

ダルブーの代数的可積分系とリーの理論
—非線型中心問題と反応拡散方程式への応用—

岡山理科大学 下條 昌彦
MASAHIKO SHIMOJO
OKAYAMA UNIVERSITY OF SCIENCE

CONTENTS

1. ダルブーの可積分理論	2
1.1. 第一積分と積分因子	2
1.2. 代数的不変曲線	2
1.3. 指数因子	6
2. リーの理論	7
2.1. 求積分法と座標変換	7
2.2. 微分方程式の対称性	8
2.3. 対称性を用いた微分方程式の解法	10
3. 反応拡散方程式への応用	13
3.1. 時間周期的な空間均一化	13
3.2. 特異被食捕食モデル	16
4. 非線型中心問題への応用	18
4.1. 渦心点をもつ 2 次非線形項の分類	19
4.2. リー括弧積	23
4.3. 閉軌道の周期	27
References	30

平面上の連立一階微分方程式の平衡点の安定性は線形化行列に対する固有値の実部の符号の正・負から判定できる．すなわち平衡点に非線形摂動が加わっても線形化方程式で現れる沈点、湧点、結節点、鞍点、渦状点といった構造は局所的には保たれる．一方で固有値の実部がゼロのときや退化しているときは線形化行列だけでは安定性が判定できない．解曲線の挙動を知るには非線形項の効果を詳細に解析する必要がある．このようなケースではポワンカレ写像を計算するか、平衡点周りで第一積分やリアプノフ関数分を構成する．多項式ベクトル場の第一積分を陽に書き下すのに有効なのがダルブーの代数的可積分理論であり、一般のベクトル場に関してはリーの理論がある．

本講究録の構成は以下のようになっている．1 章ではダルブーの可積分理論について解説する．2 章ではリー群の対称性に基づく微分方程式の求積分法を説明する．3 章には反応拡散方程式への応用について概説した．4 章では渦心点をもつ 2 次の多項式ベクトル場を分類し、リー括弧積についての基礎事項を説明するとともに渦心点が等時性をもつ多項式ベクトル場の分類結果について紹介した．

1. ダルブーの可積分理論

1.1. 第一積分と積分因子. 連立常微分方程式

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}$$

を考える. 記号を短くするため $\mathbf{X} = (P, Q)$ と書く. また $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする.

定義 1.1. $U \subset \mathbb{F}^2$ は開集合とする. 定数でない関数 $\Phi: U \rightarrow \mathbb{F}$ があって (1.1) の任意の解 $(x(t), y(t))$ に対して $\Phi(x(t), y(t))$ が $t \in \mathbb{R}$ に依らない定数のときつまり

$$\mathbf{X} \cdot \nabla \Phi = P\Phi_x + Q\Phi_y \equiv 0$$

が成り立つとき Φ を方程式 (1.1) の U 上の **第一積分** という. 第一積分が存在するときシステム (1.1) は U で可積分という.

(1.1) から以下の全微分方程式を得る

$$Qdx - Pdy = 0.$$

全微分方程式を解くとは適当な関数 R を探して微分式 $R(Qdx - Pdy)$ を完全微分形式 $d\Phi = \Phi_x dx + \Phi_y dy$ にすることである. ここで関数 R を積分因子という. すなわち

$$(1.2) \quad RQdx - RPdy = \Phi_x dx + \Phi_y dy.$$

各成分を比較して 2 階偏微分の可換性を用いると

$$(1.3) \quad (RQ)_y = (\Phi_x)_y = (\Phi_y)_x = (-RP)_x \iff \operatorname{div}(RP, RQ) = 0$$

が成り立つ. 偏微分を積の微分で展開して書きかえると

$$(1.4) \quad \mathbf{X} \cdot \nabla R = (P\partial_x + Q\partial_y)R = -R\operatorname{div}(P, Q).$$

(1.3) はベクトル場 $(-RQ, RP)$ の回転が 0 になることであると言い換えられる. ポワソンの補題によると

ベクトル場が勾配場であることと, そのベクトル場の線積分に経路依存性がないことは同値. また領域が単連結ならばベクトル場の回転がゼロになることも同値.

すなわち (1.4) を解いて積分因子が求まれば線積分

$$\Phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -RQ dx + RP dy$$

により保存量 $\Phi(x, y)$ が構成できる. なぜならば $(-RQ, RP) \perp (P, Q)$ なので任意の (1.1) の解曲線が $\Phi(x, y)$ の等高線上にあるからである.

1.2. 代数的不変曲線. $f \in \mathbb{F}[x, y]$ の零点集合が (1.1) の積分曲線とする. このとき, その積分曲線をパラメータ表示した曲線を $c(t)$ が存在して $f(c(t)) = 0$ なので

$$0 = \frac{d}{dt}f(c(t)) = \nabla f(c(t)) \cdot \frac{d}{dt}c(t) = \nabla f(c(t)) \cdot \mathbf{X}(c(t)).$$

したがって $f(x, y) = 0$ が (1.1) の積分曲線のひとつならば $\mathbf{X}(x, y) \cdot \nabla f(x, y) = 0$. 言い換えると

$$(1.5) \quad \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = 0\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid \mathbf{X}(x, y) \cdot \nabla f(x, y) = 0\}$$

以下本節ではベクトル場 $\mathbf{X}$ は多項式を成分にもつベクトル場とする．一般に，多項式環 $\mathbb{C}[x, y]$ の部分集合 S に対する代数的集合を以下で定義する．

$$V(S) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid h(x, y) = 0 \text{ for all } h \in S\}.$$

イデアル $I \subset \mathbb{C}[x, y]$ に対して $V(I) \subset \mathbb{C}^2$ で， I に含まれる多項式の共通零点を表す．代数幾何の基本的な事実から S が生成する $\mathbb{C}[x, y]$ のイデアル $\langle S \rangle$ に対して $V(S) = V(\langle S \rangle)$ となる．逆に， $V(I)$ 上で零になる多項式全体で生成するイデアルを $I(V(I))$ で表す．簡単な考察からイデアル $I_1 \subset I_2$ に対して $V(I_2) \subset V(I_1)$ および代数的集合 $W_1 \subset W_2$ に対して $I(W_2) \subset I(W_1)$ が成り立つ．また $S \subset I(V(S))$ も自明である． $\sqrt{I}$ をイデアル I の根基イデアルとする，すなわち $h \in \sqrt{I}$ とはある $n > 0$ に対して， $h^n \in I$ であることを意味する．このとき，等式 $I(V(I)) = \sqrt{I}$ をヒルベルトの零点定理という ([13])．

さてもしも積分曲線を零点集合で与える多項式 f とベクトル場 $\mathbf{X}$ の成分がすべて多項式ならば $\mathbf{X} \cdot \nabla f$ も多項式である．ゆえに (1.5) は包含関係

$$V(\langle f \rangle) = V(f) \subset V(\mathbf{X} \cdot \nabla f)$$

を意味する．両辺のイデアルと考えると

$$(1.6) \quad \sqrt{\langle f \rangle} = I(V(\langle f \rangle)) \supset I(V(\mathbf{X} \cdot \nabla f)) \ni \mathbf{X} \cdot \nabla f.$$

代数的集合を多項式で記述するには図形的な重複度を与える 2 次以上の因子は最初から除いてしまって良い．それがヒルベルトの零点定理で根基イデアルを導入する理由である．もし $f(x, y)$ が 2 次因子を持たない多項式のときは以下の補題が成り立つ．

補題 1.1. $f(x, y) = 0$ が (1.1) の積分曲線とする．さらに $f(x, y)$ が 2 次因子を持たない多項式のとき

$$(1.7) \quad P(x, y) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = g(x, y) f(x, y)$$

を満たす多項式 $g(x, y)$ が存在する．

補題 1.1 の証明． 仮定より f は 2 次因子を持たないので $\sqrt{\langle f \rangle} = \langle f \rangle$ ．これと (1.6) より

$$f \mid P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y}.$$

したがって (1.7) を満たす多項式 $g(x, y)$ が存在する． □

補題 1.1 では積分曲線を与える多項式が 2 次因子をもたないことを仮定していたが，この仮定を取り払って以下のように代数的な不変因子と余因子を定義する．

定義 1.2. $\mathbf{X}(x, y)$ は多項式ベクトル場とする．ある多項式 $f(x, y), g(x, y)$ が

$$\mathbf{X}(x, y) \cdot \nabla f(x, y) = g(x, y) f(x, y)$$

を満たすとする．このとき $f(x, y)$ を **不変因子**， $g(x, y)$ を **余因子** という．また $f(x, y) = 0$ を (1.1) に対する代数的不変曲線 という．

不変因子と余因子は次数が高いものがいくらでも生成できる．たとえば二つの不変因子の積は不変因子であり，対応する余因子は各々の余因子の和となる．より詳しく述べると (1.1) に対する不変因子をそれぞれ $f_1(x, y), f_2(x, y)$ とし，またそれに対応する余因子をそれぞれ $g_1(x, y), g_2(x, y)$ とする．つまり

$$\mathbf{X}(x, y) \cdot \nabla f_1(x, y) = g_1(x, y) \cdot f_1(x, y), \quad \mathbf{X}(x, y) \cdot \nabla f_2(x, y) = g_2(x, y) \cdot f_2(x, y)$$

とする．このとき

$$(1.8) \quad \mathbf{X} \cdot \nabla (f_1 f_2) = \mathbf{X} \cdot (f_2 \nabla f_1) + \mathbf{X} \cdot (f_1 \nabla f_2) = (g_1 + g_2) f_1 f_2$$

同様の計算から不変因子の冪乗に対して，余因子はスカラー倍される．

$$(1.9) \quad \mathbf{X} \cdot \nabla(f^a) = af^{a-1}\mathbf{X} \cdot \nabla(f) = af^a \frac{\mathbf{X} \cdot \nabla(f)}{f} = a g f^a, \quad a \in \mathbb{C}.$$

このことから，もし不変因子を多項式として因数分解して次数が小さい不変因子が再び得られるならば，その小さい次数の不変因子の方がより根源的な対象であることがわかる．

代数的集合 $W \subset \mathbb{C}^2$ が可約とは W の真の代数的部分集合 W_1, W_2 があって $W = W_1 \cup W_2$ が成り立つことである．代数的集合が可約でないときは既約という．たとえば代数的集合 $V(xy)$ は $V(x)$ と $V(y)$ の和集合なので可約である．多項式 $f \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \mathbb{C}$ が既約とは定数でない多項式 g, h により $f = gh$ とは表せないことをいう．たとえば多項式 $x - y, x^2 - y, x^3 - y^2$ は既約だが，多項式 xy は既約ではない．多項式 f が既約なとき対応する $V(f)$ は既約な代数的集合となる．

ダルブーのアイデアは多項式ベクトル場に対して，本質的に異なるたくさんの代数的不変因子を求めれば第一積分が構成できるというものである．

定理 1.1. 多項式ベクトル場に対する微分方程式 (1.1) の不変因子 $\{f_i\}_{1 \leq i \leq k}$ は $\mathbb{C}^2$ 上で既約多項式であり， $i \neq j$ のとき対応する代数的不変曲線 $V(f_i)$ と $V(f_j)$ は互いに異なると仮定する．

$$\frac{\deg(\mathbf{X})(\deg(\mathbf{X}) + 1)}{2} + 1 \leq k$$

ならば第一積分が存在する．ただし， $\deg(\mathbf{X}) := \max\{\deg P, \deg Q\}$ ．

定理 1.1 の証明． 関係式 $P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} = gf$ に対し両辺の次数を計算すると

$$\begin{aligned} \deg(gf) &= \deg\left\{P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y}\right\} \leq \max\left\{\deg\left(P \frac{\partial f}{\partial x}\right), \deg\left(Q \frac{\partial f}{\partial y}\right)\right\} \\ &= \max\left\{\deg(P) + \deg\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \deg(Q) + \deg\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right\} \\ &= \max\{\deg(P) + \deg(f) - 1, \deg(Q) + \deg(f) - 1\}. \end{aligned}$$

したがって

$$\deg(g) + \deg(f) \leq \max\{\deg(P), \deg(Q)\} + \deg(f) - 1.$$

これは $\deg(g) \leq \deg(\mathbf{X}) - 1$ を意味する．すなわち代数的余因子 g は $\mathbb{C}[x, y]$ の部分空間で次数が $\deg(\mathbf{X}) - 1$ 以下のものに含まれている．この部分空間の次元は

$$\frac{\deg(\mathbf{X})(\deg(\mathbf{X}) + 1)}{2}$$

である．これは

$$\dim\{m \text{ 次以下の } 2 \text{ 変数多項式}\} = 1 + 2 + \cdots + m + 1 = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

から容易に導ける． f_i に対応する余因子を g_i とおく．上の次元と定理の仮定から $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_k g_k = 0$ となるような $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \neq \mathbf{0}$ が存在する．これらを用いて

$$\Phi = f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \cdots f_k^{\lambda_k}$$

を定義する．このとき (1.9) より

$$\mathbf{X} \cdot \nabla(f_i^{\lambda_i}) = \lambda_i g_i f_i, \quad 1 \leq i \leq k.$$

これと (1.8) から

$$\mathbf{X} \cdot \nabla \Phi = \mathbf{X} \cdot \nabla \{f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \cdots f_k^{\lambda_k}\} = \{\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_k g_k\} f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \cdots f_k^{\lambda_k} = 0.$$

これは Φ が第一積分となることを意味する。 $\square$

注意 1.1. この証明より, 第一積分が存在するには余因子が線形従属条件 $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_k g_k = 0$ を満たせば十分であるということが分かる。

$\deg \mathbf{X} = 1$ のときは, 固有値問題に帰着して第一積分を求めることができる。

例 1.1. 例えば $\mathbf{X} = (2x + y + 1, y + 2)$ とする。 $\deg(g) \leq \deg(\mathbf{X}) - 1 = 1 - 1 = 0$ より余因子 g_i は定数である。 c_i を対応する定数とし $g_i = c_i$ とおく。線形作用素 $T : \text{span}\{x, y, 1\} \rightarrow \text{span}\{x, y, 1\}$ を以下で定義する:

$$T = (2x + y + 1) \frac{\partial}{\partial x} + (y + 2) \frac{\partial}{\partial y}$$

