

「 相転移と不可逆性からカオスの統計力学へ 」

(1990年8月13日受理)

長い間九州大学でお世話になってしまいましたが、その間おもに統計力学を研究してまいりましたのでそれについて話をしたいと思います。

統計力学は非常に古い学問で、エントロピー S とミクロの状態の数 W とのボルツマンの関係 $S = k \log W$ (1877) から始めましても100年を越えます。しかし、この40年間をとっても、熱平衡系および熱平衡から僅かに離れた非平衡系について様々な発展があり、さらに、10年程前から、熱平衡から遙かに離れた非線形非平衡系について斬新な発展が始まっています。熱平衡系の統計力学は、主に相転移現象とその臨界現象を中心にして発展してきました。相転移現象は物性あるいは物質科学の非常に面白い現象ですので、それに使われると同時に、新しいタイプの一般論を次々と作り出しながら発展してきたわけです。一番最初のファンデアワールスは、液体と気体との相転移を研究して、ファンデアワールスの状態方程式を発見したわけですが、昔は高校の教科書にも載っていました。その研究がなされたのは前世紀の終わりごろで、ノーベル賞をもらったのは、'10年です。その後こういう普通の熱力学的な取扱と違った観点から物質を規定するということで、スケーリング理論というのがカダノフによって、'66年にだされました。その後、'71年にくりこみ群の理論をウィルソンがつくりあげて、定量的にいろんな臨界指数を実験と合わせるということのをのぞけば、相転移を理解する統計力学ができ上がったと考えられております。

戦後、非平衡系の研究が始まりまして、標題では不可逆性と書いてありますが、粘性係数や熱伝導係数でエネルギーが散逸するプロセス、つまり、マクロ

*) この講演記録は、今年2月20日に九州大学理学部物理学教室でおこなわれた 森 肇教授の退官記念最終講義のノートをもとに、森教授みずから若干の補稿、削除、訂正を加えられたものです。なお本講演に先だち、同時に退官される間瀬教授の最終講義、並びに教室主任の高橋教授のほうから挨拶がありましたので、本文中に御二人の御名前がでてきます。

(記録：九州共立大・工 森 信之)

の運動のエネルギーがミクロの熱運動のエネルギーに変わっていくプロセスの研究です。また、輸送係数の相反定理といってオンサーガーが '31年に出したのですが、これに基づいて不可逆過程の熱力学と言うものがつくられます。あまり面白くはないんですが、いろいろと役にたっています。ちょうど大学院の学生だった頃、日本で、そういう一般に線形応答の揺動理論というものの研究が始まっていたまして、高橋秀俊先生の、古典的にですがいろいろな輸送係数を熱平衡系の揺動としてとらえるという理論がありました。で、そのあと、久保・富田の理論、久保理論という形でこれは完成されたわけです。この頃日本では、そのほかに、中嶋 貞雄さんとか、中野 藤生さん、橋爪 夏樹さんとかがこういう統計力学の研究に重要な寄与をなさいました。日本で初めて国際会議が1953年に開かれまして、それは私が大学院で統計力学の分野で勉強しようとしていた頃ですが、オンサーガーとかカークウッドらがこの国際会議にやってきました、その印象は今でも残っています。二人とも50歳位。アンダーソンは30前後。それからプリゴジンも30代と、我々はそういう人たちに大学院の頃知りえたと言うのは非常に幸いで、それで国際交流は必要だと知ったと同時に研究というのは国際的レベルの共同研究なんだという意識を持ちました。そのあと、揺動散逸ということをちゃんと捉えて、熱平衡系のゆらぎを使って非平衡のいろんな輸送係数を表す、というのに私もある程度仕事を致しました。このころのことは久保先生が10年ほど前に退官されて、そのころ詳しく書かれておりますのでここで特にお話はしません。¹⁾

1965年に京大から九大に戻りまして、九大でやった仕事はその後の仕事ですが、いろんな輸送係数とか相転移点の近くでの動的な現象などです。相転移では、ゆらぎが非常に大きくなり、それに伴う異常性がいろんなエフェクトを生み、たとえばスピンレゾナンスの幅に出てくるわけです。そう言う事は、岡本さんが具体的に展開されたわけですが、まずそういうことをやりました。しかし、ウィルソンのくりこみ群の理論がでてから私は平衡系では基本的なことは済んだと思いまして、分野をもっと非平衡に広げるということで王子国際セミ

