

転移モデルにおけるカオスによる拡散運動

鹿大・理 井上政義, 藤坂博一

最近, カオスの研究が進み, カオスへのシナリオはかなり明らかになってきた。ところで, カオスをトータルに理解する為には, シナリオ等の“geneses of chaos”のみならず, カオスの中味を問題とする“logos of chaos”の研究が不可欠である。そこで我々はカオスの中味を新しく導入された similarity exponent¹⁾ (characteristic exponent) λ_q の方法で解析することを試みた。

モデルとして次式で表わされる微分系を考える。

$$\ddot{x}(t) = -\sin(2\pi x) + F \cos(\omega t) - \Gamma \dot{x}, \quad (1)$$

ここで右辺の第1項は周期ポテンシャルによる力, 第2項は外力, 第3項は減衰を表わしている。この式で表わされる系として(a)コヒーレントに動く部分を一つの粒子とみなした転移モデル, (b)超イオン伝導体, (c) Josephson 接合, などがある。

系の長時間の振舞を調べる為に, x と $v (= \dot{x})$ のストロボ表示を採用する。離散時間としては $0, T, 2T, \dots (T=2\pi/\omega)$ をとる。 x_j を整数部 n_j と小数部 ξ_j に分ける。

$$x_j = n_j + \xi_j, \quad (2)$$

ここで n_j は粒子が入っているポテンシャルの谷の番号を表わしている。この運動方程式は

$$n_{j+1} = n_j + J_j, \quad (3)$$

ここで J_j は jumping number である。 q -order similarity exponent λ_q は¹⁾

$$\lambda_q = \frac{1}{q} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \ln \langle \exp(q n_j) \rangle. \quad (4)$$

系(1)は変換 $J_j \rightarrow -J_j$ に対して対称であるから, 今の場合 $\lambda_{-q} = -\lambda_q$ である(但し drift のある場合は除く)。また一般に $d\lambda_q/dq \geq 0$ という性質がある。 q が小さいとき,

$$\lambda_q = Dq + O(q^3), \quad (5)$$

ここで D は拡散係数と一致している¹⁾ もし Δ_j が gaussian であれば、全ての q 領域で $\lambda_q = Dq$ となるが、今の場合、 Δ_j はバウンド ($|\Delta_j| \leq r$) されているので $\lambda_\infty \leq r$ となる。

系(1)は $\omega = 1.0$, $\Gamma = 1.25$ の時に $F > F_c = 0.987$ でカオスによる拡散的運動を発生させる²⁾ $F > F_c$ に対して数値的に求めた λ_q を図1に示す。この図から分るように、 $|q|$ の大きいところで熱拡散 $\lambda_q = Dq$ からのズレが見られる。ところで拡散係数 D については、

$$D \propto \sqrt{\varepsilon}, \quad \varepsilon \equiv F - F_c (> 0), \quad (6)$$

が成立している²⁾ そこで λ_q を $\sqrt{\varepsilon}$ でスケールして描いたものが図2である。この図の $|q|$ の小さいところ (diffusion branch) から、たしかに(6)が成立していることが分る。ところで $|q|$ の大きいところ (intermittency branch) までスケールできる関数を次の様にして求めた。 q を λ_q の周りで展開して、

$$q = \frac{\lambda_q}{D} + a\lambda_q^3 + \dots, \quad (7)$$

上式を λ_q で微分して、部分和をとると、

$$\begin{aligned} \frac{dq}{d\lambda_q} &= \frac{1}{D} (1 + 3aD\lambda_q^2 + \dots), \\ &\cong \frac{1}{D} \frac{1}{1 - (\lambda_q/\lambda_\infty)^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

ここで $\lambda_\infty = 1/\sqrt{3aD}$ とおいた。この式(8)を積分すると、

$$\frac{\lambda_q}{\lambda_\infty} \cong \tanh\left(\frac{q}{\kappa}\right), \quad (9)$$