不変因子と余因子の関係式は $Tf_i = c_i f_i$ となる。簡単な計算でわかるように $T(x) = 2x + y + 1, T(y) = y + 2, T(1) = 0$ である。したがって

$$(T(x), T(y), T(1)) = (x, y, 1) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

この正方行列は T の表現行列であり, 固有ベクトルが不変因子 f_i に対応して, 固有値は余因子 $g_i = c_i$ に対応する。

固有値 1 に対する固有ベクトル $(0, 1, 2)$ より余因子 $c_1 = 1$ に対する不変因子が $f_1 = y + 2$ である。また固有値 2 に対する固有ベクトル $(2, 2, 3)$ より余因子 $c_1 = 2$ に対する不変因子が $f_2 = 2x + 2y + 3$ である。さらに固有値 0 に対する固有ベクトル $(0, 1, 2)$ より余因子 $c_1 = 0$ に対する不変因子が $f_2 = 1$ である。簡単にわかるように $2g_1 + (-1)g_2 = 0$ なので $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$ とおけば良い。したがって次の第一積分を得る。

$$\Phi = f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} = \frac{(y + 2)^2}{2x + 2y + 3}.$$

次に $\deg \mathbf{X} = 2$ の場合を考えよう。

例 1.2. $\mathbf{X} = (ax^2 + cx, 2axy + by^2 + cy)$ とする。このベクトル場は, 以下五つの代数的不変因子を持つ。

$$f_1 = x, \quad f_2 = ax + c, \quad f_3 = y, \quad f_4 = ax + by, \quad f_5 = ax + by + c.$$

対応する代数的余因子は簡単な計算により

$$g_1 = ax + c, \quad g_2 = ax, \quad g_3 = 2ax + by + c, \quad g_4 = ax + by + c, \quad g_5 = ax + by$$

であり, $\lambda_1 = \lambda_5 = -1, \lambda_2 = \lambda_4 = 1, \lambda_3 = 0$ と選べば次の第一積分を得る。

$$\Phi = \frac{(ax + c)(ax + by)}{x(ax + by + c)}.$$

不変因子が必要な数に達しない場合, 以下の定理により積分因子を求める。

定理 1.2. $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して $\sum_{i=1}^p \lambda_i g_i = -\text{div}(P, Q)$ が成り立つことと $f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$ が (1.1) の積分因子であることは同値である。

定理 1.2 の証明. 代数的不変曲線, 余因子の定義より

$$\mathbf{X} \cdot \nabla (f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}) = (f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}) \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i = -(f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}) \text{div}(P, Q).$$

これは積分因子の満たすべき性質 (1.4) そのものである。よって題意が示された。 $\square$

1.3. 指数因子. ダルブーの代数的可積分系理論は代数曲線だけでは完結しない. 余因子が重複するときに不変因子だけでなく, 指数因子と呼ばれるものが生じてしまうからである. これは線形常微分方程式系で固有値が縮退したときに固有関数に変化するのと状況が似ている.

h, l を互いに素な多項式とする. (1.1) に対する不変因子を二つ与える.

(i) 不変因子 h に対応する余因子を g_h とする.

(ii) $h_\epsilon = h + \epsilon l + O(\epsilon^2)$ に対応する余因子を $g_{h_\epsilon}, \epsilon \in [0, \epsilon_0]$ とする.

ϵ_0 は十分に小さいものとする. 余因子が重複するとき, すなわち $\epsilon \rightarrow 0$ としたときに不変因子がどのようになるかを考えよう. $\mathbf{X}(x, y) \cdot \nabla h_\epsilon(x, y) = g_{h_\epsilon}(x, y) \cdot h_\epsilon(x, y)$ の事実を用いる. また g_{h_ϵ} を ϵ について一次まで展開すると $g_h = g_h + \epsilon G + O(\epsilon^2)$ となる. $\deg G \leq \deg \mathbf{X} - 1$ とする.

二つの不変因子 $1/h, h_\epsilon$ の積は積分因子であり (1.8) を用いると

$$\mathbf{X} \cdot \nabla \left(\frac{h_\epsilon}{h} \right) = (g_{h_\epsilon} - g_h) \left(\frac{h_\epsilon}{h} \right) = (\epsilon G + O(\epsilon^2)) \left(\frac{h_\epsilon}{h} \right).$$

これと (1.9) を用いると

$$\mathbf{X} \cdot \nabla \left(\frac{h_\epsilon}{h} \right)^{\frac{1}{\epsilon}} = (G + O(\epsilon)) \left(\frac{h_\epsilon}{h} \right)^{\frac{1}{\epsilon}}$$

$\epsilon \rightarrow 0$ のとき $\left(\frac{h + \epsilon l + O(\epsilon^2)}{h} \right)^{\frac{1}{\epsilon}} \rightarrow \exp(l/h)$. よって $\mathbf{X} \cdot \nabla \exp(l/h) = G \exp(l/h)$.

定義 1.3. 多項式 G は $\deg(G) \leq \deg \mathbf{X}$ を満たすとする.

$$\mathbf{X}(x, y) \cdot \nabla \exp \left(\frac{l(x, y)}{h(x, y)} \right) = G(x, y) \exp \left(\frac{l(x, y)}{h(x, y)} \right)$$

となるような関数 $\exp(l/h)$ を 指数因子 という. G を対応する余因子という.

指数因子は 0 にならないため代数的不変曲線を定義することはできないが, それと同等の役割を果たしている.

定理 1.3. P, Q は $\mathbb{F}$ 上で互いに素な多項式であるとする. 代数的不変因子 $f_1, f_2, \dots, f_p$ のその余因子 $g_1, g_2, \dots, g_p$, および指数因子 $\exp(l_1/h_1), \exp(l_2/h_2), \dots, \exp(l_q/h_q)$ に対応する余因子 $G_1, G_2, \dots, G_q$ がある. ただし f_i は二次因子を持たず, また $i \neq j$ のとき f_i, f_j は同じ因子を持たないと仮定する. また l, h が $\mathbb{C}$ 上で互いに素な多項式であると仮定する.

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i g_i + \sum_{j=1}^q \mu_j G_j = 0$$

なる λ_i, μ_i が存在するならば第一積分が存在して以下の形でかける.

$$f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p} \left(\exp \left(\frac{l_1}{h_1} \right) \right)^{\mu_1} \cdots \left(\exp \left(\frac{l_q}{h_q} \right) \right)^{\mu_q}.$$

証明は定理 1.1 の証明と同じである.

例 1.3. 次の 2 組の常微分方程式を考える.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = y(x+1) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = (1 + \frac{1}{n})x \\ \frac{dy}{dt} = y(x+1) \end{cases}$$

各々の方程式は以下の 3 つの不変因子と対応する余因子をもつ.

不変因子	余因子	λ_i, μ_j
x	1	-1
y	$1+x$	+1
$\exp(x)$	x	-1

不変因子	余因子
x	$1+1/n$
y	$1+x$
$(1+x/n)^n$	$\frac{1+1/n}{1+x/n}x$

(1.8) より不変因子 $(1+x/n)^n x$ に対応する余因子は $1 + \frac{1}{n} + \frac{1+1/n}{1+x/n}x$ である. これと不変因子 y に対応する余因子 $1+x$ は $n \rightarrow \infty$ のとき $1+x$ として重複する. 一方 $n \rightarrow \infty$ のとき不変因子 $(1+x/n)^n$ は $\exp(x)$ に収束する. すなわち, 余因子の線形従属の条件は $(-1) \cdot 1 + (+1) \cdot (1+x) + (-1) \cdot x = 0$. 定理 1.3 より第一積分 $\Phi = y/(xe^x)$ を得る.

本節の内容は和書では少ないが [5] は歴史的な観点から動機づけや当時の研究動向も書かれている. さらに細かい内容を知るには [3] が参考になる. [15] はグレブナー基底による計算アルゴリズムも紹介しており興味深い.

2. リーの理論

2.1. 求積法と座標変換. 微分方程式

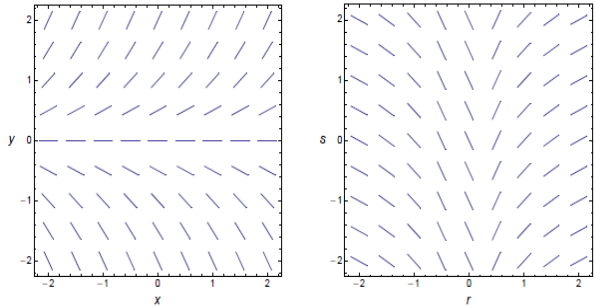
$$(2.1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

に対して良い座標変換 $(x, y) \mapsto (r, s)$ を施し, 変数分離型の微分方程式

$$(2.2) \quad \frac{ds}{dr} = g(r)$$

に変換することが目的である. 微分方程式 (2.2) では方向場の傾きが r のみに依存しているので方向場全体を s 方向に平行移動するとそれらが完全に重なることが本質的である.

例 2.1. 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = y$ を考える. この方程式の方向場を描くと下図の左側の図のようになる. 方向場の傾きが y のみに依存しているので方向場全体を x 方向に平行移動するとそれらが完全に重なる.



容易に分かるように $r = y, s = x$ という変換を用いれば目的に合った方向場が得られる. 微分方程式 $dy/dx = y$ を r - s 座標での微分方程式に変換すると

$$\frac{ds}{dr} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y} = \frac{1}{r}$$

この変数分離型微分方程式を求積すると

$$s = \int \frac{1}{r} dr = \ln r + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

これを x - y 座標で書き表すと $x = \ln y + C$ である. よって解 $y = Ce^x$ を得る.

例 2.2. 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}$$

を考える. 天下りのだが, 座標変換 $r = y/x, s = -1/x$ により微分方程式を変換すると

$$\frac{ds}{dr} = \frac{d(-\frac{1}{x})}{d(\frac{y}{x})} = \frac{dx/x^2}{dy/x - ydx/x^2} = \frac{1/x}{dy/dx - y/x} = \frac{1/x}{y^2/x^3} = \frac{1}{r^2}.$$

この微分方程式は変数分離法で解くことができ

$$s = \int \frac{1}{r^2} dr = -\frac{1}{r} + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

この解を x - y 座標で書き下すと

$$-\frac{1}{x} = -\frac{y}{x} + C.$$

最後に y を x について解けば

$$y = \frac{x^2}{1 + Cx}.$$

ここで問題となるのはどのようにして $r = y/x = y, s = -1/x$ という摩訶不思議な変数変換を思いついたのかである. キーアイデアは微分方程式の対称性だ.

2.2. 微分方程式の対称性. 幾何的な対象が対称性を持つとは平面から平面への変換の族に対してそれが自身に写されることである. たとえばデカルト平面上にある原点中心の単位円周 S^1 は左右対称である. なぜならば y 軸に対する折り返しに対して単位円周がそれ自身に写されるからである. すなわち平面からそれ自身への写像を T とすれば $T(x, y) = (-x, y)$ に対して $T(S^1) = S^1$ である. また原点に関して回転対称性があると認識するとき, それは原点中心の回転行列に対して, 単位円周がそれ自身に写されるからである. この場合, 単位円周をそれ自身に写す変換はただ一つではなく, 任意の偏角の回転であることは注意すべきである. すなわちパラメーターを与えるごとに平面からそれ自身の写像が与えられなければならない. ゆえに平面から平面自身への変換の集合 $\{T_\epsilon\}$ を考える必要が生じる. 1 パラメーターリー群を導入しよう.

定義 2.1. 以下の三つの性質をもつような平面から平面への変換の族 $T_\epsilon: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を 1 パラメーターリー群という

- (i) $T_0 = Id$
- (ii) $T_\epsilon \circ T_\delta = T_{\epsilon+\delta}$
- (iii) $T_\epsilon^{-1} = T_{-\epsilon}$

平面の対称性を表すものとして平行移動, 相似拡大, 原点中心の回転などは典型的である. これらを式で書き表すと以下の例ようになる.