²⁾
ナーなんかもオーガナイズして、そのころから非平衡系で、特に熱平衡から遙かに離れた非線形非平衡系の研究に関心を持っていったんです。最近の統計

力学 —— 統計力学は熱平衡系で始められたわけですが、その枠組みと考え方は非常に一般的であって、非線形非平衡系にも拡張して使える。ただ大事なことは、どんな物理量を観測し、どんな物理量で特徴付けるかということで、そこが熱平衡系とは違う。しかし枠組み自身は、つまり、粗視化の法則は、我々が最初考えていたよりも遙かに一般的であることがだんだん分かってきております。そのことをお話したいと思います。

間瀬先生のお話で、「散逸構造が出て研究を放棄した」とおっしゃったわけですが、実はこの散逸構造の研究というのが、今、非常に、実験的にも理論的にもすすめられております。今の統計力学の立場からいいますと、非常に新しい概念とかいろいろなものがでるのはむしろこれから先、散逸構造の振動の研究からだと思われれます。散逸構造という考え方は、グランスドルフとプリゴジンが1960年の始めごろだしたのですが、プリゴジンはそれで'77年にノーベル賞をもらいました。しかし、そういう考え方はいろんな人が持っていました。散逸構造と言うのは、一番典型的には例えば台風で、台風は南方海上で発生して成長し陸上にあがると消滅する。それは散逸構造のなかでも一番難しいものと思われれます。ここに雲の縞模様の写真（図1）があります。この縞はロール



図 1

構造で、熱対流によると考えられていますが、これが散逸構造の典型です。しかし、こういう熱平衡から遠く離れた体系と言うのは、もちろん、例えば大気分野では非常に早くから研究されておりました。乱流 —— 大きな渦 —— による拡散において、気象学の創始者であるリチャードソンが、時間の3乗則（1926）というのを発見しております。また乱流は、大きな渦が壊れて小さな渦に崩壊していったって、段々小さくなると粘性により熱エネルギーに変わっていくわけですが、その時のカスケードで5/3乗則（1941）というのをコルモゴロフという数学者が出している。実は、スケーリング理論というのは、物理ではカダノフのスケーリングが有名ですが、こういうのは皆スケーリング理論なわけで、カダノフ自身も乱流に関心があって、そのスケーリング則から学んだとのこと。

非線形非平衡ですが、それは先ほど高橋先生のいわれました「万物は流転し、森羅万象を示す」、そういうものをどう理解し予測するかという問題です。物理は先ほどの、いわゆる物質の科学ですが、静的な科学、それは半導体を作り、分子を設計し、作る、というところまで到達しております。が、しかし、では太陽系の形成はどうなのかとか、あるいは大気・海洋でのいろんな森羅万象を捉えることが出来るかという、そういう問題は物理学ではさぼってきたと思われれます。最近はしかし、いわゆるカオス（不安定な非周期運動）と言うのが発見されてから、そういう非線形非平衡系で統計的な扱いが必要になりまして、そのカオスの統計力学を作るという意味で統計力学の新しい転回期に入ってきたと思われれます。それで、そのことについてもう少しお話して、懐古よりむしろ若い人たちを ^{インカレッジ} 鼓舞 しようと思います。

さて、こういう流転し自己組織する動的自然というのは何も無生物に限られたわけではなくて、カオスのグループには物理の他にも工学部の電気とか機械とかだけでなく、生物とかそういう方々もおられます。物理では自然の構造というのを明らかにしたいと言うわけですが、その中身は二つ（物質の構成様式と運動形態）がありまして、物質の構成様式は素粒子という学問が追求していたわけですが。1950年の始め頃は、何から出来ているかが分かれば、後はニュートン方程式とシュレーディンガー方程式があるからそれを解けばいい、だからテクニカルな問題だとそういうことをおっしゃる先生さえいたわけですが。と

