

射影古典群の分類空間について

京大 教養 三村 護

京大 理 河野 明

序 G を compact, connected Lie group, BG をその分類空間, p を素数とする。 $H^*(G; \mathbb{Z}_p)$ から $H^*(BG; \mathbb{Z}_p)$ を求める問題は, $H^*(G; \mathbb{Z})$ が p -torsion free の場合をのぞいて, 一般にむづかしいようである。

この報告では, $H^*(BPSp(2n+1); \mathbb{Z}_2)$ についての Kono [5] の結果と $H^*(BPU(4n+2); \mathbb{Z}_2)$, $H^*(BPO(4n+2); \mathbb{Z}_2)$ についての Kono-Mimura [7] の結果について述べる。これらの Lie groups では $\pi_1(G)$ が 2-torsion を持ち, 従って $H^*(G; \mathbb{Z})$ も 2-torsion を持つ。

方法としては, Baum-Browder の結果を利用して, Eilenberg-Moore spectral sequence の E_2 -term を計算しこれが collapse することを示す。 $H^*(BPSp(2n+1); \mathbb{Z}_2)$ に関する方法は [5] とは異なっている。

この報告では $\mathbb{Z}_p$ は標数 p の素体と位数 p の巡回群の両方を

表わす。

1. 射影古典群の cohomology

次の結果は Borel による。

補題 1.1 (Borel [3])

$$(1.1) \quad H^*(P\mathrm{Sp}(2n+1); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[t]/(t^4) \otimes \wedge (x_7, x_{11}, \dots, x_{8n+3}),$$

$$(1.2) \quad H^*(P\mathrm{U}(4n+2); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[t]/(t^4) \otimes \wedge (x_5, x_7, \dots, x_{4n+3}),$$

$$(1.3) \quad H^*(P\mathrm{O}(4n+2); \mathbb{Z}_2) = \Delta(t, x_2, x_3, \dots, x_{4n+1}),$$

$$\text{ただし } \deg x_i = i \quad \deg t = 1.$$

PG の定義と くわしい結果は Borel [3] を見よ。

定義 1.2 $G(2n) = \mathrm{SU}(2n) / \{\pm I_n\}$ とおく

定理 1.3 (Baum-Browder [1])

補題 1.1 の生成元を次の条件をみたすようにとれる。

$$(1.1) \quad \text{で} \quad \overline{\phi}(x_i) = \overline{\phi}(t) = 0,$$

$$(1.2) \quad \text{で} \quad \overline{\phi}(t) = \overline{\phi}(x_{4j+1}) = 0$$

$$\overline{\phi}(x_{4j+3}) = x_{4j+1} \otimes t^2 \quad j=1, 2, \dots, 2n,$$

$$(1.3) \quad \text{で} \quad \overline{\phi}(t) = \overline{\phi}(x_{2j}) = 0$$

$$\overline{\phi}(x_{2j+1}) = x_{2j} \otimes t \quad j=1, 2, \dots, 2n,$$

ただし $\overline{\phi}$ は群の積から induce された reduced diagonal map.

2. $Sp(n)$ の有限部分群

$Sp(1)$ と絶対値 1 の四元数を同一視する。

定義 2.1

$$L = \{ \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k \} \subset Sp(1)$$

$$\tilde{W}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_n \end{pmatrix} \in Sp(n); \varepsilon_i = 1 \text{ or } -1 \right\},$$

$$\tilde{V}(n) = \{ \alpha \cdot A; A \in \tilde{W}(n), \alpha \in L \} \subset Sp(n).$$

補題 2.2

- (i) $\tilde{W}(n)$ は $Sp(n)$ の従って $\tilde{V}(n)$ の maximal dimensional elementary 2-group である。 $\tilde{W}(n) \cong (\mathbb{Z}_2)^n$.
- (ii) $\tilde{V}(n)$ は extra-special 2-group [4] である。

補題 2.3

$$H^*(B\tilde{V}(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[t_1, \dots, t_{n+1}] / (r_2, r_3) \otimes \mathbb{Z}_2[e]$$

ここで $\deg t_i = 1$ $\deg r_i = i$, $\deg e = 4$ さらに r_2, r_3 は $\mathbb{Z}_2[t_1, \dots, t_{n+1}]$ の正則列 (regular sequence)

証明 $\#(\tilde{V}(n)) = 2^{n+2}$, $\#(\tilde{W}(n)) = 2^n$ に Quillen [10] の定理 4.6 を使え。

3. $H^*(BPSp(2n+1); \mathbb{Z}_2)$

ここでは, $H^*(BPSp(2n+1); \mathbb{Z}_2)$ を計算する。方法としては, Quillen の有限性定理を使う。より初等的な証明は Kono [5] にある。

補題 3.1 (Borel [2])

$$H^*(BSp(n); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\vartheta_1, \dots, \vartheta_n] \quad \deg \vartheta_i = 4i,$$

$H^*(Sp(n); \mathbb{Z}) = \bigwedge (\chi_3, \chi_7, \dots, \chi_{4n-1})$ で χ_{4i-1} は *universally transgressive* with $\tau(\chi_{4i-1}) = \vartheta_i$.