例 2.3. x 方向への平行移動を表す 1 パラメーターリー群:

$$(2.3) \quad (\hat{x}, \hat{y}) = T_\epsilon(x, y) = (x + \epsilon, y).$$

例 2.4. x 方向への相似拡大を表す 1 パラメーターリー群は

$$(\hat{x}, \hat{y}) = T_\epsilon(x, y) = (e^\epsilon x, y)$$

で与えられる. 同様に y 方向への相似拡大は以下で表せる.

$$(\hat{x}, \hat{y}) = T_\epsilon(x, y) = (x, e^\epsilon y)$$

例 2.5. 原点中心の相似拡大を表す 1 パラメーターリー群：

$$(\hat{x}, \hat{y}) = T_\epsilon(x, y) = (e^\epsilon x, e^\epsilon y)$$

例 2.6. 原点中心の偏角 ϵ の回転も 1 パラメーターリー群：

$$(\hat{x}, \hat{y}) = T_\epsilon(x, y) = (x \cos \epsilon - y \sin \epsilon, x \sin \epsilon + y \cos \epsilon)$$

例 2.7. 射影変換を表す 1 パラメーターリー群

$$(\hat{x}, \hat{y}) = T_\epsilon(x, y) = \left(\frac{x}{1 - \epsilon x}, \frac{y}{1 - \epsilon x} \right)$$

実際，リー群であることを確認する．性質 (ii) のみチェックする．

$$\begin{aligned} T_\epsilon \circ T_\delta(x, y) &= T_\epsilon \left(\frac{x}{1 - \delta x}, \frac{y}{1 - \delta x} \right) = \left(\frac{\frac{x}{1 - \delta x}}{1 - \epsilon \frac{x}{1 - \delta x}}, \frac{\frac{y}{1 - \delta x}}{1 - \epsilon \frac{x}{1 - \delta x}} \right) \\ &= \left(\frac{x}{1 - \delta x - \epsilon x}, \frac{y}{1 - \delta x - \epsilon x} \right) = \left(\frac{x}{1 - (\delta + \epsilon)x}, \frac{y}{1 - (\delta + \epsilon)x} \right) = T_{\epsilon + \delta}(x, y) \end{aligned}$$

注意 2.1. この射影変換は遠近法でモデル化することができる．いま紙を地面に垂直に立てて地面を描いているとする．紙の上の座標を x - y 座標とし，それを X - Y - Z 空間に埋め込んで紙の上の座標を $(x, y, 0)$ とする．すなわち X 軸を地面からの高さに， Y 軸を水平右向きに， Z 軸を紙の向こう側が軸の正方向になるように取る．観察者の視点を $(X, Y, Z) = (1, 0, -1)$ とする．すると，地面は平面 $X = x = 0$ になっている．さて，紙の上の座標を地面の実際の位置に対応させる変換を求めてみよう．それは視点 $(1, 0, -1)$ と紙の上の点 $(x, y, 0)$ を結ぶ直線 $(tx + 1 - t, ty, t - 1)$ と平面 $X = 0$ の交点を求めることに対応することがわかる．それは $(0, y/(1 - x), x/(1 - x))$ になる． Z を $\hat{x}$ ， Y を $\hat{y}$ とおくと $(\hat{x}, \hat{y}) = (x/(1 - x), y/(1 - x))$ ．視点を動かして紙に近づけたり遠ざけたりすると，パラメータータイプシロンが出現する．

平面上の微分方程式の解全体の幾何的な情報は方向場全体に集約されている．すなわち微分方程式 (2.1) に付随する幾何的な対象は平面の点集合全体ではなく，方向場全体である．ゆえにそれが 1 パラメーターリー群でどのように変換されるかを考慮することは微分方程式の対称性を知るうえで不可欠である．点 (x, y) において方向場の傾きが m のときリー群 T_ϵ によって写された点 $(\hat{x}, \hat{y})$ における傾きを $\hat{m}$ とおく．

例 2.8. x 軸に関する平行移動 $(\hat{x}, \hat{y}) = T_\epsilon(x, y) = (x + \epsilon, y)$ に対して，点 (x, y) における方向場 (x, y, m) は $(\hat{x}, \hat{y})$ の方向場 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{m}) = (x + \epsilon, y, m)$ に写される．

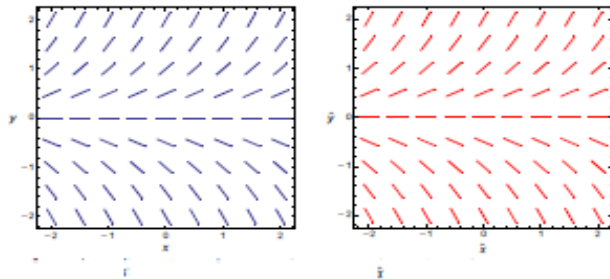
例 2.9. x 軸に関する拡大 $(\hat{x}, \hat{y}) = T_\epsilon(x, y) = (e^\epsilon x, y)$ に対して方向場 (x, y, m) は $(\hat{x}, \hat{y})$ の方向場 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{m}) = (e^\epsilon, y, e^{-\epsilon} m)$ に写される．方向場は x 軸に関しては拡大されるが， y 軸に関しては変化はない．

一般の微分方程式 (2.1) において写像 T ないしは T_ϵ が付随する方向場をどのように変換するかを考えることで微分方程式の対称性にたどり着くことができる．平面上の変換 T によって，微分方程式 (2.1) の方向場が自分自身に写されるとき， T を微分方程式の対称性という．これをリー群 T_ϵ のコトバで言いかえて微分方程式の対称性を定義することもできる．すなわち微分方程式 (2.1) に対しリー群 $\{T_\epsilon\}$ がその対称性であるとは

$$(2.4) \quad \frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = f(\hat{x}, \hat{y})$$

が成り立つことである．対称性についてのいくつかの例を挙げる．

例 2.10. 微分方程式 $dy/dx = y$ の方向場は x 軸に関する折り返しで図形として重なる．ゆえに x 軸に関する折り返しは微分方程式 $dy/dx = y$ の対称性である．



式で確かめると次のようになる $(\hat{x}, \hat{y}) = (x + \epsilon, y)$ より

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \frac{dy}{d(x + \epsilon)} = \frac{dy}{dx} = y = \hat{y}.$$

ちなみに y 軸に関する拡大が対称性であることも以下のようにわかる.

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \frac{d(e^\epsilon y)}{dx} = e^\epsilon \frac{dy}{dx} = e^\epsilon y = \hat{y}.$$

一方, x 軸に関する拡大や y 軸に関する平行移動はこの微分方程式の対称性ではない.

例 2.11. 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}$ に対して射影変換 $T_\epsilon(x, y) = \left(\frac{x}{1-\epsilon x}, \frac{y}{1-\epsilon x}\right)$ が対称性であることは以下の計算で確かめられる.

$$d\hat{x} = \frac{dx}{(1-\epsilon x)^2}, \quad d\hat{y} = \frac{1}{(1-\epsilon x)^2} \left((1-\epsilon x)dy + \epsilon y dx \right)$$

であるから

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = (1-\epsilon x) \frac{dy}{dx} + \epsilon y = (1-\epsilon x) \left(\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3} \right) + \epsilon y = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3} (1-\epsilon) = \frac{\hat{y}}{\hat{x}} + \frac{\hat{y}^2}{\hat{x}^3}.$$

2.3. 対称性を用いた微分方程式の解法. 例 2.1 では変数変換 $(x, y) \mapsto (r, s)$ を見つけるにあたって, 微分方程式の方向場に対する対称性を視覚的にとらえることができた. だが一般の微分方程式 (2.1) の方向場の対称性を目でとらえるのは不可能である. 解析的に計算するにあたって, 1 パラメーターリー群 $\{T_\epsilon\}$ に付随する対称性ベクトル場

$$\mathbf{Y} = (\xi(x, y), \eta(x, y)) = \left(\frac{d\hat{x}}{d\epsilon}, \frac{d\hat{y}}{d\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0}$$

を考える. このベクトル場はもとの 1 パラメーターリー群 $\{T_\epsilon\}$ の情報をすべて含んでいる. なぜならば微分方程式

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = \xi(x(\tau), y(\tau)), \quad \frac{dy(\tau)}{d\tau} = \eta(x(\tau), y(\tau))$$

を初期値 (x, y) で解いた解の時刻 $\tau = \epsilon$ での位置が $T_\epsilon(x, y)$ になるからである.

例 2.12. $(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\epsilon x, e^\epsilon y)$ に対して

$$\mathbf{Y} = \left(\frac{d\hat{x}}{d\epsilon}, \frac{d\hat{y}}{d\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} = (e^\epsilon x, e^\epsilon y) \Big|_{\epsilon=0} = (x, y)$$

例 2.13. $(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\epsilon x, e^{-\epsilon} y)$ に対して

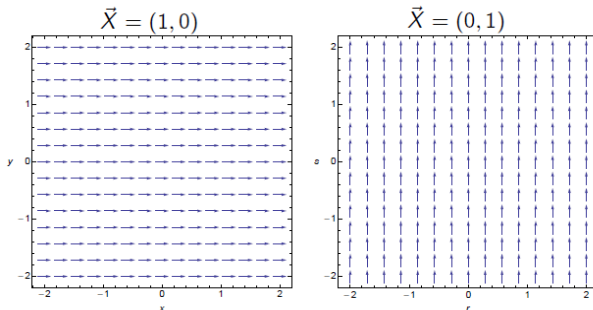
$$\mathbf{Y} = \left(\frac{d\hat{x}}{d\epsilon}, \frac{d\hat{y}}{d\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} = (e^\epsilon x, e^{-\epsilon} y) \Big|_{\epsilon=0} = (x, -y)$$

例 2.14. $(\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{x}{1-\epsilon x}, \frac{y}{1-\epsilon x} \right)$ に対して

$$\mathbf{Y} = \left(\frac{d\hat{x}}{d\epsilon}, \frac{d\hat{y}}{d\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} = \left(\frac{x^2}{(1-\epsilon x)^2}, \frac{xy}{(1-\epsilon x)^2} \right) \Big|_{\epsilon=0} = (x^2, xy)$$

例 2.15. 微分方程式 $dy/dx = y$ を考える. この方向場は x 軸方向の平行移動で不変なので, 付随する対称性ベクトル場は $\mathbf{Y} = 1 \cdot \partial_x$ である.

$r = y, s = x$ と座標変換をすることで, ベクトル場は $\mathbf{Y} = \partial_s$ となる.



対称性を用いて微分方程式を解く方法に戻ろう. まず微分方程式 (2.2) の方向場は r のみに依存している. これは s 方向に平行移動すると方向場がそれ自身に重なることを意味する. すなわち r - s 座標においてリー群 $\{T_\epsilon\}$ は微分方程式の方向場を s 方向に一様に平行移動させる. すなわち $\{T_\epsilon\}$ に付随するベクトル場は r - s 座標では $\mathbf{Y} = (0, 1)$ となる. このことを偏微分記号で表記すると x - y 座標では $\mathbf{Y} = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y$, r - s 座標では $\mathbf{Y} = \partial_s = 0 \cdot \partial_r + 1 \cdot \partial_s$ と書き表せる. このように表記することでベクトル場を x - y 座標で成分表記しているのか r - s 座標で成分表記しているのかの混乱を避けることが出来る. これまでの考察から判明した魔術的な変数 r, s の見つけ方は次の通りである.

定理 2.1. 連立一階線形偏微分方程式

$$\xi \partial_x r + \eta \partial_y r = 0, \quad \xi \partial_x s + \eta \partial_y s = 1$$

の解 $r(x, y), s(x, y)$ を用いて微分方程式 (2.1) を変数変換すると微分方程式 (2.2) になる.

定理 2.1 の証明. 一般に関数は座標によらずに値が定まる対象であるから, どの座標でベクトル場 $\mathbf{Y}$ による関数 f の方向微分 $\mathbf{Y}f$ を計算しても同じ値になる. そこで $f(x, y) = r(x, y), s(x, y)$ にベクトル場 $\mathbf{Y}$ を作用させることで以下を得る.

$$\begin{aligned} \{\xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y\}r(x, y) &= \mathbf{Y}r = (0\partial_r + 1\partial_s)r = 0, \\ \{\xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y\}s(x, y) &= \mathbf{Y}s = (0\partial_r + 1\partial_s)s = 1. \end{aligned}$$

以上で定理が示された. □

例 2.16. ベクトル場 $\mathbf{Y} = y\partial_y$ について考える. 定理 2.1 より $yr_y = 0, ys_y = 1$ を満たす r, s を求めればよい. たとえば $r = x, s = \ln(y)$ がひとつの解である. 実際, この座標変換をすると $\partial_s = y_s\partial_y = y\partial_y = \mathbf{Y}$.

以上の議論をまとめる. 微分方程式 (2.1) の方向場にこの微分方程式の対称性 $\{T_\epsilon\}$ があるとして, その対称性ベクトル場 $\mathbf{Y}$ を計算した. 対称性ベクトル場 $\mathbf{Y}$ に対して定理 2.1 にある偏微分方程式を解くことでうまい座標系 r - s が見つかる. この座標系 r - s では対称性ベクトル場は $\mathbf{Y} = 0\partial_r + 1\partial_s$ となるので, 微分方程式の方向場は s 方向の一様な平行移動でそれ自身に重なる. 言い換えると微分方程式の方向場は r のみによるので, (2.2)

が得られたことになる．あとは不定積分を計算し x - y 座標で解を表示すれば良い．すなわち微分方程式 (2.1) を解くことはどのように対称性 $\{T_\epsilon\}$ を見つけるかに帰着された．

最後に、どのようにして対称性 $\{T_\epsilon\}$ を探すのか説明する．次の定理の偏微分方程式の解を探せば対称性変換 T_ϵ が見つかる．

定理 2.2. 微分方程式 (2.1) の対称性ベクトルの成分 (ξ, η) は次の偏微分方程式の解である．

$$(2.5) \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} + f \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) - f^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}.$$

この方程式はベクトル場

$$\mathbf{Y} = \xi \partial x + \eta \partial y, \quad \mathbf{X} = \partial x + f \partial y$$

とリー括弧積を用いれば、ある関数 $\mu(x, y)$ に対して $[\mathbf{Y}, \mathbf{X}] = \mu \mathbf{X}$ とかける．

定理 2.2 の証明. T_ϵ の定義より微分方程式 (2.1) に対し $\{T_\epsilon\}$ が対称性であるとは (2.4) が成立することであった．すなわち ϵ を十分小さい正の数とし

$$(2.6) \quad T_\epsilon(x, y) = (x, y) + \epsilon(\xi, \eta) + O(\epsilon^2)$$

を微分方程式 (2.4) に代入すると

$$\frac{d(y + \epsilon \eta)}{d(x + \epsilon \xi)} = f(x + \epsilon \xi, y + \epsilon \eta) + O(\epsilon^2)$$

を得る．右辺をテイラー展開し、その 1 次の項まで書き下すと

$$\begin{aligned} dy + \epsilon d\eta &= \{f(x, y) + \epsilon(f_x(x, y)\xi(x, y) + f_y(x, y)\eta(x, y)) + O(\epsilon^2)\} \cdot \{dx + \epsilon d\xi\} \\ &= f(x, y)dx + \epsilon\{f(x, y)d\xi + (f_x(x, y)\xi(x, y) + f_y(x, y)\eta(x, y))dx\} + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

次に $dy = f(x, y)dx$ を代入し両辺の ϵ の係数を比較すると

$$d\eta = f d\xi + (f_x \xi + f_y \eta) dx.$$

両辺に $d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy$, $d\eta = \eta_x dx + \eta_y dy$ を代入すると

$$\eta_x dx + \eta_y dy = f(\xi_x dx + \xi_y dy) + (f_x \xi + f_y \eta) dx.$$

ここで両辺を dx で割ると

$$\eta_x + \eta_y \frac{dy}{dx} = f \xi_x + f \xi_y \frac{dy}{dx} + f_x \xi + f_y \eta.$$

右辺に $dy/dx = f$ を代入し整理すれば (2.5) を得る．

関係式 $[\mathbf{Y}, \mathbf{X}] = \mu \mathbf{X}$ と対称性条件 (2.5) が実際に一致することをチェックしよう．括弧積を実際に計算して (2.5) を用いると

$$\begin{aligned} \left[\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} \right] &= \left[\xi \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right] + \left[\xi \frac{\partial}{\partial x}, f \frac{\partial}{\partial y} \right] + \left[\eta \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right] + \left[\eta \frac{\partial}{\partial y}, f \frac{\partial}{\partial y} \right] \\ &= -\xi_x \frac{\partial}{\partial x} + \xi f_x \frac{\partial}{\partial y} - f \xi_y \frac{\partial}{\partial x} - \eta_x \frac{\partial}{\partial y} + \eta f_y \frac{\partial}{\partial y} - f \eta_y \frac{\partial}{\partial y} \\ &= (-\xi_x - f \xi_y) \frac{\partial}{\partial x} + (\xi f_x + \eta f_y - \eta_x - f \eta_y) \frac{\partial}{\partial y} = \mu \frac{\partial}{\partial x} + \mu f \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

特に $\mu = -\xi_x - f \xi_y$ であることもわかる．

□

例 2.17. 微分方程式 $dy/dx = f(x, y) = y$ について考える.

$$(2.7) \quad \xi = ax + by + c, \quad \eta = \alpha x + \beta y + \gamma$$

を (2.5) に代入すると

$$\alpha + (\beta - a)y - by^2 = \alpha x + \beta y + \gamma.$$

両辺の係数をそれぞれ比較して $b = 0, \beta - a = \beta, \alpha = 0, \alpha = \gamma$. よって $a = b = \alpha = \gamma = 0$. それぞれ (2.7) に代入すると $\xi = c, \eta = \beta y$ が対称性ベクトル場である.

