおくとき, Hecke 環 $\widetilde{\mathcal{H}}_v$ のベキ等元 E_v^K を

$$E_v^K(g) = \begin{cases} |2|_v^{-1} (\phi_0, \omega_{\psi_v}(g) \phi_0) & \text{if } g \in \widetilde{\Gamma}_v, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

によって定義する.

定理 2: 標準的な同型

$$i_v: \widetilde{\mathcal{H}}_v \simeq \mathcal{H}_v^{E_v^K}$$

で移行を保存するものが存在する. すなわち $\varphi_v \in \mathcal{H}_v$ とするとき φ_v は $i_v(\varphi_v)$ の移行である.

大局 Hecke 環 $\widetilde{\mathcal{H}}$ を $\widetilde{\mathcal{H}} = \otimes_{v<\infty} \widetilde{\mathcal{H}}_v$ により定義すると, $S_{k+(1/2)}(4)$ には大局 Hecke 環 $\widetilde{\mathcal{H}}$ が右移動 ρ により自然に作用する. ベキ等元 $E^K \in \widetilde{\mathcal{H}}$ を $E^K = \prod_{v<\infty} E_v^K$ により定義する. E^K はベキ等元なので $\rho(E^K)$ は $S_{k+(1/2)}(4)$ 上の射影作用素となる.

定理 3: $S_{k+(1/2)}^+(4)$ は射影作用素 $\rho(E^K): S_{k+(1/2)}(4) \rightarrow S_{k+(1/2)}(4)$ の像に等しい. すなわち,

$$S_{k+(1/2)}^+(4) = \{h \in S_{k+(1/2)}(4) \mid h = \rho(E^K)h\}.$$

が成り立つ.

$\widetilde{\mathcal{H}}$ の部分環 $\widetilde{\mathcal{H}}^{E^K}$ を

$$\widetilde{\mathcal{H}}^{E^K} = E^K * \widetilde{\mathcal{H}} * E^K = \prod_{v<\infty} \widetilde{\mathcal{H}}_v^{E_v^K}$$

により定義する. このとき, 定理 3 により $\widetilde{\mathcal{H}}^{E^K}$ は $S_{k+(1/2)}^+(4)$ に右移動 ρ により作用する.

S_{2k} を adèle 空間 $\mathrm{PGL}_2(F) \backslash \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}) / \prod_{v<\infty} \mathrm{PGL}_2(\mathfrak{o}_v)$ 上の保型形式 φ で次の性質を満たすものとする.

(1) φ は重さ $2k$ を持つ. すなわち $k_i(\theta) = \iota_i \left(\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \right)$, $(i = 1, 2, \dots, d)$ とするとき,

$$\varphi(gk_i(\theta)) = \exp(2k_i\sqrt{-1}\theta)\varphi(g), \quad (g \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}), \theta \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.

(2) Δ_i ($i = 1, 2, \dots, d$) を i 番目の無限成分に対応する Casimir 作用素とすると,

$$\Delta_i \varphi = -k_i(k_i - 1)\varphi$$

が成り立つ.

(3) φ は尖点的である. すなわち

$$\int_{x \in F \backslash \mathbb{A}} \varphi \left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) dx = 0, \quad (g \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}))$$

が成り立つ.

大局 Hecke 環 $\mathcal{H}$ を $\mathcal{H} = \prod_{v < \infty} \mathcal{H}_v$ により定義すると $\mathcal{H}$ は S_{2k} に右移動で作用する.

定理 2 により標準的な同型

$$i = \prod_{v < \infty} i_v : \mathcal{H} \simeq \tilde{\mathcal{H}}^{E^K}$$

が存在する.