定理 3.2 (Quillen の有限性定理)

G を compact Lie 群 H をその閉部分群とする。 k を可換体とするとき $H^*(BH; k)$ は finite $H^*(BG; k)$ module になる。

(cf. Quillen [12] § 2)

X_i, Y_j を適当な $\deg$ をもつ変数とする。

$$R = k[X_1, \dots, X_n], \quad R' = k[Y_1, \dots, Y_{n+h}] / (r_1, \dots, r_h)$$

を graded ring とし, $r_1, \dots, r_h$ はこの意味で homogeneous な元からなる $k[Y_1, \dots, Y_{n+h}]$ の正則列 (Quillen [10] §1) とする。 $f: R \rightarrow R'$ を $\deg$ を保つ ring homomorphism とする。

補題 3.3 上の条件の下で

R' は finite R -module $\iff f(x_1), \dots, f(x_n)$ が R' の正則列.

注意 3.4 補題 3.3 の条件下で, R' は free R -module

これらの事実の証明には R, R' が Cohen-Macaulay ring であることを利用する (Nagata [9], Quillen [10])

定義 3.5 $F_n = Sp(n)/\mathcal{V}(n)$ とおく。

注意 3.6 F_1 は Briskorn variety $V(2,3,3) \cap S_E$ になる。

(cf Milnor [8] p 80)

定理 3.7 fibering $F_n \xrightarrow{j} B\tilde{V}(n) \xrightarrow{i} BSp(n)$ に関する Serre のスペクトル列は collapse する ([14])。

(証明) 定理 3.2 と補題 3.3 より $i^*(g_1), \dots, i^*(g_n)$ は正則列になる。fibering $Sp(n) \rightarrow F_n \rightarrow B\tilde{V}(n)$ に関する Serre のスペクトル列 $(E_r^{p,q})$ で各 χ_{4i-1} は transgressive で $\tau(\chi_{4i-1}) = i^*(g_i)$ 。よって $E_\infty^{p,q} = 0$ if $q \neq 0$ 。従って j^* は onto。よって定理が証明される。Q.E.D.

系 3.8 $H^*(F_n; \mathbb{Z}_2) \cong H^*(B\tilde{V}(n); \mathbb{Z}_2) / (Im i^{*+})$

従って $P.S.(F_n) = (1-t^2)(1-t^3)(1-t^8)(1-t^{12}) \cdots (1-t^{4n}) / (1-t)^{n+1}$

定理 3.9 (Rothenberg - Steenrod [13])

G を compactly generated associative H -space とする。

この時 次の条件を満たすスベクトル列が存在する。

$$E_2 = \text{Cotor}_{(k, k)}^{H^*(G; k)} \quad E_\infty = q_*(H^*(BG; k))$$

注意 3.10 上のスベクトル列は、最初 Eilenberg - Moore によって代数的に構成された。以下では、Eilenberg - Moore のスベクトル列と呼ぶ。

補題 3.11 $\text{Cotor}_{(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)}^{H^*(PSp(2n+1); \mathbb{Z}_2)} = \mathbb{Z}_2[\bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_8, \bar{y}_{12}, \dots, \bar{y}_{8n+4}]$

補題 3.12 $H^*(BV(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\mu_1, \dots, \mu_{n+1}] \quad \deg \mu_i = 1$

($V(n) = \tilde{V}(n) / \{\pm I_n\} \cong (\mathbb{Z}_2)^{n+1}$)

定理 3.13

$G = PSp(2n+1)$, $k = \mathbb{Z}_2$ のとき, Eilenberg - Moore のスベクトル列は collapse する。従って

$$H^*(BPSp(2n+1); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[y_2, y_3, y_8, y_{12}, \dots, y_{8n+4}]$$

ここで $\tau(t) = y_2$, $\tau(t^2) = y_3$, $\tau(x_{4i+1}) = y_{4i}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{(証明)} & & B\hat{V}(2n+1) & \longrightarrow & BSp(2n+1) \\
 & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & BV(2n+1) & \xrightarrow{\tau} & & BPSp(2n+1)
 \end{array}$$

の下 fibering に関する Serre のスペクトル列より

$$P.S.(BPSp(2n+1)) \gg \{(1-t^2)(1-t^3)(1-t^8)(1-t^{12}) \cdots (1-t^{8n+4})\}^{-1}$$

ここで $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i, \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i \in \mathbb{Z}[[t]]$, $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \ll \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$ とは,
 $\forall i \geq 0$ に対して $a_i \leq b_i$

一方 Eilenberg - Moore のスペクトル列より

$$P.S.(BPSp(2n+1)) \ll \{(1-t^2)(1-t^3)(1-t^8)(1-t^{12}) \cdots (1-t^{8n+4})\}^{-1}.$$

よって上の二つのスペクトル列は どちらも collapse する。

下の結果は標準的な議論による。 Q. E. D.