最後に対称性が分かれば, 積分因子が求まることを説明する. 常微分方程式 (1.1) に対応する全微分方程式 $Qdx - Pdy = 0$ の積分因子 R を求める. すなわちある Φ があって (1.2) が成り立つとする. 常微分方程式 (1.1) は $dy/dx = Q/P$ とみなせる. この方程式の対称性を与える 1 パラメータ変換群を $T_\epsilon(x, y) = (\hat{x}, \hat{y})$ とする. このとき次が成り立つ.

定理 2.3. 常微分方程式 (1.1) の対称性ベクトル場を $\mathbf{Y} = (\xi, \eta)$ とする. 積分因子 R は以下の式で与えられる.

$$R = \frac{1}{\xi Q - \eta P} = \frac{1}{\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}}, \quad \text{ただし} \quad \mathbf{X} = (P, Q).$$

定理 2.3 の証明. 上記の常微分方程式の解は等高線 $\Phi(x, y) = c$ (c は定数) で与えられる. T_ϵ は常微分方程式 (1.1) の解を常微分方程式 (1.1) の解に写すので, ある定数 $c(\epsilon)$ があって

$$\Phi(T_\epsilon(x, y)) = c(\epsilon)$$

となる. さて (2.6) の両辺を ϵ で微分して $\epsilon = 0$ を代入すると (1.2) より

$$\left. \frac{dc(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{d}{d\epsilon} \Phi(T_\epsilon(x, y)) \right|_{\epsilon=0} = \xi \Phi_x + \eta \Phi_y = R(\xi Q - \eta P).$$

左辺は定数 +1 としても一般性を失わない. よって題意が示された. $\square$

3. 反応拡散方程式への応用

3.1. 時間周期的な空間均一化. 反応拡散方程式系に関して [20, 11, 14] ではハミルトン構造という新しい視点から, Lotka-Volterra, Gierer-Meinhardt の 2 つのモデルが扱われている. とともに常微分方程式部分がハミルトン系で記述されていれば, 反応拡散系におけるリヤプノフ関数が空間積分により構成され, 力学系の理論によってオメガ極限集合が空間均一になること, より詳しくは空間的には平均化され, 時間的には周期的な状態に移行するというシナリオである. このフレームワークがどこまで一般化できるのか? それが本節で扱うトピックである. 反応拡散方程式系

$$(3.1) \quad u_t = \Delta u + P(u, v), \quad v_t = \Delta v + Q(u, v), \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$(3.2) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0,$$

$$(3.3) \quad u(\cdot, 0) = u_0, \quad v(\cdot, 0) = v_0, \quad x \in \Omega$$

を考える. ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は境界が滑らかな有界領域であり, ν は $\partial\Omega$ の外向きベクトルである. また P と Q は原点近傍で解析的な関数であり, 条件

$$(3.4) \quad P(0, 0) = Q(0, 0) = 0, \quad \partial_u P(0, 0) = \partial_v Q(0, 0) = 0, \quad \partial_u Q(0, 0) = -\partial_v P(0, 0) = 1$$

を満たす. すなわち対応する常部分方程式

$$(3.5) \quad \frac{dU}{dt} = P(U, V), \quad \frac{dV}{dt} = Q(U, V)$$

の原点は線形化方程式の渦心点である。さて原点が非線形方程式の (3.5) の渦心点であるための必要十分条件は $\mathbf{X} = P(U, V)\partial_U + Q(U, V)\partial_V$ が対称性ベクトル場 $\mathbf{Y} = \xi(U, V)\partial_U + \eta(U, V)\partial_V$ をもつことである。なぜならば (3.5) の第一積分が

$$(3.6) \quad \Phi(U, V) = 2 \int \frac{Q(U, V) dU - P(U, V) dV}{\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}}.$$

と構成できるからである。条件 (3.4) と $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mu \mathbf{X}$ から各ベクトル場の一次近似は

$$\mathbf{X} = (-V + \cdots)\partial_U + (U + \cdots)\partial_V, \quad \mathbf{Y} = (U + \cdots)\partial_U + (V + \cdots)\partial_V$$

であることがわかるから原点近傍で近似的に

$$\Phi(U, V) = 2 \int \frac{Q(U, V) dU - P(U, V) dV}{\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}} \approx -\log(U^2 + V^2).$$

したがって $e^{-\Phi} = (U^2 + V^2) + h.o.t.$ は原点の十分小さな近傍で狭義凸関数である。この仮定の下では原点 $(U, V) = (0, 0)$ の近傍 $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ があって $\mathcal{U} \setminus \{(0, 0)\}$ 内の任意の軌道は周期軌道である。

定理 3.1 ([1]). 非線形項 P, Q には (3.4) を満たし対称性ベクトル場がある仮定する。 $(u(x, t), v(x, t))$ は初期境界値問題 (3.1)-(3.3) の解とする。正数 c は十分小さいものとする。

$$(3.7) \quad (u_0(x), v_0(x)) \in \mathcal{U}_c := \{(U, V) \mid 0 \leq e^{-\Phi(U, V)} \leq c\} \subset \mathcal{U}$$

が任意の $x \in \Omega$ について成立するとする。このとき解 $(u(x, t), v(x, t))$ は時間大域的に存在して、対応する常微分方程式 (3.5) のある軌道 $\hat{O}$ があって

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_{C^2}((u(\cdot, t), v(\cdot, t)); \hat{O}) = 0.$$

すなわち $\hat{O}$ が一点 $(0, 0)$ のみでなければ、ある実数 l があって次が成立する：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|(u(\cdot, t+l), v(\cdot, t+l)) - (u(\cdot, t), v(\cdot, t))\|_{C^2(\Omega)} = 0.$$

証明には不変領域定理と以下のリアプノフ関数を用いる：

$$\int_{\Omega} e^{-\Phi(u(x, t), v(x, t))} dx$$

このリアプノフ関数は被積分関数が原点近傍で下に凸なので、不変領域定理から原点近傍からスタートした解は原点近傍にとどまったままである。十分時間がたつと、空間一様化が起きることは [9, 11, 14] と同様の議論で証明できるが詳細を書いておく。

Weinberger [22, 21] の不変領域定理を思い出そう。まず時間 $t \geq 0$ でパラメーター付けられた領域の族 $D(t) \subset \mathbb{R}^2$ を考える。 $\{D(t)\}_{t \geq 0}$ が (3.5) の正不変集合とは $(U(0), V(0)) \in D(0)$ ならば任意の $t > 0$ に対して $(U(t), V(t)) \in D(t)$ なることである。

補題 3.1. $d_u = d_v$ とする。 $D(t) \subset \mathbb{R}^2$ が各 $t \geq 0$ で凸であり、 $\{D(t)\}_{t \geq 0}$ が相流 (3.5) で正不変とする。もし $(u_0(x), v_0(x)) \in D(0)$ が任意の $x \in \Omega$ に対して成立するならば、 $(u(x, t), v(x, t)) \in D(t)$ が任意の $x \in \Omega$ と $t > 0$ に対して成り立つ。

定理 3.1 の証明. 関数 $F := e^{-\Phi}$ も対応する常微分方程式系の第一積分なので、方向場の意味から $(\partial_U F, \partial_V F) \parallel (Q, -P)$ が恒等的に成り立つ。よって

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(u(x, t), v(x, t)) dx &= \int_{\Omega} \partial_U F(u(x, t), v(x, t)) u_t(x, t) + \partial_V F(u(x, t), v(x, t)) v_t(x, t) dx \\ &= \int_{\Omega} \partial_U F(u(x, t), v(x, t)) \{d_u \Delta u(x, t) + P(u(x, t), v(x, t))\} \\ &\quad + \partial_V F(u(x, t), v(x, t)) \{d_v \Delta v(x, t) + Q(u(x, t), v(x, t))\} dx \\ &= \int_{\Omega} \partial_U F(u(x, t), v(x, t)) d_u \Delta u(x, t) + \partial_V F(u(x, t), v(x, t)) d_v \Delta v(x, t) dx \end{aligned}$$

したがって、ノイマン境界条件に注意して部分積分すると

$$\begin{aligned} (3.8) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(u(x, t), v(x, t)) dx &= - \int_{\Omega} \{d_u \partial_U^2 F(u(x, t), v(x, t)) |\nabla u(x, t)|^2 \\ &\quad + (d_u + d_v) \partial_{UV} F(u(x, t), v(x, t)) \nabla u(x, t) \cdot \nabla v(x, t) \\ &\quad + d_v \partial_V^2 F(u(x, t), v(x, t)) |\nabla v(x, t)|^2\} dx \end{aligned}$$

関数 $F = e^{-\Phi}$ は原点のある近傍で狭義凸関数なのでもし $|U|$ and $|V|$ が十分小さいなら十分小さな原点 $(U, V) = (0, 0)$ の近傍

$$\mathcal{U}_c = \{(U, V) \mid 0 \leq F(U, V) \leq c\} \subset \mathcal{U} \quad c > 0$$

があつて (3.8) の右辺は非正值である。さらに $d_u = d_v$ ならば補題 3.1 より $(u(x, t), v(x, t)) \in \mathcal{U}_c$ が任意の $x \in \Omega$ と $t \geq 0$ で成立。原点近傍での F の狭義凸性からある $K > 0$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(u(x, t), v(x, t)) dx \leq -K \int_{\Omega} \{|\nabla u(x, t)|^2 + |\nabla v(x, t)|^2\} dx \leq 0$$

さらに $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(u(x, t), v(x, t)) dx = 0$ がある $t \geq 0$ で成り立つことは $|\nabla u(\cdot, t)|^2 + |\nabla v(\cdot, t)|^2 \equiv 0$ in Ω と同値である。任意の $t \geq 0$ に対して (3.8) が非正であることから、以下の極限值が存在する:

$$F_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(u(x, t), v(x, t)) dx.$$

さて標準的な放物型評価から

$$O = \{(u(\cdot, t), v(\cdot, t))\}_{t \geq 0}$$

は $C^2(\bar{\Omega}) \times C^2(\bar{\Omega})$ でコンパクトなのでオメガ極限集合の

$$\omega(u_0, v_0) = \{(u_*, v_*) \mid \exists t_j \rightarrow \infty \text{ s.t. } \|(u(t_j), v(t_j)) - (u_*, v_*)\|_{C^2} = 0\}$$

も $C^2(\bar{\Omega}) \times C^2(\bar{\Omega})$ 内の連結コンパクトな不変集合である。よってある正に発散する部分列 $\{t_j\}$ があつて

$$(3.9) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(u(\cdot, t_j), v(\cdot, t_j)) dx = 0, \quad t > 0.$$

すなわち任意の $(u_*, v_*) \in \omega(u_0, v_0)$ に対して $|\nabla u_*(\cdot, t)|^2 + |\nabla v_*(\cdot, t)|^2 \equiv 0$. 特に $(u_*, v_*) \in \omega(u_0, v_0)$ は x に依存しない。オメガ極限集合 $\omega(u_0, v_0)$ の不変性から (u_*, v_*) が常微分方程式の解軌道上にのっていることがわかる。一方、常微分方程式 (3.5) の解軌道は閉曲線の族または原点をなしており、それらはすべて $F(U, V)$ の等高線である。ゆえに $F(u_*(t), v_*(t)) = F_{\infty} / \int_{\Omega} 1 dx$. また $F(U, V)$ が $\mathcal{U}_c$ の上で狭義凸関数であることから、極

限軌道 $\hat{O} \subset \mathcal{U}_c$ は F_∞ の値から一意に決まる．言い換えれば極限閉軌道は部分列 $\{t_j\}$ の取り方に依らないので

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_{C^2}((u(\cdot, t), v(\cdot, t)); \hat{O}) = 0,$$

すなわち (3.1)-(3.2) の解は対応する常微分方程式の閉軌道が原点に収束する。

次に後半の極限式を示す．放物型正則性評価と Ascoli-Arzelà の定理から ある部分列 $\{t'_j\} \subset \{t_j\}$ があって

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{t \in [-2l, 2l]} \|(u(\cdot, t + t'_j), v(\cdot, t + t'_j)) - (U(t), V(t))\|_{C^2} = 0,$$

ここで $(U(t), V(t)) \in \hat{O}$ は (3.5) の解である．よって

$$\begin{aligned} & \limsup_{j \rightarrow \infty} \|(u(\cdot, t + t'_j + l), v(\cdot, t + t'_j + l)) - (u(\cdot, t + t'_j), v(\cdot, t + t'_j))\|_{C^2} \\ & \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \|(u(\cdot, t + t'_j + l), v(\cdot, t + t'_j + l)) - (U(t + 2\pi), V(t + l))\|_{C^2} \\ & \quad + \lim_{j \rightarrow \infty} \|(u(\cdot, t + t'_j), v(\cdot, t + t'_j)) - (U(t), V(t))\|_{C^2} = 0 \end{aligned}$$