ころが事情はそうではない、というのは、相転移現象に典型的に現れるわけです。ここでは熱平衡系の構造として、結晶を考えます。結晶では原子・分子が規則正しく並んでいるわけです。一方は液体状態です。このあいだに転移が起こりますが、こういう転移と言うのはそれを構成する粒子 —— 一般には1 cc あたり 10^{20} 個とかで、その粒子数無限大の極限で質的に新しいものがでてくる、そういう極限で相転移が理解できます。ですから、我々が何から出来ているかと知っただけではどういう現象が起こるかというのは分からないわけです。その典型が図2の相転移です。こういう平衡系の構造は、統計力学では自由エネ

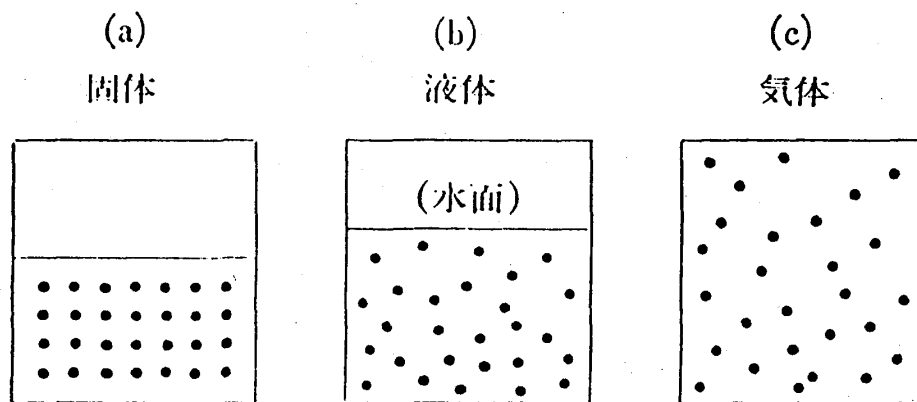


図2 物質の3態

ルギーといいまして、エネルギー E とエントロピー S と絶対温度 T 、それらから作った自由エネルギー $F = E - TS$ を最小にするという変分原理から出すことが出来ます。熱平衡系の構造というのはミクロなレベルでの原子・分子の熱運動で決まるわけで、だからミクロでみるとこれはもちろん止まっているわけではなくてしょっちゅうその周りを動いているわけです。それがマクロの極限で、こういう構造を作る。そういう基本思想です。こういう考え方は熱平衡に限らないわけですが、非平衡系の構造といえはまずマクロの構造 —— 先ほどの散逸構造です。物理では簡単な体系を作りますが、直方体の容器に水をいれて、下から暖めて ΔT だけ温度差を作ってやります。そうすると、 ΔT が0の時には熱平衡にありますが、 ΔT を上げていくと、伝導的に熱が上に伝わっていくようになります。この時にはまだ流れが発生していないわけですが、あるところで突然流れがでてきます。そのとき水は、図3のようなロール・パターンをつくり、ロールに沿って回っています。 ΔT をさらに上げていきますと、

熱対流

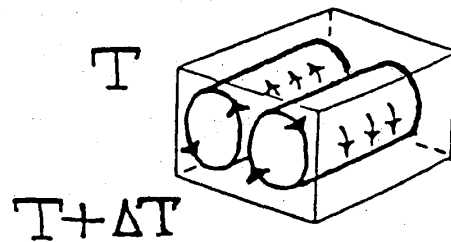


図 3

周期的にくねる

あるところでこれが振動する、つまりロールがくねっていくわけで、その時にはある一点での流速を測定しますとそれは時間的に振動する。さらに上げると、この振動は非周期的な振動をおこなうようになり、カオスという状態が生まれるわけです。こういう構造が散逸構造と言っている意味は、散逸が非常に大切な役割を果たしているからです。

普通、物理の基本としてよくハミルトン力学系をとりますが、リュービルの定理と言うのが成立していて、位相空間の体積は時間的には保存される。ですから散逸系に対してそれを保存系といい、そこではエネルギーが保存される。この保存系が作る保存構造も随分おもしろくて、これも流体にあらわれてまいります。それからまたスケールの大きいものになりますと、大気・海洋の大きな渦と言うのは必ず小さな渦をともなっていて、スケールのちがった運動が階層構造を作っております。ですからそういう階層的入れ子構造が非常に面白い。これは、実験室ではたぶん実現できないのではないかと思います、そういうマクロの構造です。こういう状態では、ミクロには熱平衡が成立していて、温度 T が定義できる、普通そう考えています。しかし、ミクロのほうから完全に定常状態をはずれていく場合があります。するとそれはハミルトン系の保存構造を考えなければならない。ハミルトン系の構造の研究も最近始まっています。例えば原子・分子の高励起状態とかで、そのイオン化などを調べるわけですが、レーザーのような非常に強い光の中に水素原子をおいておく。その時の水素原