定理 4 : $\varphi \in \mathcal{H}$, $\tilde{\varphi} = i(\varphi) \in \tilde{\mathcal{H}}^{E^K}$ とするとき, Hecke 作用素の跡の等式

$$\mathrm{tr}(\varphi|_{S_{2k}}) = \mathrm{tr}(\tilde{\varphi}|_{S_{k+(1/2)}^+(4)})$$

が成り立つ. とくに同型 $i : \mathcal{H} \simeq \tilde{\mathcal{H}}^{E^K}$ により $S_{k+(1/2)}^+(4)$ を $\mathcal{H}$ 加群とみると S_{2k} と $S_{k+(1/2)}^+(4)$ は $\mathcal{H}$ 加群として同型である.

$F = \mathbb{Q}$ の場合には E^K は Hecke 作用素 $\mathbf{WU}$ の固有空間

$$\{h \in S_{k+(1/2)}(\Gamma_0(4)) \mid \mathbf{WU}h = (-1)^{(k^2+k)/2} 2^k h\}.$$

への射影作用素に一致する. したがって定理 3, 定理 4 は Kohnen の結果の Hilbert 保型形式への一般化と考えられる.

次に $S_{k+(1/2)}^+(4)$ の Hecke 同時固有形式の Fourier 係数に関する結果を述べる. v を代数体 F の非アルキメデス的素点とする. $\xi \in F_v^\times$ に対して対称的な Laurent 多項式 $\Psi_v(\xi, X) \in \mathbb{C}[X + X^{-1}]$ を次のように定義する. $\delta_1 = \mathrm{ord}_v(\xi)$ とし δ_0 を $F_v(\sqrt{\xi})/F_v$ の導手の指数とする. このとき

$$\begin{aligned} f_\xi &= (\delta_1 - \delta_0)/2, \\ \chi_\xi &= \begin{cases} 1 & (\xi \in F_v^{\times 2} \text{ の場合}) \\ -1 & (F_v(\sqrt{\xi})/F_v \text{ が不分岐 2 次拡大の場合}) \\ 0 & (F_v(\sqrt{\xi})/F_v \text{ が分岐 2 次拡大の場合}) \end{cases} \end{aligned}$$

とおく. このとき,

$$\Psi_v(\xi, X) = \begin{cases} \frac{X^{f_\xi+1} - X^{-f_\xi-1}}{X - X^{-1}} - \chi_\xi q_v^{-1/2} \frac{X^{f_\xi} - X^{-f_\xi}}{X - X^{-1}} & (f_\xi \geq 0 \text{ の場合}) \\ 0 & (f_\xi < 0 \text{ の場合}) \end{cases}$$

と定義する. ここで q_v は v の剰余体の位数である.

定理 5: $h(z) = \sum_{\eta \in \square(4)} c(\xi) q^\xi \in S_{k+(1/2)}^+(4)$ を Hecke 同時固有形式とする. 対応する S_{2k} の Hecke 同時固有形式を $f(z)$ とする. $f(z)$ の非アルキメデス的素点 v における佐武 parameter を α_v とする. このとき, $\xi \in F^\times$ に対して $h(z)$ の Fourier 係数 $c(\xi)$ は次のように表される.

$$c(\xi) = c_\xi \prod_{v < \infty} \Psi_v(\eta \xi, \alpha_v) \prod_{i=1}^d |\iota_i(\eta \xi)|^{(k_i/2) - (1/4)}$$

ここで c_ξ は ξ の $F^\times/F^{\times 2}$ における類のみによって定まる定数である.

例 1.

$F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ とするとき, $\dim_{\mathbb{C}} S_{(6,6)} = 1$ が知られている. よって $\dim_{\mathbb{C}} S_{(7/2, 7/2)}^+(4) = 1$ となる. $S_{(7/2, 7/2)}^+(4)$ は次のような元 $h(z)$ によって生成される.