以上の議論より

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|(u(\cdot, t + \tau + l), v(\cdot, t + \tau + l)) - (u(\cdot, t + \tau), v(\cdot, t + \tau))\|_{C^2} = 0.$$

最後に $t = 0$ を代入すればよい． □

3.2. 特異被食捕食モデル．特異被食捕食型モデル (singular prey-predator model)

$$(3.10) \quad \begin{cases} B_t = d_b \Delta B + r_b B(1 - B/K) - C, & x \in \Omega, t > 0, \\ C_t = d_c \Delta C + r_c C(1 - C/B), & x \in \Omega, t > 0, \\ \partial B / \partial \nu = \partial C / \partial \nu = 0, & x \in \partial \Omega, t > 0, \\ B(\cdot, 0) = B_0 > 0, \quad C(\cdot, 0) = C_0 \geq 0, x \in \Omega \end{cases}$$

を考える．ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は境界が滑らかな有界領域であり， d_b, d_c, r_b, r_c, K は正定数， ν は $\partial \Omega$ の外向きベクトルである．ここで， B は孤島における鳥の密度 C は野生猫の密度が対応する．この問題 (3.10) は Holling-Tanner の捕食・被食モデルの特殊な場合であり，有限時間での絶滅現象を記述する方程式である．(3.10) に対応する常微分方程式系

$$(3.11) \quad B_t = r_b(1 - B/K)B - C, \quad C_t = r_c(1 - C/B)C$$

の解の挙動は完全に分類されている．新しい変数 $P := C/B$ を導入して，この問題を

$$(3.12) \quad B_t = [r_b(1 - B/K) - P]B, \quad P_t = [r_c - r_b + r_b B/K - (r_c - 1)P]P$$

に対する P の爆発問題と考え直すと以下が得られる：

- (A) $r_c > 1$ かつ $r_b > 1$ のとき (3.11) はただ一つの正値平衡点 $(B^*, C^*) := (K(1 - 1/r_b), K(1 - 1/r_b))$ をもち，大域的に漸近安定である．
- (B) $r_c > 1$ で $r_b < 1$ のときは (3.12) の平衡点 $(0, P^{**})$ は大域的に漸近安定である．ただし $P^{**} := (r_c - r_b)/(r_c - 1)$ とする．もとのシステム (3.11) の言葉で解釈しなおすと任意の初期値に対して解が $t \rightarrow \infty$ のとき $(0, 0)$ に収束する．
- (C) $r_c < 1$ のときは有限時間内で鳥が狩りつくされる現象が見出される．

反応拡散方程式 (3.10) に対して関数 $P = C/B$ を考えると $(B(x, t), P(x, t))$ は次の非線形偏微分方程式を満たす.

$$B_t = d_b \Delta B + r_b(1 - B/K)B - PB,$$

$$P_t = d_c \Delta P + (d_c - d_b) \frac{P}{B} \Delta B + 2 \frac{d_c}{B} \nabla B \cdot \nabla P + \left[r_c - r_b + \frac{r_b}{K} B - (r_c - 1)P \right] P.$$

なお未知関数 P の境界条件も斉次ノイマン条件となる. 反応拡散系 (3.10) において有限時間での絶滅 (quenching) と時間大域解の存在が³, 拡散係数が等しい $d_b = d_c$ の場合は [8], シャドウシステム $d_b = \infty$ の場合は [6] により調べられている. ここで *quenching* とは, ある有限の時間 $T < \infty$ があって $\liminf_{t \uparrow T-} \{\min_{\bar{\Omega}} B(\cdot, t)\} = 0$ であることを意味する. 拡散係数が異なる場合に関しては以下の結果が得られている.

定理 3.2 ([6]). $r_b, r_c > 1$, $2\pi^2 d_b + r_b \geq 2$, $d_b \geq d_c$ および $N = 1$, $\Omega = (0, 1)$ を仮定する. (3.10) の任意の解は時間大域的に存在して $t \rightarrow \infty$ のとき $B \rightarrow B^*$, $C \rightarrow C^*$.

証明には以下のリャプノフ関数を用いる:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ d_b \int_0^1 \left(\frac{B_x}{B} \right)^2 + \frac{d_b - d_c}{2r_c} \left(\frac{C_x}{C} \right)^2 + \frac{r_b}{K} \left(B - B^* - B^* \ln \frac{B}{B^*} \right) + \left(P - P^* - P^* \ln \frac{P}{P^*} \right) dx \right\} \\ & \leq - \int_0^1 (2\pi^2 d_b + r_b - 2) \left(\frac{B_x}{B} \right)^2 + \frac{\pi^2 (d_b - d_c) d_c}{r_c} \left(\frac{C_x}{C} \right)^2 + \frac{r_b^2}{K^2} (B - B^*)^2 + (r_c - 1) (P - P^*)^2. \end{aligned}$$

一方, $r_b + r_c = 2, r_b > 1$ の場合は常微分方程式 (3.11) の解挙動も (3.10) の解の挙動も未解明であった. Jong-Shenq Guo 氏と執筆者はダルブーの方法を用いてこれらの問題を論文 [9] において解決した.

定理 3.3 ([9]). $d_b = d_c = d$, $r_b + r_c = 2, r_b > 1$ とする. このとき (3.10) の不変領域 $\mathcal{U} := \{(B, C) \mid B, C \geq 0, B/K + C/(BP^{**}) \leq 1\}$ があって初期値が

$$I_0 := \{(B_0(x), C_0(x)) \mid x \in \Omega\} \text{ is a compact subset of } \mathcal{U}$$

を満たすとき, 常微分方程式 (3.12) の軌道 $\hat{\mathcal{O}}$ があって

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_{C^2}((B(\cdot, t), C(\cdot, t)); \hat{\mathcal{O}}) = 0.$$

すなわち $\hat{\mathcal{O}}$ が一点 (B^*, C^*) のみでなければ, ある実数 l があって

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|(B(\cdot, t+l), C(\cdot, t+l)) - (B(\cdot, t), C(\cdot, t))\|_{C^2(\Omega)} = 0.$$

定理 3.3 の証明. まず常微分方程式の解の挙動を解析しよう. システム (3.12) は平衡点 (B^*, P^*) で純虚数の固有値をもつ. 変数変換:

$$(3.13) \quad B - B^* = -B^* X, \quad P - P^* = (r_b - 1)X + \omega Y$$

により

$$X' = \omega Y - \omega XY,$$

$$Y' = -\omega X + \mu(r_b - 1)\{\omega Y^2 - \omega X^2 + 2(r_b - 1)XY\}$$

に変換できる. ただし $\omega^2 = (r_b - 1)(2 - r_b)$. この多項式ベクトル場に対する連立方程式系に対する不変因子と余因子は

$$f_1 = 1 - X, \quad g_1 = -Y$$

および

$$\begin{aligned} f_{\pm} &= 1 + (r_b - 1)X + (-\omega^{-1}(r_b - 1)^2 \pm \omega)Y, \\ g_{\pm} &= (r_b - 1)Y - (-\omega^{-1}(r_b - 1)^2 \pm \omega)X. \end{aligned}$$

ここで

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_{\pm} = \frac{-1 \pm (1 - r_b)}{2(r_b - 1)}$$

とおくと線形関係 $\lambda_1 g_1 + \lambda_+ g_+ + \lambda_- g_- = 0$ を得るので第一積分 $\Phi(X, Y) := f_1^{-1} f_+^{\lambda_+} f_-^{\lambda_-}$ が構成できる. $\Phi(X, Y)$ を (3.13) により (B, C) 座標に引き戻した関数 $\Psi(B, C) = \Phi(X, Y)$ は (3.11) の第一積分である. この第一積分は第一象限内で放物線で囲まれた領域 $\mathcal{U}$ で定義されていて (B, C) に関して下に凸であることが示せる. また平衡点が退化していないので, ある関数 $S(B, C)$ があってシステム (3.11) は以下の形にかける:

$$(3.14) \quad B_t = d\Delta B + S\Phi_C, \quad C_t = d\Delta C - S\Phi_B.$$

補題 3.1 より解は任意の $t > 0$ と $x \in \Omega$ に対して $(B(x, t), C(x, t)) \in \mathcal{U}$ を満たす. 汎関数の凸性と (3.14) から

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Phi(B(x, t), C(x, t)) dx = \int_{\Omega} \{\Phi_B B_t + \Phi_C C_t\} dx \\ &= d \int_{\Omega} \{\Phi_B (\Delta B + S\Phi_C) + \Phi_C (\Delta C - S\Phi_B)\} dx \\ &= -d \int_{\Omega} \{\Phi_{BB} |\nabla B|^2 + 2\Phi_{BC} \nabla B \cdot \nabla C + \Phi_{CC} |\nabla C|^2\} dx \leq 0. \end{aligned}$$

また等号が成り立つのは $|\nabla B(\cdot, t)|^2 + |\nabla C(\cdot, t)|^2 \equiv 0$ が Ω 上で成り立つときのみである. あとの議論は定理 3.1 の証明と同じである. $\square$

4. 非線型中心問題への応用

平衡点が線形渦心点の場合や退化しているときはポアンカレ写像を用いて周囲の軌道が閉じているか判定できる. ここでポアンカレ写像とは平衡点から引いた射線上の点を初期値として解軌道を考えたとき再びその射線に交わる位置を対応させる写像のことである. より詳しく平衡点が非線形渦心点なのか極限周期軌道が現れるかを知るにはポアンカレ写像のテイラー展開の係数を見ればわかる. だが問題はその係数の計算を直接に行えるのはよほど方程式が単純な場合のみなことである. そこでリャプノフが考えたのは平衡点周りで第一積分ないしはリャプノフ関数を構成すれば良いというものである. もしそれがそのような汎関数があるならば平衡点が非線形の渦心点なのかあるいは漸近安定なのかなどが簡単に判定できる. 上記の問題は与えられた微分方程式の平衡点の様子を調べることについての話だが, 次のような分類問題 (Center Problem) も考えることができるだろう.

原点が非線形 (局所的な) 渦心点になるような微分方程式をすべて特定せよ.

この問題を解く方針は基本的に次のようになっている ([15]). 原点を中心にもつ非線形項に関する候補を割り出すにはリャプノフによるべき級数を用いた第一積分の構成法を用いる. この方法では係数を求める作業が無限に続くので有限回のステップでは微分方程式の係数が満たす必要条件しか得ることができない. 実際に非線形項の候補が実際に十分条件を満たしていることをチェックするには第一積分を陽に書き下す. 多項式ベクトル場の場合そこで有効なのが, 既に紹介したダルブーの代数的可積分理論である.

4.1. 渦心点をもつ 2 次非線形項の分類. ここでは 2 次の多項式ベクトル場に関する非線形中心の分類問題を解説しよう. さまざまな証明方法があるようだが本節の議論は [3] に基づいている.

L を直線とする. また q を L 上の点とする. もしベクトル場 $\mathbf{X}(q)$ が L と平行ならば q はベクトル場 $\mathbf{X}$ と直線 L は接するという.

補題 4.1. $\mathbf{X}$ を 2 次のベクトル場, L を直線とする. このとき以下二つのいずれかが満たされる.

- (i) L は $\mathbf{X}$ の下で不変である.
- (ii) $\mathbf{X}$ は L 上に, 高々 2 つの接点を持つ (接点が $\mathbf{X}$ の零点である場合を含む).

補題 4.1 の証明. $\mathbf{X} = P\partial_x + Q\partial_y$, $L = \{(x, y) : ax + by + c = 0\}$ とする. このとき $\mathbf{X}$ の接点 (x, y) と L は連立方程式

$$aP(x, y) + bQ(x, y) = 0, \quad ax + by + c = 0$$

を満たす. この x, y に対する連立方程式の第一式が第二式で割り切れる場合はベクトル場 $\mathbf{X}$ が L 上で平行ベクトル場なので L はベクトル場 $\mathbf{X}$ の不変集合である. そうでない場合, 2 次曲線と直線は高々 2 つしか交点をもたない. すなわち接点もたかだか 2 つ. $\square$

この補題を用いると次のことが示せる.

補題 4.2. $\mathbf{X}$ を 2 次のベクトル場, C を $\mathbf{X}$ の閉軌道とする. このとき, 以下が成り立つ.

- (i) C の内部は凸集合である
- (ii) C の内部には高々一つの $\mathbf{X}$ の零点が存在する. またポワンカレ指数 1 を持ち非退化であり, 複素共役固有値を持つ.

補題 4.2 の証明. (i) を証明する. C を凸でないとする. ある線分であってその端点は C 内部にあって, 線分が C の囲む領域からはみ出すものがある. このとき, この線分を含む直線はベクトル場と少なくとも 3 つの接点を持つことが積分曲線の族を考えればわかる. このとき補題 4.1 と矛盾する.

(ii) を証明する. C が内部に 2 つ以上の平衡点を持つとする. 補題 4.1 よりこれらの平衡点を結ぶ直線上には他の平衡点は存在しない. 座標軸を回転させて水平方向に 2 つの平衡点があるとする. この 2 点を結ぶ直線を考えて平衡点を結ぶ線分とその外側の 2 つの半直線を考える. 閉軌道と半直線との交点でベクトル場は垂直方向の成分をもつが, その符号と平衡点の近くの半直線上でのベクトル場の垂直成分は同じ符号またはゼロでなければならない. なぜならもし符号が逆ならば半直線の閉軌道の内部の部分がベクトル場と接することになるが, それは 2 つの平衡点を結ぶ直線の上に平衡点を込めて 3 つもベクトル場との接点が存在してしまい補題 4.1 に矛盾するからである. もし平衡点の近くの半直線上でのベクトル場の垂直成分がゼロの場合も同様に矛盾を得る. さて 2 つの平衡点を結ぶ線分上ではどうなっているだろうか. この場合それらの平衡点を結ぶ直線をパラメーター t の一次関数で直線表示して $Q(x, y)$ に代入すると t に関する 2 次以下の多項式が得られる. 前半の議論からこの 2 次数関数は 2 つの零点をもち, その外側で異符号でなければならないが, これは放物線の形状を考えるとありえないことである. よって, 閉軌道の内部にはひとつしか平衡点は存在できない. 以下では閉軌道 C の内部の平衡点を原点 $(0, 0)$ として議論を行う.