子の状態を、我々は理解できるか。これについては新しい実験がいろいろできております。また、水素原子でそういう問題があれば一般の原子でももちろんあるし、分子でもあるわけで、特に化学分野において、アメリカが中心になって、分子についての研究が実験的にも理論的にもおこなわれております。ですが、これは量子力学系ですので、まだ基本的にどういう考え方をするのかということも分かっておりません。

実験がでてこないとなかなか新しい概念を作ることが出来ないのですが、その実験的な研究はようやく1980年前後から始まりました。それには実験技術の進歩、それからコンピュータ、それから数学の概念の発達というのがあります。まず簡単なものから考えてみます。そこで、要素系を考えますが、それは簡単な場合には強制振子とか、あるいは $\sin$ 波形ポテンシャル中での粒子の運動、これらは同じ運動方程式に従います。また、ジョセフソン接合のダイオードとか、電気回路系、そして化学反応系 —— それは一様に反応させるため、一方から試料を入れて他方から試料を引き抜いて、どれか特定の試料分子のポテンシャルを測定する、こういう形で研究が行われている。それから、流体では熱対流とかテイラー渦流、こういうところから始めます。

まず簡単なところでは振子があって、摩擦が無いと位相空間内で一定の角度と一定の速度で円運動を起こしているわけですが、もっとタイム・スケールを広げますと摩擦が効いて減衰が起こり、エネルギーを失ってだんだん落ち込んで、中心で止まってしまう。これを強制的に振動数 ω でふらせますと、同じ振動数 ω で一定の振動をするリミットサイクルというものに落ち着くようになります。非線形がいかにバラエティーに富んでいるかという例としてよく挙げられるのに、レスラー系