ここで diffusion branch の巾を与える κ は

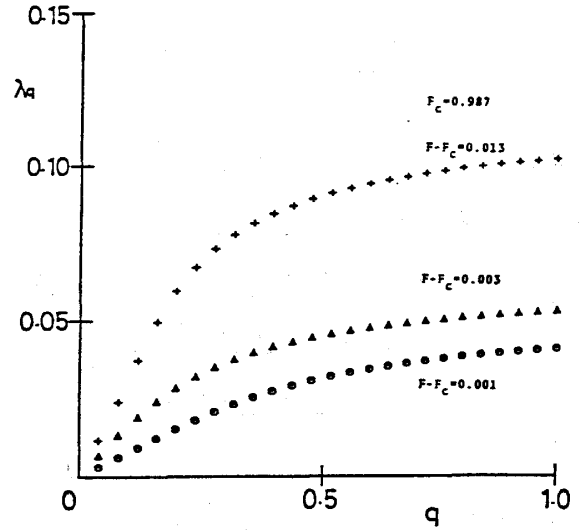


図 1

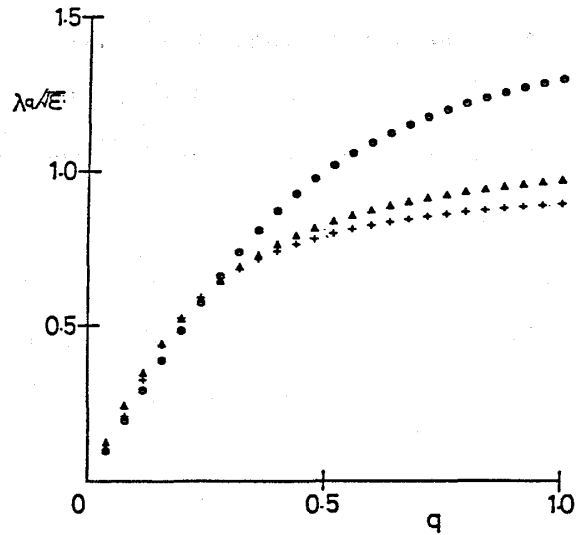


図 2

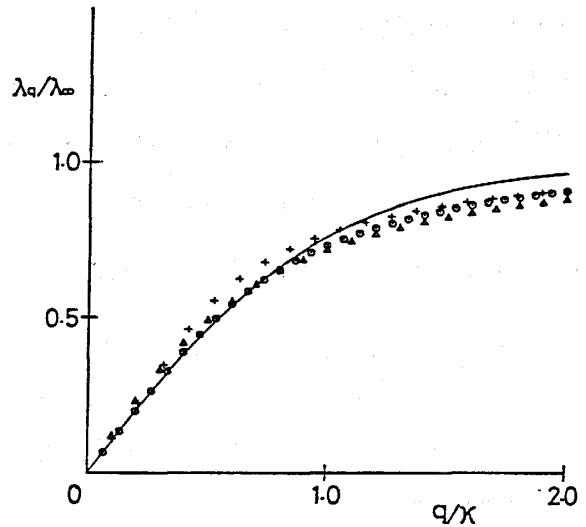


図 3

高橋公也, 斎藤信彦

次式で定義されている。

$$\kappa \equiv \frac{\lambda_{\infty}}{D} \quad (10)$$

図 3 に示す様に, このスケーリング関数 (9) は数値解と良く一致する。

以上, 調べたのは拡散の発生点近傍の臨界現象である。同一の $\omega = 1.0$, $\Gamma = 1.25$ でも F が大きくなり $F_* = 1.4777$ に近づくと拡散が発散し, F_* を越えると drift 運動が起る (自発的対称性の破れ)^{2), 3)} この臨界点近傍の λ_q については現在, 計算中である。また差分系では (9) と異なったスケーリング関数が見出されている⁴⁾

参考文献

- 1) H. Fujisaka, Prog. Theor. Phys. 71 (1984) 513.
- 2) M. Inoue and H. Koga, Prog. Theor. Phys. 68 (1982) 2184.
- 3) H. Koga, H. Fujisaka and M. Inoue, Phys. Rev. A28 (1983) 2370.
- 4) H. Fujisaka, M. Inoue and H. Uchimura, Prog. Theor. Phys. 72 (1984) 23.

量子カオスと伏見関数

早大・応物 高橋公也, 斎藤信彦

量子力学における局在した波束が, 観測時間の間にマクロな状態にまで広がらない場合には, Ehrenfest の定理により古典的な軌道に近い運動をする。しかし $\hbar$ が小さくても $\hbar \neq 0$ の時は, 量子波束は有限な広がり $\Delta x \Delta p \sim \hbar$ を持つので波束は拡散し古典的な点粒子像とは異なってくるであろう。我々は, 古典的に規則的な場合と不規則な場合における波束の発展を調べ, 古典カオスと量子カオスの対応について考察した。この場合, 古典的な相空間における対応を考えるのが普通であり, 一般に Wigner 変換

$$\rho_w = \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} \int d\vec{\eta} \left\langle \vec{q} - \frac{\vec{\eta}}{2} \right| \psi \rangle \langle \psi | \vec{q} + \frac{\vec{\eta}}{2} \rangle \exp \frac{i}{\hbar} \vec{P} \cdot \vec{\eta}$$

が使われるが, ρ_w は負の値もとるので確率密度にはならない。そこで Wigner 変換を粗視化した伏見変換を考える^{1) 2) 3)}