閉軌道 C 内部のただひとつの平衡点は退化していないことを示すため, 閉軌道 C の内部の平衡点 $(0, 0)$ が退化していると仮定して矛盾を導く. 一般にベクトル場の各成分は 2 次の斉次多項式のときに原点を通る不変直線が存在することがわかる. これを用いるとそのような不変直線は閉軌道 C と接することはできないので微分方程式の解の一意性と矛盾する. さて 2 次の斉次多項式ベクトル場が原点を通る不変直線をもつことを示そう.

Q が 2 次の多項式の場合のみ考えればよい. $y = 0$ は不変直線なら証明は終わりなので, $y = 0$ は不変直線でないとする. ついでに $x = 0$ も不変直線でないとする. $y(t) = Ax(t)$ を満たす定数 A と解 $(x(t), y(t))$ が存在することを示せばよい. そのような解を微分方程式に代入すると多項式 P, Q の斉次性より

$$\begin{aligned} x^2(t)P(1, A) &= P(x(t), Ax(t)) = x'(t) = Ay'(t) = AQ(x(t), y(t)) \\ &= AQ(x(t), Ax(t)) = Ax^2(t)Q(1, A) \end{aligned}$$

$x(t)$ は恒等的には 0 ではないのでこれは A についての 3 次方程式 $AQ(1, A) - P(1, A) = 0$ を得るが, この方程式は少なくともひとつの実数解をもつ. すなわち非退化平衡点を通る不変直線が存在する. 以上の議論から 2 次多項式ベクトル場に対して閉軌道 C の内部にある平衡点は線形化したときに非退化である. また閉軌道の中のただひとつある平衡点のベクトル場の指数が 1 であることはポワンカレの指数定理からしたがう. なぜならば平面内のベクトル場の閉軌道の中の指数和が 1 だからである (たとえば [19] の定理 6.8.2).

ジョルダン標準形の定理を使って線形化部分がどのように表されるかを確認してみよう. 表現行列 A は以下 4 つのパターンに場合分けされる.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix}.$$

線形化行列が A_1 のとき微分方程式は以下のようにになる.

$$\frac{dx}{dt} = y + Bx^2 + Cxy + Dy^2, \quad \frac{dy}{dt} = Ex^2 + Fxy + Gy^2$$

閉軌道上の x 軸上の点に着目すると, その点 $(x, 0)$ でのベクトル場は $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}) = (Bx^2, Ex^2)$ となるから閉軌道はない. $E \neq 0$ のときは閉軌道が存在できないし, なぜならば閉軌道上のベクトル場の向きと両立できないからである. 一方, $E = 0$ のときは $y = 0$ の上にベクトル場との接点が原点も含めて 3 つ以上生じるので補題 4.1 に矛盾. あるいは $E = 0$ のときに x 軸が不変集合であることと微分方程式の解の一意性から閉軌道が x 軸をまたげないからと考えても良い. いずれの場合も原点を内部に含む閉軌道は存在しない.

線形化行列が A_2 のときの微分方程式は

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + Bx^2 + Cxy + Dy^2, \quad \frac{dy}{dt} = x + \lambda y + Ex^2 + Fxy + Gy^2.$$

線形化行列が A_3 のときベクトル場は以下のようにになる.

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + Bx^2 + Cxy + Dy^2, \quad \frac{dy}{dt} = \mu y + Ex^2 + Fxy + Gy^2.$$

いずれの線形化行列に対しても閉軌道上と y 軸上の点に着目すると点 $(0, y)$ でのベクトル場の第一成分は $\frac{dx}{dt} = Dy^2$. あとは上の議論と同様に考えればよい. 以上から線形化行列は A_4 しかありえないので補題のすべてが示された. $\square$

線形化行列が A_4 のとき常微分方程式を実係数で書き下すと以下のようにになる.

$$(4.1) \quad \frac{dx}{dt} = -y + gx^2 + hxy + iy^2, \quad \frac{dy}{dt} = x + jx^2 + kxy + ly^2.$$

もう少し変形してパラメーターを減らしていくことにする.

命題 4.1. 2 次のベクトル場 X が渦心点を持つとき, 線型変換や時間のスケーリングを行うことで常微分方程式 (4.1) は次の形に変換することができる.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - bx^2 - Cxy - dy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + ax^2 + Axy - ay^2. \end{cases}$$

命題 4.1 の証明. (4.1) において $j + l = 0$ であれば証明することはないので $j + l \neq 0$ とする. 回転による座標変換

$$X = x \cos \theta - y \sin \theta, \quad Y = x \sin \theta + y \cos \theta$$

を考える. Y のシステムに着目して両辺を t で微分して計算すると

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dx}{dt} \sin \theta + \frac{dy}{dt} \cos \theta = (-y + gx^2 + hxy + iy^2) \sin \theta + (x + jx^2 + kxy + ly^2) \cos \theta.$$

右辺の x, y を X, Y で表しなおして計算すると以下の2項を得る:

$$X^2 \text{ の係数} = g \cos^2 \theta \sin \theta - h \sin^2 \theta \cos \theta + i \sin^3 \theta + j \cos^3 \theta - k \sin \theta \cos^2 \theta + l \sin^2 \theta \cos \theta,$$

$$Y^2 \text{ の係数} = g \sin^3 \theta + h \sin^2 \theta \cos \theta + i \cos^2 \theta \sin \theta + j \sin^2 \theta \cos \theta + k \cos^2 \theta \sin \theta + l \cos^2 \theta.$$

それぞれの係数の和を取って

$$g \sin \theta + i \sin \theta + j \cos \theta + l \cos \theta = (g + i) \sin \theta + (j + l) \cos \theta = 0$$

が成り立つような θ が存在することは容易にわかる. □

以上から閉軌道が存在するには (4.2) が原点で渦心点を持つ場合であることがわかる. そのような係数の条件は以下で与えられる.

定理 4.1. 常微分方程式

$$(4.2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - bx^2 - Cxy - dy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + ax^2 + Axy - ay^2. \end{cases}$$

が原点を渦心点に持つことは以下のいずれかを満たすことは同値:

- (i) $A - 2b = C + 2a = 0$
- (ii) $C = a = 0$
- (iii) $b + d = 0$
- (iv) $C + 2a = A + 3b + 5d = a^2 + bd + 2d^2 = 0$

定理 4.1 の証明. 必要条件に関しては証明方針のみ説明する. ポワンカレ・リャプノフの方法により第一積分をベキ級数の形で形式的に求める. すなわち (1.1) が原点を渦心点に持つとして, ベキ級数

$$\Phi(x, y) = \Phi_2(x, y) + \Phi_3(x, y) + \cdots + \Phi_k(x, y) + \cdots$$

の形で保存量を探す. ただし Φ_k は以下のような次数 k の同次多項式である

$$\Phi_k(x, y) = \sum_{i+j=k} V_{i,j} x^i y^j$$

これが保存量である条件は以下の等式で与えられる.

$$P(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \eta_2 r^2 + \eta_4 r^4 + \cdots + \eta_{2i} r^{2i} + \cdots = 0.$$

ただし $r^2 = x^2 + y^2$. ここで r の偶数項しか現れない理由は [3] を見よ. η_{2k} の値の最初の数項を書き下すと

$$\begin{aligned}\eta_4 &= c_4(2a + C)(b + d), & \eta_6 &= c_6a(A - 2b)(b + d)(A + 3b + 5d), \\ \eta_8 &= c_8a(A - 2b)(b + d)^2(a^2 + bd + 2d^2).\end{aligned}$$

ただし c_4, c_6, c_8 は 0 でない実数である. システム (4.2) が原点で渦心点であるための必要条件としてこれらの値がゼロであれば良い. ここから必要条件を得ることが出来る. 実際に原点で渦心点であることを証明するには (4.2) の原点は線形渦心点なので第一積分を持つことを示せばよい.

(i) のとき (4.2) はハミルトニアン $H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{a}{3}x^3 + bx^2y - axy^2 + \frac{d}{3}y^3$ をもつハミルトン系 $\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}$ である.

(ii) のとき (4.2) は

$$\frac{dx}{dt} = -y - bx^2 - dy^2, \quad \frac{dy}{dt} = x + Axy$$

と書ける. これは, 変換 $(x, y, t) \rightarrow (-x, y, -t)$ において不変である. したがってタイムリバーシブルとなり, 原点では渦心点となる.

(iii) (4.2) の証明と同様に議論により (4.2) が $b + d = 0$ を満たすという条件は原点についての回転で保存されることが分かる. さらに $a \neq 0$ のとき原点についての回転により二つ目の式の x^2 の係数 $a' = a \cos^3 \theta + \alpha \cos^2 \theta \sin \theta + \beta \cos \theta \sin^2 \theta + d \sin^3 \theta$ を得る. ゆえに $a' = 0$ を満たす θ を発見することができる. したがって以下では $a = 0$ と仮定する. さらに $C \neq 0$ を仮定して良い. なぜならば $C = 0$ ならば (ii) に帰着するからである.

(A) $A \neq 0$ の場合を考える.

$$\frac{dx}{dt} = -y - bx^2 - Cxy + by^2, \quad \frac{dy}{dt} = x + Axy$$

は代数的不変曲線 $f_1 = 1 + Ay = 0, f_2 = (1 - by)^2 + C(1 - by)x - b(A + b)x^2 = 0$ とそれぞれに対応する余因子 $g_1 = Ax, g_2 = -2bx - Cy$ を持つ. 簡単な計算から $g_1 + g_2 = \text{div}(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$ なので定理 1.2 から $f_1^{-1}f_2^{-1}$ が積分因子となる. したがって, 第一積分を求めることができるため, 原点は渦心点.

(B) $A = 0$ の場合 f_1 は代数的不変曲線ではないが, $\text{div}(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}) = g_2$ なので f_2^{-1} は積分因子となり原点は渦心点.

最後に (iv) の場合を考える. もし $d = 0$ なら (ii) に帰着できるので $d \neq 0$ のときを考える. すなわち次の場合を考える:

$$\frac{dx}{dt} = -y + \frac{a^2 + 2d^2}{d}x^2 + 2axy - dy^2, \quad \frac{dy}{dt} = x + ax^2 + \frac{3a^2 + d^2}{d}xy - ay^2$$

このシステムは代数的不変曲線 $f_1 = (a^2 + d^2)((dy - ax)^2 + 2dy) + d^2 = 0$ とそれぞれに対応する余因子 $g_1 = 2(a^2 + d^2)x/d$ を持つ. したがって $\frac{5}{2}g_1 = \text{div}(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$ であるから定理 1.2 により $f_1^{-\frac{5}{2}}$ は積分因子となり, 原点は渦心点となる. $\square$

注意 4.1. この節で分類した非線形項がどのような相図を描くかは [18] に詳しい. 上の議論では積分因子までしか求めていなかった方程式に関しての第一積分を書き下してさらに細かく分類している.

これまで非線形の渦心点のことだけを考えてきていたが, ポワンカレ写像のテイラー係数が最初にどこでゼロでなくなるかが分かれば, 摂動に対して局所分岐する極限周期軌

道の数がどれくらいなのかがわかる。さらにポアンカレ・リャプノフのベキ級数を求めていくとき、その汎関数時間微分に対するある番号の係数とポアンカレ写像のある係数は定数倍を除いて一致することが知られている。「多項式ベクトル場に現れる極限周期軌道の数とその多項式の次数によって評価せよ」とはヒルベルトの第16問題の後半部分として知られている。この問題の部分的なケースとして渦心点をもつ平面上の多項式ベクトル場を多項式のシステムで摂動させてどれだけ極限周期軌道が分岐するかを解析することがある。これは局所ヒルベルトの16問題と関連しており渦心点を持つ多項式ベクトル場に多項式摂動を加えたときに、原点平衡点から分岐して現れる極限周期軌道の数の上界の値のことを平衡点の Cyclicity といい、その値の評価は今日も大きな未解決問題である。解析学の方面からだけでなく代数幾何 ([10]) や計算機代数 ([15]) の方面からも活発に研究されている。

4.2. リー括弧積. ベクトル場の座標変換とリー括弧積について説明する。基本的な方針は [7] に沿っている。\$U, V\$ を \$\mathbb{R}^n\$ の開集合とし、\$\Phi: U \rightarrow V\$ を可微分同相写像とする。\$U\$ の座標を \$\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)\$, \$V\$ の座標を \$\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^n)\$ とする。\$U\$ 上のベクトル場を

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n X^i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

と表し、\$V\$ の座標系でこのベクトル場を書き下したものを \$\varphi_*\mathbf{X}\$ とする。すなわち

$$\Phi_*\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(\mathbf{x}) X^j(\mathbf{x}) \right) \frac{\partial}{\partial y^i}$$

に \$\mathbf{x} = \Phi^{-1}(\mathbf{y})\$ を代入した以下のベクトル場のことである。

$$(\Phi_*\mathbf{X})(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(\Phi^{-1}(\mathbf{y})) X^j(\Phi^{-1}(\mathbf{y})) \right) \frac{\partial}{\partial y^i} = (D\Phi)_{(\Phi^{-1}(\mathbf{y}))} \mathbf{X}(\Phi^{-1}(\mathbf{y}))$$

ここで \$\Phi\$ のヤコビ行列を

$$D\Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial y^2}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \frac{\partial y^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$

と書いた。変数変換の基本性質を述べる。

補題 4.3. \$\Phi: U \rightarrow V, \Psi: V \rightarrow W\$ を可微分同相写像, \$\mathbf{X}, \mathbf{Y}\$ を \$U\$ 上のベクトル場, \$f\$ を \$U\$ 上の関数とすると次が成立する。