$$\dot{x} = -y - z$$

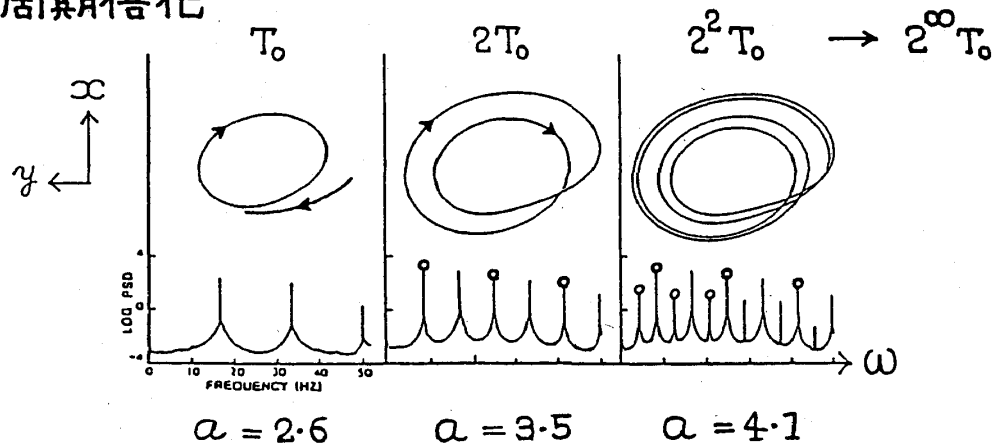
$$\dot{y} = x + 0.2y$$

$$\dot{z} = 0.2 + xz - az$$

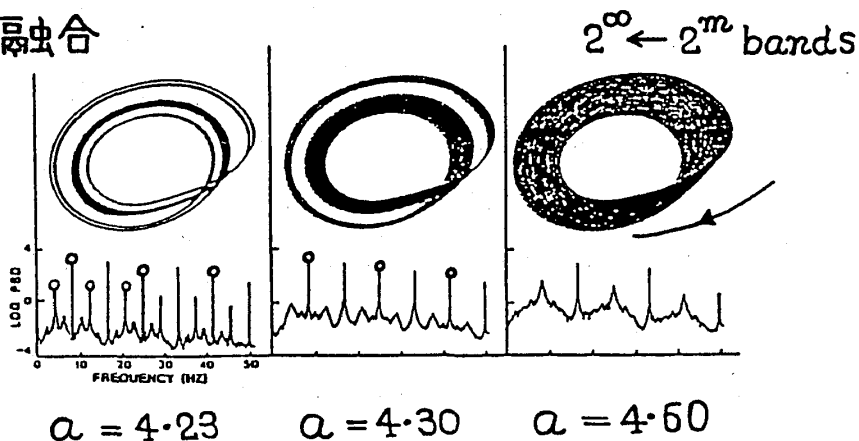
と言うのがあります。これは3変数で、 x, y, z の3つ。カオスが発生するためには3変数が必要で、この式の中には xz という非線形項があります。こ

れがいろんな多彩な効果を生むわけです。いまパラメーター a を動かしていき
ますと、 $a = 2.6$ の場合には、軌道はどこから出発してもリミットサイクルに
落ち込んで、その上を動きます。これは周期 T_0 で動いているわけですが、 $a =$
 3.5 に上げますとこんどは周期 $2T_0$ の周期運動になります。厳密に周期は二倍
で $2T_0$ 。これを引き伸ばして折り畳んだ様な軌道になります。図4のように、

(a) 周期倍化



(b) バンド融合



: 2^m -band chaos ($a > a_c = 4.20\dots$)

図4

さらにパラメーター a を上げますと、今度はこれ自身が引き伸ばして折り畳ま
れて2の2乗の周期、その次に2の3乗と、周期倍化が無限に続いていきます。
そうして2の無限大乗の無限周期の臨界軌道となり、これから上でカオス（不
安定な非周期運動）が発生します。その点は、ここでは $a_c = 4.20$ のところで
すが、これから先ではバンドになります。つまり、軌道はあるところから出発
してくるくる回るわけですが、非周期軌道ですから絶対閉じずに、ある一次元

より次元の高い領域を覆っていくわけで、それをバンドといいます。aを今度は下げていきますと、先ほどとは逆の過程が起こって、バンドが二重巻きになります。さらにaを下げると、また二重巻きになる。そういう現象が、ここに xz という非線形項があるから起こるというわけで、こんな簡単な系でも我々がこれをどうとらえるかということが問題です。一重の“帯”になったところを実際に書いたのが図5ですが、ある点から出発して先ほどの微分方程式を