系 3.14 $\tau: BV(2n+1) \longrightarrow BPSp(2n+1)$ とする。

(i) $\tau^*: H^*(BPSp(2n+1); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^*(BV(2n+1); \mathbb{Z}_2)$ injective

(ii) $V(2n+1)$ は $PSp(2n+1)$ の maximal dimensional elementary

2-graph である。

注意 3.15 Quillen [11] に従えば, " $V(2n+1)$ は $PSp(2n+1)$ の mod 2 cohomology を detect する" と言える。より一般な議論は Kono [6] を見よ。

$$4. \quad H^*(BPU(4n+2); \mathbb{Z}_2) \simeq H^*(BPO(4n+2); \mathbb{Z}_2)$$

ここでは, Kono-Mimura [7] の結果を紹介する。証明はこの論文を見られたい。

S が odd の時 $H^*(PU(2S); \mathbb{Z}_2) \cong H^*(G(2S); \mathbb{Z}_2)$, $H^*(BPU(2S); \mathbb{Z}_2) \cong H^*(BG(2S); \mathbb{Z}_2)$ 故 $H^*(BG(2S); \mathbb{Z}_2)$ を調べる。

$$A = H^*(PU(4n+2); \mathbb{Z}_2) = H^*(G(4n+2); \mathbb{Z}_2) \text{ とおく。}$$

$$\text{定理 4.1} \quad \text{Cotor}^A(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[a_2, a_3, y(I), x_{8l+8}]/I$$

ここに I は $a_3 y(I)$, と他の homogeneous element で生成される ideal である。 $\deg y(I)$, $\deg x_{8l+8}$ は even. ぐわしくは [7] を見よ。計算には Shimada-Iwai [15] の方法を用いる,

定理 4.2 $G = PU(4n+2)$ ($G(4n+2)$), $k = \mathbb{Z}_2$ の時 Eilenberg-Moore のススペクトル列は collapse する。

系 4.3 $\mathbb{Z}_2$ 上の module として

$$H^*(BPU(4n+2); \mathbb{Z}_2) \cong \text{Cotor}^A(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$$

証明には次の inclusion とススペクトル列の自然性を使う。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{Sp}(2n+1) & \xrightarrow{\tilde{\Psi}} & \mathrm{SU}(4n+2) \\
 \downarrow & \wr & \downarrow \\
 \mathrm{PSp}(2n+1) & \xrightarrow{\tilde{\Psi}} & \mathrm{G}(4n+2)
 \end{array}$$

ここで $\tilde{\Psi}$ は $H \rightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j$ で導かれる inclusion である。

α_3 以外の生成元がすべて even $\deg$ であることに注意せよ。

対応する $\mathrm{PO}(4n+2)$ の結果は,

定理 4.2' $G = \mathrm{PO}(4n+2)$, $k = \mathbb{Z}_2$ の時 Eilenberg-Moore のスペクトル列は collapse する。

系 4.3' $\mathbb{Z}_2$ 上の module として

$$H^*(\mathrm{BPO}(4n+2); \mathbb{Z}_2) \cong \mathrm{Cotor}_{H^*(\mathrm{PO}(4n+2); \mathbb{Z}_2)}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2).$$

参 考 文 献

[1] P. F. Baum - W. Browder: The cohomology of quotients of classical groups, *Topology* 3 (1965), 303-336.

[2] A. Borel: Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, *Ann. of Math.*, 57 (1953), 115-207.

[3] A. Borel; Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes, *Amer. J. Math.*, 80 (1954), 273-342.

[4] D. Gorenstein: *Finite Groups*, New York, Harper and Row 1968

[5] A. Kono; On cohomology mod 2 of the classifying spaces of non-simply connected classical Lie groups (to appear).

[6] A. Kono; Cohomology of finite groups and classifying spaces of compact Lie groups (to appear).

[7] A. Kono - M. Mimura; On the cohomology of the classifying

spaces of $PSU(4n+2)$ and $PO(4n+2)$ (to appear).

[8] J. Milnor: Singular points of complex hypersurfaces, Ann. of Math. Studies 61, Princeton.

[9] M. Nagata: Local rings, Interscience Publ. (1962).

[10] D. Quillen: The mod 2 cohomology rings of extra-special 2-groups and Spinor groups, Math. Ann., 194 (1971), 197-212.

[11] D. Quillen: The Adams conjecture, Topology 10 66-80.

[12] D. Quillen: The spectrum of an equivariant cohomology ring: I, Ann. of Math., 94 (1971), 549-572.

[13] M. Rothenberg - N. E. Steenrod: The cohomology of classifying spaces of H-spaces, Bull. of A. M. S., 71 (1965), 872-875.

[14] J.-P. Serre: Homologie singulière des espaces fibrés, Ann. of Math., 54 (1951), 425-505.

[15] N. Shimada - A. Iwai; On the cohomology of some Hopt algebras, Nagoya Math. J. 30 (1967), 103-111.

[16] O. Zariski - P. Samuel; Commutative algebra, I, II, Van-Nostrand (1960).