$$\begin{aligned} h(z) = & q^{(5+\sqrt{5})/2} + q^{(5-\sqrt{5})/2} - 3q^3 + 2q^4 - 3q^{(9+3\sqrt{5})/2} - 3q^{(9-3\sqrt{5})/2} \\ & + q^{5+2\sqrt{5}} + q^{5-2\sqrt{5}} + 2q^{6+2\sqrt{5}} + 2q^{6-2\sqrt{5}} \\ & - q^{(13+\sqrt{5})/2} - q^{(13-\sqrt{5})/2} + 31q^7 - 44q^8 - q^{(17+5\sqrt{5})/2} \\ & - 11q^{(17+3\sqrt{5})/2} - 11q^{(17-3\sqrt{5})/2} - q^{(17-5\sqrt{5})/2} \\ & - 11q^{9+2\sqrt{5}} - 11q^{9-2\sqrt{5}} + 36q^{10+2\sqrt{5}} + 36q^{10-2\sqrt{5}} + \dots \end{aligned}$$

例 2.

$F = \mathbb{Q}(\sqrt{13})$ とするとき, $\dim_{\mathbb{C}} S_{(4,4)} = 1$ が知られている. よって $\dim_{\mathbb{C}} S_{(5/2, 5/2)}^+(4) = 1$ となる. $S_{(5/2, 5/2)}^+(4)$ は次のような元 $h(z)$ によって生成される.

$$\begin{aligned} h(z) = & q - 4q^{(7+\sqrt{13})/2} - 4q^{(7-\sqrt{13})/2} + 3q^4 + 13q^5 \\ & + q^{(11+3\sqrt{13})/2} + q^{(11-3\sqrt{13})/2} - 26q^{(15+\sqrt{13})/2} \\ & - 26q^{(15-\sqrt{13})/2} + 39q^8 + 16q^9 - 4q^{(19+5\sqrt{13})/2} \\ & - 26q^{(19+3\sqrt{13})/2} - 26q^{(19-3\sqrt{13})/2} - 4q^{(19-5\sqrt{13})/2} \\ & + 13q^{10+2\sqrt{13}} + 13q^{10-2\sqrt{13}} + \dots \end{aligned}$$

References

- [1] J. Adams, *Characters of covering groups of $SL(n)$* , Journal of the Inst. of Math. Jussieu, **2** (2003), 1–21.
- [2] Y. Flicker, *Automorphic forms on covering groups of $GL(2)$* , Inv. Math. **57** (1980), 119–182.

- [3] S. Gelbart, I. I. Piatetski-Shapiro, *Some Remarks on Metaplectic Cusp Forms and the Correspondence of Shimura and Waldspurger*, Israel J. Math. **44** (1983), 97–126.
- [4] W. Kohnen, *Modular forms of half-integral weight on $\Gamma_0(4)$* , Math. Ann. **248** (1980), 249–266.
- [5] H. Kojima, *The trace formula for Hecke operators of Hilbert modular forms of rational weight* Japan J. Math. **20** (1994), 115–131.
- [6] H. Y. Loke and G. Savin, *Representations of the two-fold central extension of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_2)$* , Pacific J. Math. **247** (2010), 435–454.
- [7] J. Schultz, *Lifting of Characters on $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(F)$ and $\mathrm{SO}_{1,2}(F)$ for F a non-archimedean local field*, dissertation, University of Maryland, 1998.
- [8] H. Shimizu, *On traces of Hecke operators*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **10** (1963), 1–19.
- [9] G. Shimura, *On modular forms of half integral weight*, Ann. Math. **97** (1973) 440–481.
- [10] A. Trehan, *Lifting of characters and functions on metaplectic groups*, Dissertation, University of Maryland, 2004.
- [11] J.-L. Waldspurger. *Correspondances de Shimura et quaternions*, Forum Math. **3** (1991), 219–307.
- [12] Wen-Wei Li, *Transfert d'intégrales orbitales pour le groupe métaplectique*, preprint. arXiv:0906.4053
- [13] Wen-Wei Li, *La formule des traces pour les revêtements de groupes réductifs connexes. I. Le développement géométrique fin*, preprint, arXiv:1004.4011
- [14] Wen-Wei Li, *Le lemme fondamental pondéré pour le groupe métaplectique*, preprint, arXiv:1006.4780