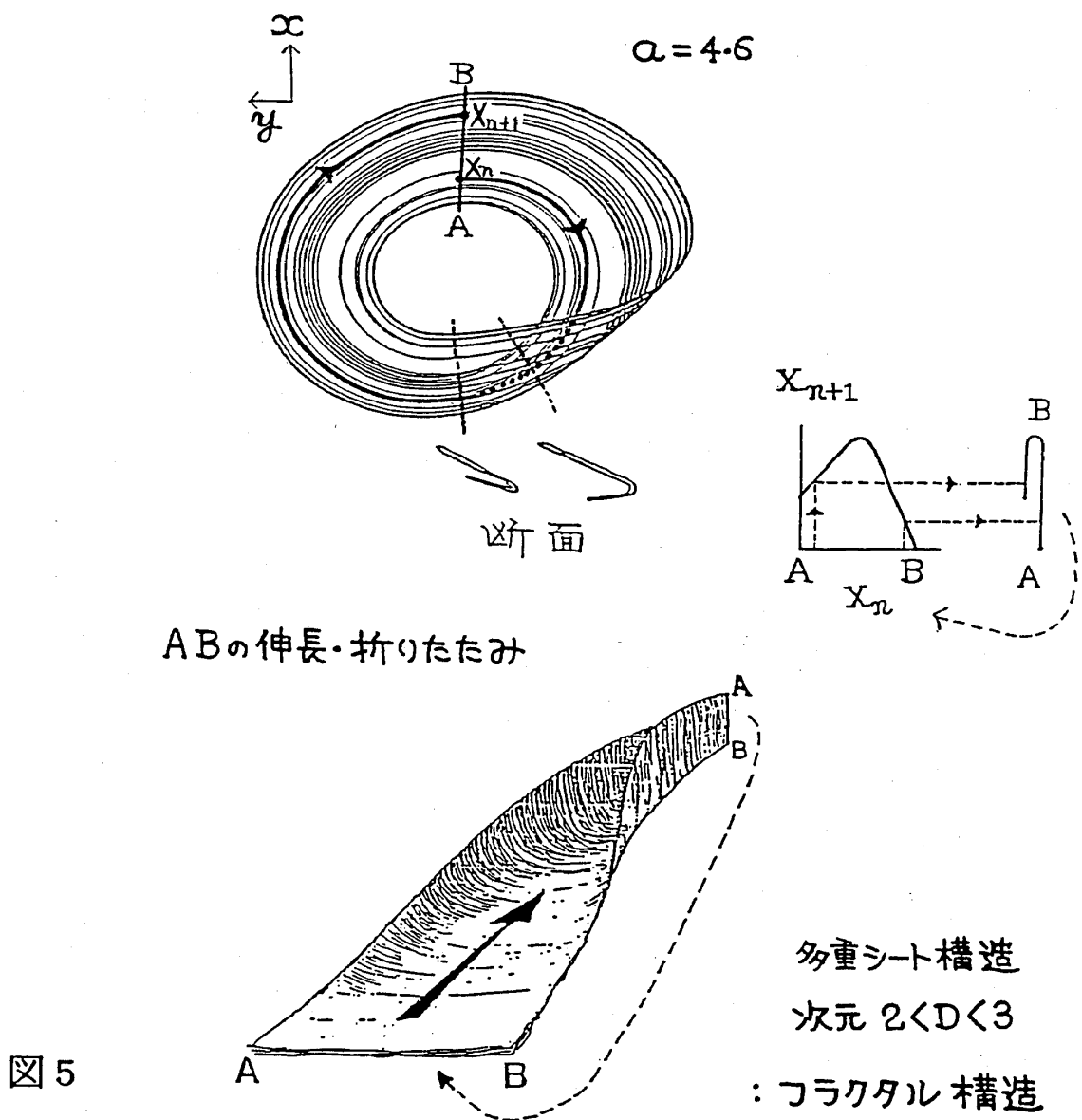
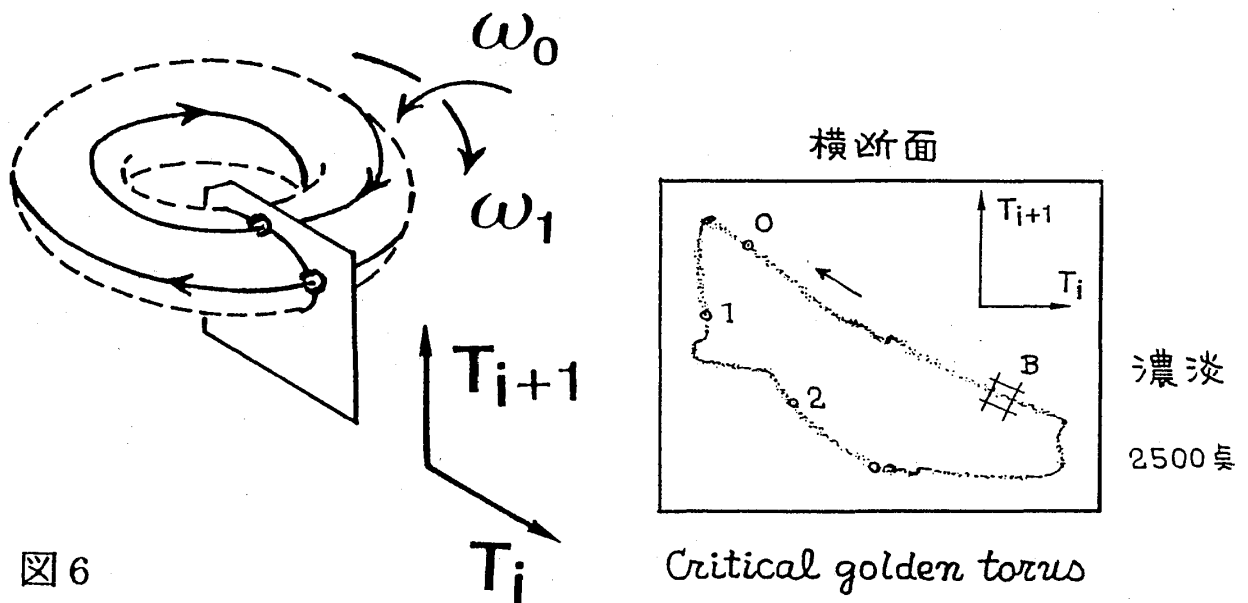