- (i) \$\Phi_*(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \Phi_*(\mathbf{X}) + \Phi_*(\mathbf{Y})\$
- (ii) \$\Phi_*(f\mathbf{X})(\mathbf{y}) = f(\Phi^{-1}(\mathbf{y}))\Phi_*(\mathbf{X})(\mathbf{y})\$
- (iii) \$(\Psi\Phi)_*(\mathbf{X}) = \Psi_*(\Phi_*(\mathbf{X}))\$

補題 4.3 の証明. (i) は \$(D\Phi)_{\Phi^{-1}}\$ が線形作用素であるから

$$\begin{aligned} \Phi_*(\mathbf{X} + \mathbf{Y})(\mathbf{y}) &= (D\Phi)_{\Phi^{-1}(\mathbf{y})}(\mathbf{X} + \mathbf{Y})(\Phi^{-1}(\mathbf{y})) \\ &= (D\Phi)_{\Phi^{-1}(\mathbf{y})}\mathbf{X}(\Phi^{-1}(\mathbf{y})) + (D\Phi)_{\Phi^{-1}(\mathbf{y})}\mathbf{Y}(\Phi^{-1}(\mathbf{y})) \\ &= \Phi_*(\mathbf{X})(\Phi^{-1}(\mathbf{y})) + \Phi_*(\mathbf{Y})(\Phi^{-1}(\mathbf{y})). \end{aligned}$$

(ii) を証明する.

$$\begin{aligned}\Phi_*(f\mathbf{X})(y) &= (D\Phi)_{\Phi^{-1}(y)}(f\mathbf{X})(\Phi^{-1}(y)) = (D\Phi)_{\Phi^{-1}(y)}\left(f(\Phi^{-1}(y))\mathbf{X}(\Phi^{-1}(y))\right) \\ &= f(\Phi^{-1}(y))(D\Phi)_{\Phi^{-1}(y)}\mathbf{X}(\Phi^{-1}(y)) = f(\Phi^{-1}(y))\Phi_*(\mathbf{X})(\Phi^{-1}(y)).\end{aligned}$$

(iii) を証明する. 合成写像のヤコビアンはヤコビアンの積になることを用いると

$$\begin{aligned}(\Psi\Phi)_*(\mathbf{X})(z) &= D(\Psi\circ\Phi)_{(\Psi\circ\Phi)^{-1}(z)}\mathbf{X}\left((\Psi\circ\Phi)^{-1}(z)\right) \\ &= (D\Psi)_{\Psi^{-1}(z)}D(\Phi)_{\Psi\circ\Phi^{-1}(z)}\mathbf{X}\left((\Psi\circ\Phi)^{-1}(z)\right) \\ &= (D\Psi)_{\Psi^{-1}(z)}\left(D(\Phi)_{\Phi^{-1}(y)}\mathbf{X}\left((\Phi^{-1}(y))\right)\right)_{|y=\Psi^{-1}(z)} \\ &= (D\Psi)_{\Psi^{-1}(z)}\left(\Phi_*\mathbf{X} \mid_{y=\Psi^{-1}(z)}\right) = \Psi_*(\Phi_*\mathbf{X})(z), \quad \forall z \in W.\end{aligned}$$

□

点 $p \in \mathbb{R}^n$ を通るベクトル場 $\mathbf{X}$ の積分曲線 $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ とは微分方程式

$$(4.3) \quad \frac{dc}{dt}(t) = \mathbf{X}(c(t)), \quad c(0) = p$$

の解のことである. このとき φ_t を p を $\varphi_t(p)$ に対応させる $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ の写像とする. すなわち $\varphi_t(p) = c(t)$ である. $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ をベクトル場 $\mathbf{X}$ が生成する 1 径数変換群という.

$$\mathbf{X}(p) = \left. \frac{d\varphi_t(p)}{dt} \right|_{t=0}$$

と常部分方程式の解の一意性定理より $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ と $\mathbf{X}$ は同一視できる.

ψ_s をベクトル場 $\mathbf{Y}$ が生成する 1 径数変換群とする. $\mathbf{Y}$ と $\mathbf{X}$ のリー括弧積 $[\mathbf{Y}, \mathbf{X}]$ は次式で定義されるベクトル場である.

$$[\mathbf{Y}, \mathbf{X}] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(\psi_{-\epsilon})_*(\mathbf{X}) - \mathbf{X}}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{D\psi_{-\epsilon}\mathbf{X}(\psi_\epsilon(p)) - \mathbf{X}}{\epsilon}$$

括弧積を計算してみよう. $\mathbf{X} = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\mathbf{Y} = \sum Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ 成分表示する. ψ_s の定義より

$$|\psi_\epsilon(p) - (p + \epsilon\mathbf{Y}(p))| < C\epsilon^2$$

となるような数 C が存在する. したがって

$$[\mathbf{Y}, \mathbf{X}](p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{D\psi_{-\epsilon}\mathbf{X}(p + \epsilon\mathbf{Y}(p)) - \mathbf{X}(p)}{\epsilon}$$

となる. ここで

$$\mathbf{X}(p + \epsilon\mathbf{Y}(p)) = \mathbf{X}(p) + \epsilon \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial X^i}{\partial x^j}(p) Y^j(p) \right) \frac{\partial}{\partial x^i} + O(\epsilon^2)$$

$\epsilon \rightarrow 0$ のとき $D\psi_{-\epsilon}$ は単位行列に収束するので

$$(4.4) \quad [\mathbf{Y}, \mathbf{X}](p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{D\psi_{-\epsilon}\mathbf{X}(p) - \mathbf{X}(p)}{\epsilon} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^j}(p) Y^j(p)$$

となる. 第一項を計算してみよう. ψ_s の定義より

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi_s(p) - p}{\epsilon} = -\mathbf{Y}(p)$$

が成り立つ. この式の両辺を p のベクトル値関数と見なして偏微分すると

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial \psi_{-\epsilon}}{\partial x^i}(p) - \frac{\partial}{\partial x^i}}{\epsilon} = -\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x^i}(p)$$

両辺に $X^i(p)$ を掛けて, i について 1 から n まで足すと

$$-\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x^i}(p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial \psi_{-\epsilon}}{\partial x^i}(p) X^i(p) - X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{D\psi_{-\epsilon} \mathbf{X}(p) - \mathbf{X}(p)}{\epsilon}.$$

したがって (4.4) より

$$[\mathbf{Y}, \mathbf{X}](p) = \sum_i \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i} Y^i(p) - \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x^i} X^i(p) \right).$$

定理 4.2. ベクトル場 $\mathbf{Y}, \mathbf{X}$ が生成する 1 径数変換群をそれぞれ ψ_t, φ_t とすると, 次の二つは同値である.

(i) $[\mathbf{Y}, \mathbf{X}] = 0$

(ii) $\varphi_t(\psi_s(p)) = \psi_s(\varphi_t(p))$ が任意の p, t, s に対して成立する.

定理 4.2 の証明. (i) $\implies$ (ii) の証明 $\mathbf{X}(s, p) = D\psi_{-s} \mathbf{X}(\psi_s(p))$ とおく.

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathbf{X}(s, p)}{ds} \right|_{s=s_0} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{D\psi_{-s_0-\epsilon} \mathbf{X}(\psi_{s_0+\epsilon}(p)) - D\psi_{-s_0} \mathbf{X}(\psi_{s_0}(p))}{\epsilon} \\ &= D\psi_{-s_0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{D\psi_{-\epsilon} \mathbf{X}(\psi_{s_0+\epsilon}(p)) - \mathbf{X}(\psi_{s_0}(p))}{\epsilon} \\ &= D\psi_{-s_0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(\psi_{-\epsilon})_* \mathbf{X}(\psi_{s_0}(p)) - \mathbf{X}(\psi_{s_0}(p))}{\epsilon} \\ &= D\psi_{-s_0} [\mathbf{Y}, \mathbf{X}](\psi_{s_0}(p)) = 0 \end{aligned}$$

よって $\mathbf{X}(s, p)$ は s で微分して 0 になるから s に依存しない. したがって

$$(D\psi_{-s}) \mathbf{X}(\psi_s(p)) = \mathbf{X}(s, p) = \mathbf{X}(0, p) = \mathbf{X}(p), \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

を得る. $D\psi_{-s} = (D\psi_s)^{-1}$ より

$$\mathbf{X}(\psi_s(p)) = (D\psi_s) \mathbf{X}(p), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall p \in \mathbb{R}^n.$$

p に $\varphi_t(p)$ を代入すると

$$\mathbf{X}(\psi_s(\varphi_t(p))) = (D\psi_s) \mathbf{X}(\varphi_t(p)).$$

一方 $c(t) = \psi_s(\varphi_t(p))$ とおくと合成関数の微分より

$$\begin{aligned} \frac{dc(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \psi_s(\varphi_t(p)) = (D\psi_s)_{(\varphi_t(p))} \frac{d}{dt} \varphi_t(p) \\ &= (D\psi_s)_{(\varphi_t(p))} \mathbf{X}(\varphi_t(p)) = \mathbf{X}(\psi_s(\varphi_t(p))) = \mathbf{X}(c(t)). \end{aligned}$$

したがって $c(t)$ はベクトル場 $\mathbf{X}$ の積分曲線である. $c(0) = \psi_s(p)$ と常微分方程式の解の一意性より $\psi_s(\varphi_t(p)) = c(t) = \varphi_t(\psi_s(p))$.

(ii) $\implies$ (i) の証明. $\psi_s(\varphi_t(p)) = \varphi_t(\psi_s(p))$ の両辺を t で微分し, $t = 0$ を代入すると

$$D\psi_s(p) \mathbf{X}(p) = D\psi_s(\varphi_t(p)) \left. \frac{d}{dt} \varphi_t(p) \right|_{t=0} = \mathbf{X}(\psi_s(p))$$

両辺にヤコビアン of 逆行列 $(D\psi_s)^{-1} = D\psi_{-s}$ をかけると

$$\mathbf{X}(p) = D\psi_{-s} \mathbf{X}(\psi_s(p)) = (\psi_s)_* \mathbf{X}(p) \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

したがって

$$[\mathbf{Y}, \mathbf{X}] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(\psi_{-\epsilon})_* \mathbf{X} - \mathbf{X}}{\epsilon} = 0.$$

□

括弧積が $\varphi_t \circ \psi_s$ と $\psi_s \circ \varphi_t$ の非可換性を 2 次式のオーダーで測っていることを簡単に説明する. 以下では関数は実解析的として形式的に計算を進める. 座標関数に対してずれを測れば十分だが一般の関数 f へのベクトル場の作用を考えるのが標準的である. ベクトル場 $\mathbf{X}$ に関数 f を作用させると

$$(4.5) \quad (\mathbf{X}f)(p) = \sum_{i=1}^n X^i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

を得る. また, 関数 $f(\varphi_t(p))$ を t で微分して (4.3) を用いると

$$\frac{d}{dt} f(\varphi_t(p)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi_t(p)) \frac{d\varphi_t^i(p)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi_t(p)) X^i(\varphi_t(p)).$$

$t = 0$ を代入して, 右辺に (4.5) を代入すると

$$(4.6) \quad \frac{d}{dt} f(\varphi_t(p)) \big|_{t=0} = (\mathbf{X}f)(p).$$

同様に

$$\frac{d}{ds} f(\psi_s(p)) \big|_{s=0} = (\mathbf{Y}f)(p).$$

$f(\varphi_t(p))$ の t についてのマクローリン展開に (4.6) を代入すると

$$(4.7) \quad f(\varphi_t(p)) = f(p) + (\mathbf{X}f)(p)t + O(t^2).$$

同様の計算から関数 g に対して

$$(4.8) \quad g(\psi_s(p)) = g(p) + (\mathbf{Y}g)(p)s + O(s^2).$$

まず (4.7) の p に $\psi_s(p)$ を代入すると

$$f(\varphi_t(\psi_s(p))) = f(\psi_s(p)) + (\mathbf{X}f)(\psi_s(p))t + O(t^2)$$

次に (4.8) に $g = \mathbf{X}f$ を代入することで

$$(\mathbf{X}f)(\psi_s(p)) = (\mathbf{X}f)(p) + (\mathbf{Y}\mathbf{X}f)(p)s + O(s^2).$$

したがって

$$\begin{aligned} f(\varphi_t(\psi_s(p))) &= f(\psi_s(p)) + \{(\mathbf{X}f)(p) + (\mathbf{Y}\mathbf{X}f)(p)s\}t + O(ts^2) + O(t^2) \\ &= f(p) + (\mathbf{Y}f)(p)s + (\mathbf{X}f)(p)t + (\mathbf{Y}\mathbf{X}f)(p)st + O(ts^2) + O(t^2) + O(s^2). \end{aligned}$$

また同様に

$$f(\psi_s(\varphi_t(p))) = f(p) + (\mathbf{X}f)(p)t + (\mathbf{Y}f)(p)s + (\mathbf{X}\mathbf{Y}f)(p)st + O(st^2) + O(s^2) + O(t^2).$$

これら二つの差を取ると

$$(4.9) \quad f(\varphi_t(\psi_s(p))) - f(\psi_s(\varphi_t(p))) = -[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f(p)st + O(s^2) + O(t^2) + 3 \text{ 次以上の項}.$$

この式に $s = 0$ を代入すると $0 = f(\varphi_t(p)) - f(\varphi_t(p)) = t$ のマクローリン展開を得るが, 右辺は 2 次以上の項から始まる t のみのべき級数なので $n \geq 2$ に対して (4.9) の t^n の係数は全て 0. (4.9) の右辺の s^n の係数についても同様である. よって

$$f(\varphi_t(\psi_s(p))) - f(\psi_s(\varphi_t(p))) = -[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f(p)st + 3 \text{ 次以上の項}.$$

すなわちベクトル場の括弧積 $[X, Y] = XY - YX$ はベクトル場の積分曲線に対して非可換性を 2 次のテイラー展開で比較した係数に対応する. なお [2] では定理 4.2 をこの観点とホモトピー空間の議論により証明している.

これを拡張した微分方程式の解軌道が対称性変換でそれ自身に写される条件が, 括弧積を用いてどのように記述されるか考えてみよう.