図5

数値積分して求めていったものです。 x_n は一回くると回って x_{n+1} になり、さらにくるくると回っていきます。ここでは何が起きているかと言いますと、いま AB という線を考え、線上から一斉に軌道群をスタートさせますと、これ

は伸びて折り畳まれて、AB に戻される。このとき、長さは次から次に伸びていくのと同時に、ここにシートが次から次へと折り畳まれていく。これをフラクタル構造と言っております。そこでこういうものを、どう理解し、どう捉えるのかということです。

例えば、熱対流の時にはこういう様子をどうして知るかといいますと、精密な実験では水の代わりに水銀を用いて、磁場をかけてロールをきれいに揃えます。そして、 ΔT を上げていきますと、ロールがくねり運動でくねって、ある ω_0 という振動数で振動するようになります。そこに外から電流をかけて、 ω_1 という強制振動を加えますと、 ω_0 の振動と ω_1 の振動の二重周期運動になって、図6のように、トーラスつまりドーナツの表面を描くと考えられます。このト



ーラスの横断面を得るには、まん中の底の温度をとびとびに ω_1 の周期で測定して、時系列 T_i ($i=0, 1, 2, \dots$) を作ります。そして、任意の時刻 i で、測定した温度の組 (T_i, T_{i+1}) を T_i を横軸、 T_{i+1} を縦軸にとって2次元面にプロットします。 $i=0$ から始めて、 $i=1, 2, 3 \dots$ とプロットしていくと、図のようなトーラスの断面ができていきます。これはポアンカレ横断面といいます。トーラスの進行方向は面白くなくて、常に垂直面内でいろんな大切なことが起こりますので、そういう研究をやるというわけです。その時に大切な量としては、この ω_0 と ω_1 との比で、これを回転数 ρ と言います。軌道がポアンカレ横断面を通過するとき、一周おきに角度が変わっていくわけですが、この

回転数と言うのはその角度の平均の増加分のことです。ここではそれを、ちょうど黄金比 $\rho = (\sqrt{5}-1)/2$ にとります。黄金比というのは、1を ρ と ρ^2 に分けてたときの ρ のことで、約0.618です。また、黄金比は、連分数展開しますと

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

となって、一番収束が遅くて、一番無理数らしい無理数だと言われています。いまの場合には ρ の調節をしますが、ハミルトン系では実は、自らこの黄金比を作っていきます。

さていま、ちょうどカオスになる臨界点をとると、そのトーラスは臨界黄金トーラスとよばれます。 ΔT をちょっとでも上げるとカオスになる、そういうカオスの発生点です。ここで大切なのは、まず濃淡があります。つまり臨界黄金トーラスに濃いところと薄いところがある。このトーラスの性質を調べるのに、小さなボックスをとってその中の点の個数を比べていくということを行います。そして、このボックスのサイズを小さくしていったとき、ここにどんな密度があるかと、その変化の形でこのような軌道の特徴づけるということをや

3) ます。この理論は、シカゴグループによって1986年に展開されました。先ほどのような横断面の上のプロット、これは2次元ですから x_0 は2成分のベクトルで、0, 1, 2, ... とプロットしてやる。そうして、さっきの箱の中に点が幾つはいるか調べてその個数を $N(B)$ とし、それと全体の点の数 N との比を N 無限大の極限で定義してやる。そうするとこれは確率になるわけです。つまり、