定理 4.3. ベクトル場 Y, X が生成する 1 径数変換群をそれぞれ ψ_t, φ_s とすると, 次の二つは同値である.

- (i) $[Y, X] = \mu X$ (μ は適当な関数)
- (ii) 任意の p, t, s に対してある $\delta_{t,s}$ があって $\varphi_{t+\delta_{t,s}}(\psi_s(p)) = \psi_s(\varphi_t(p))$.

定理 4.3 の証明. (i) $\implies$ (ii) の証明のみ行う. $X(s, p) = D\psi_{-s}X(\psi_s(p))$ に対して定理 4.2 の証明における最初の計算によると

$$\frac{dX(s, p)}{ds} = D\psi_{-s}[Y, X](\psi_s(p)) = D\psi_{-s}(\mu X)(\psi_s(p)) = \mu(\psi_s(p))X(s, p).$$

この常微分方程式の解は初期値 $X(0, p) = X(p)$ より

$$X(s, p) = \exp\left(\int_0^s \mu(\psi_\sigma(p))d\sigma\right)X(p).$$

両辺に $(D\psi_{-s})^{-1} = D\psi_s$ をかけて p に $\varphi_t(p)$ を代入すると

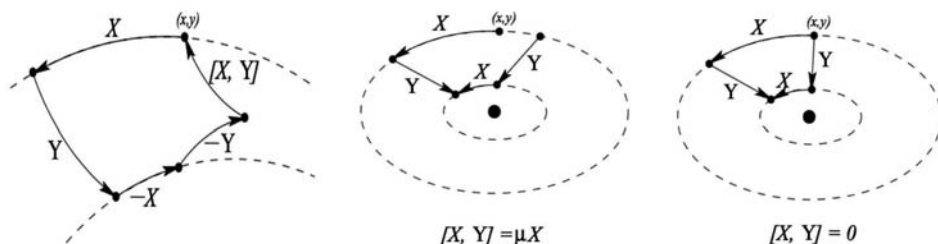
$$X(\psi_s(\varphi_t(p))) = \exp\left(\int_0^s \mu(\psi_\sigma(\varphi_t(p)))d\sigma\right)D\psi_sX(\varphi_t(p)).$$

したがって $c(t) := \psi_s(\varphi_t(p))$ の満たす常微分方程式は

$$(4.10) \quad \begin{cases} \frac{dc(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\psi_s(\varphi_t(p)) = D\psi_sX(\varphi_t(p)) = \exp\left(-\int_0^s \mu(\psi_\sigma(\varphi_t(p)))d\sigma\right)X(c(t)), \\ c(0) = \psi_s(p). \end{cases}$$

これより $\frac{dc(t)}{dt} \parallel X(c(t))$ なので, $c(t) = \psi_s(\varphi_t(p))$ はベクトル場 X の積分曲線の上を異なる速度で動く. t は固定されているので s に依存するある $\delta_{t,s}$ があって $\varphi_{t+\delta_{t,s}}(\psi_s(p)) = \psi_s(\varphi_t(p))$. なお対称性に関わるこの基本定理は [12] にも別方針の証明が書いている. $\square$

4.3. 閉軌道の周期. 定理 4.3 の意味を説明しよう. まずベクトル場の括弧積 $[X, Y] = XY - YX$ はベクトル場の積分曲線に対して非可換性を 2 次のテイラー展開で比較した係数に対応する. したがって $[X, Y] = \mu X$ の意味は非可換性のズレがちょうどベクトル場 X の積分曲線方向にぴたりと合致しているということである. ゆえに Y の 1 パラメーター変換群は X に付随する微分方程式の解を再びその微分方程式の解に写す. これは対称性変換の定義そのものである. 特に X の積分曲線が渦心点の周りに分布しているとき, ベクトル場 Y によって X に対する閉軌道が閉軌道に写されることがわかる. さて $[X, Y] = 0$ の意味は 2 次のズレがまったくないということなので, 渦心点周りのすべての解が同じ周期でいっせいに平衡点の周りを一周することがわかる.



より定量的な解析を行うため、引き続き括弧積積が $[\mathbf{Y}, \mathbf{X}] = \mu \mathbf{X}$ を満たすときを考えよう。ベクトル場 $\mathbf{V}$ に付随する微分方程式が原点を渦心点にもつと仮定する。 $\mathbf{X}$ に対応する 1 パラメーター群を φ_t とおく。解軌道と原点を通る右半直線との交点の原点からの距離を r とし、その点を通る解軌道を γ とおく。 γ を $\mathbf{Y}$ に付随する 1 パラメーター群を ψ_s このとき γ の周期を $T = T_r$ とおく。さて解 γ を対称性ベクトル場の 1 パラメーター群 ψ_s で動かして得られる曲線の周期を計算して γ からどれだけ変化するかを計算すれば、周期が r の微小変化に対してどのように変化するかがわかる。このときの変動する周期を $T_r(s)$ と表せる。

このとき、定理 4.3 の証明より (4.10) を満たす。これの両辺の逆数を取り両辺 γ 上を弧長パラメーター l で積分すると

$$T_r(s) = \oint_{\gamma} dt = \oint_{\gamma} \frac{\exp\left(\int_0^s \mu(\psi_{\sigma}(\varphi_t(p))) d\sigma\right)}{\|\mathbf{X}(c)\|} dl.$$

ここで r を固定して $\frac{d}{ds}T(r, 0)$ を計算すると

$$\left. \frac{d}{ds}T_r(s) \right|_{s=0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (T(r, s) - T(r, 0)) = \frac{1}{s} \frac{\exp\left(\int_0^s \mu(\psi_{\sigma}(\varphi_t(p))) d\sigma\right) - 1}{\|\mathbf{X}(c)\|} dl$$

を得る。分子に着目すると $s \approx 0$ のとき

$$\exp\left(\int_0^s \mu(\psi_{\sigma}(\varphi_t(p))) d\sigma\right) \approx 1 + \int_0^s \mu(\psi_{\sigma}(\varphi_t(p))) d\sigma.$$

したがって

$$\left. \frac{d}{ds}T_r(s) \right|_{s=0} = \lim_{s \rightarrow 0} \oint_{\gamma} \frac{\frac{1}{s} \int_0^s \mu(\psi_{\sigma}(\varphi_t(p))) d\sigma}{\|\mathbf{X}(c)\|} dl.$$

ψ_s は $s \rightarrow 0$ で id に収束するので

$$\left. \frac{d}{ds}T_r(s) \right|_{s=0} = \lim_{s \rightarrow 0} \oint_{\gamma} \frac{\mu \varphi_t(p)}{\|\mathbf{X}(c)\|} dl = \int_0^{T_r(0)} \mu(\varphi_t(p)) dt.$$

よって $r = 0$ の近傍で常に

$$(4.11) \quad \int_0^{T_r(0)} \mu(\varphi_t(p)) dt = 0$$

ならば原点周りのすべての周期軌道が同じ周期をもつ。特に $\mu = 0$ のとき等時性が成り立つ。ここでは [7] の本につながる形でできるだけ初等的に証明を書いた。[4] は変分方程式に基づくより短い証明がなされている。

この (4.11) を満たす 2 次多項式ベクトル場は分類されている。線形変換と時間スケールリングにより以下の 4 つに分類される ([16, 17]).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -y + xy, \\ \frac{dy}{dt} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2, \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -y + xy, \\ \frac{dy}{dt} = x + y^2, \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -y + xy, \\ \frac{dy}{dt} = x + \frac{1}{4}y^2, \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -y + xy, \\ \frac{dy}{dt} = x - \frac{1}{2}x^2 + 2y^2. \end{array} \right\}.$$

最初の方程式は複素変数で見ると綺麗になる。実際、 $z = x + iy$ とおくと $z' = iz + z^2/2i$ となる。これを変数分離して不定積分を計算すると

$$i \log(z - 2) - i \log z = t - C.$$

原点の周りの十分小さな閉軌道 γ (半径 2 の円周に含まれるもの) に沿って値の変化量を計算すると複素対数関数の多価性から周期が 2π であることがわかる. あるいはつぎのように考えても良い

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{iz + z^2/2i} = \int_{\gamma} dt.$$

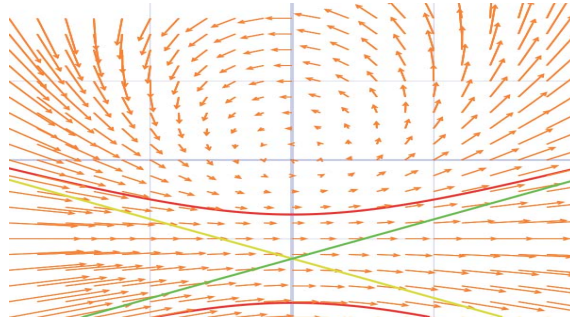
左辺で留数定理を使うと原点での被積分関数の留数が $1/i$ なので留数定理から周期 2π を得る. 後者の議論によって, $S(z)$ を 2 次以上の多項式としたとき $z' = iz + S(z)$ は原点を等時的な平衡点にもつことがわかる. 2 番目の微分方程式を極座標表示すると $r' = r^2 \sin \theta$ および $\theta' = 1$ を得る. すなわち偏角に注目すると時間周期 2π で同じ動径方向に解軌道が戻ってくる. 初期時刻の原点からの距離 r に対して時刻 2π での原点からの距離 $\Pi(r)$ を対応させるポアンカレ写像を計算するため

$$\frac{dr}{d\theta} = r^2 \sin \theta$$

を変数分離で解くと

$$\int_r^{\Pi(r)} \frac{dr}{r^2} = 0.$$

よって $\Pi(r) = r$ であるから原点の周辺の解軌道はすべて閉軌道でそれらはすべて同じ周期 2π をもつ. なおベクトル場を描くと下図のようになるので, 閉軌道は原点の周りのみで離れたところでは軌道が発散している. このようにポアンカレ写像や対称性ベクトル場の議論は局所的な話なので遠方でも軌道が閉じていることを保証しているわけではない.



3 番目の方程式に関しては変数変換

$$u = \frac{8y}{y^2 - 4x + 8}, \quad v = \frac{2y^2 - 8x}{y^2 - 4x + 8}$$

とにおいて u, v に関する微分方程式を立てると普通の調和振動の方程式になってしまう. 調和振動の任意の解は一定の周期をもつ閉軌道なのでもとの方程式の原点の近傍も等時的である. しかもその第一積分は

$$u^2 + v^2 = 4 + 64 \frac{1 - x}{(y^2 - 4x + 8)^2}$$

で与えられる. 4 番目の方程式もしかるべき変換で調和振動に変換できる. このような調和振動子の方程式への変換の仕方については [16] を参照せよ.

REFERENCES

- [1] A. Poh and M. Shimojo, *Asymptotic behaviors of solutions to a reaction-diffusion equation with isochronous nonlinearity*, J. Math. Anal. Appl. **462** (2018), 1099–1108.
- [2] V.I. アーノルド (著), 安藤 韶一 (翻訳), 蟹江 幸博 (翻訳), 丹羽 敏雄 (翻訳), 古典力学の数学的方法, 岩波書店 2003.
- [3] F. Dumortier, J. Llibre and J. C.Artes, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Springer UTX, 2006.
- [4] E. Freire, A. Gasull and A. Guillamon, *First derivative of the period function with applications*. J. Differential Equations **204** (2004), 139–162.
- [5] 藤田 宏 (翻訳), 19 世紀の数学〈3〉チェビシェフの関数論・常微分方程式・変分法・差分法, 朝倉書店 2009.
- [6] A. Ducrot, J-S Guo, and M. Shimojo, *Behaviors of solutions for a singular Prey-Predator model and its shadow system* Journal of Dynamics and Differential Equations, **30** (2018), 1063-1079.
- [7] 深谷賢治, 解析力学と微分形式, 岩波書店, 現代数学への入門, 2004.
- [8] S. Gaucel, M. Langlais, *Some remarks on a singular reaction-diffusion arising in predator-prey modelling*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, **8** (2007), 61–72.
- [9] J.S. Guo and M. Shimojo, *Spatio-temporal oscillation for a singular predator-prey model*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **459** (2018), 1–9.
- [10] Y. Ilyashenko, S. Yakovenko, Lectures on Analytic Differential Equations, A.M.S. Graduate Studies in Mathematics **86**, 2008.
- [11] G. Karali, T. Suzuki and Y. Yamada, *Global-in-time behavior of the solution to a Gierer-Meihardt system*, DCDS-A **33** (2013), 2885–2900.
- [12] 高野一夫訳, リー群論の応用—コーエンの微分方程式, 森北出版株式会社, 1971.
- [13] 川又雄二郎 (編集), 坪井俊 (編集), 楠岡成雄 (編集), 新井仁之 (編集) 朝倉数学辞典, 2016.
- [14] E. Latos, T. Suzuki and Y. Yamada, *Transient and asymptotic dynamics of a prey-predator system with diffusion*, Math. Meth. Appl. Sci. **35** (2012), 1101–1109.
- [15] V. Romanovski and D. S.Shafer, *The center and Cyclicity Problems A Computational Algebra Approach*, 2009.
- [16] P. Mardesic, C. Rousseau and B. Toni, *Linearization of isochronous center*, Journal of differential equations **121** (1995), 67–108.
- [17] J. Chavarriga and M. Sabatini, *A survey of isochronous centers*, Qualitative Theory of Dynamical Systems **1** (1999), 1–70.
- [18] D. Schlomiuk, *Algebraic particular integrals, integrability and the problem of center*, Transactions of the A.M.S. **338** (1993), 799-841.
- [19] Steven H. Strogatz (著), 田中久陽 (翻訳), 中尾裕也 (翻訳), 千葉逸人 (翻訳), 非線形ダイナミクスとカオス, 丸善出版, 2015.
- [20] 鈴木貴, 大塚浩史, 楢門型方程式と近平衡力学系〈下〉自己組織化のポテンシャル, 朝倉数学大系, 2015.
- [21] 柳田英二, 反応拡散方程式, 東京大学出版会, 2015.
- [22] H. Weinberger, *Invariant sets for weakly coupled parabolic and elliptic systems*, Rend. Mat. **8** (1975), 295–310.