$$m(B) = \lim_{N \rightarrow \infty} (N(B)/N)$$

は、軌道 x_i がボックス B に見いだされる確率です。ここでボックスサイズ l は小さいとしています。そして、

$$m(B) \sim l^{\alpha_1}$$

で定義される指数 α_1 で系を特徴づけることができます。例えば点が一様な線の上にあると、 $m(B)$ は長さ l に比例するわけですから、 α_1 はいつも 1 です。また、2 次元的に一様ですと $\alpha_1 = 2$ となり、そういう意味で α_1 はディメンジョンといいます。ですが、先ほどの臨界黄金トラスは濃淡がありましたので、場所によって α_1 が違っておまして、ローカル・ディメンジョンと呼ばれております。そこで、 α_1 というのがどういう値を取るかというのを見るために、 α_1 が α と $\alpha + d\alpha$ の間にある確率 $P(\alpha; l) d\alpha$ というのを定義して、この確率密度 $P(\alpha; l)$ の指数を考えます。 l を小さくすると

$$P(\alpha; l) \sim l^{\alpha - f(\alpha)}$$

という形で l によらないスケーリング・エクスポネント $f(\alpha)$ が定義でき、これで確率分布の濃淡を特徴づけます。こういう物理量 $f(\alpha)$ を考えると、図 7 のように、一般に $f(\alpha)$ というのは上に凸の単峰形をもっていて、左端が濃

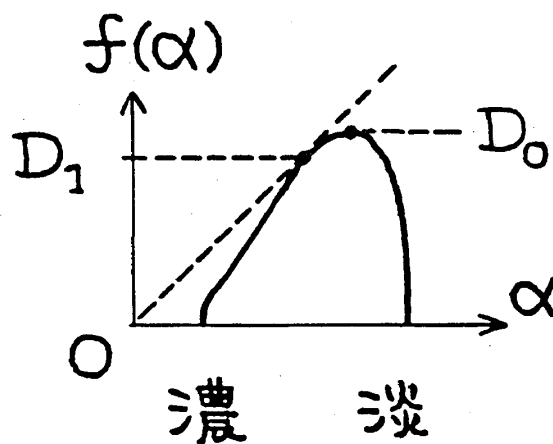


図 7

いところで右端が薄いところでは、 α が大きいと l が小さいわけですからその確率は小さくなるわけで、確率が小さくなるというのは点の数が少ないところですから、薄いところになっているわけです。また、 α が小さいと l が小さいときに大きくなり、こういう濃いところをあらわします。そういう意味で $f(\alpha)$ は空間の点の分布を規定してくれるわけです。点さえ数えれば

$f(\alpha)$ は出すことができますので、実際に先ほどの測定で調べてみます。横断面の点を取って、箱の中の点を勘定していくわけです。そうして、先ほどのスケーリング・エクスポネント α を測って見ますと、図8がでて参ります。実

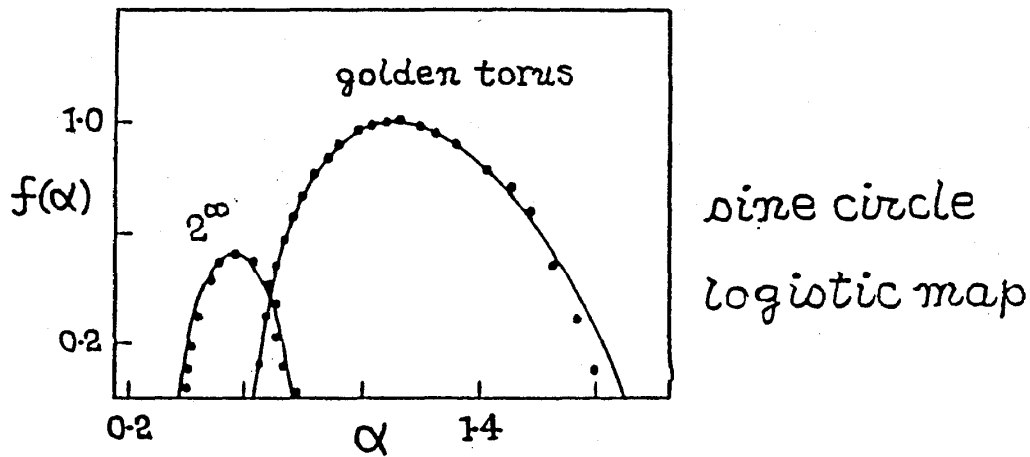


図 8

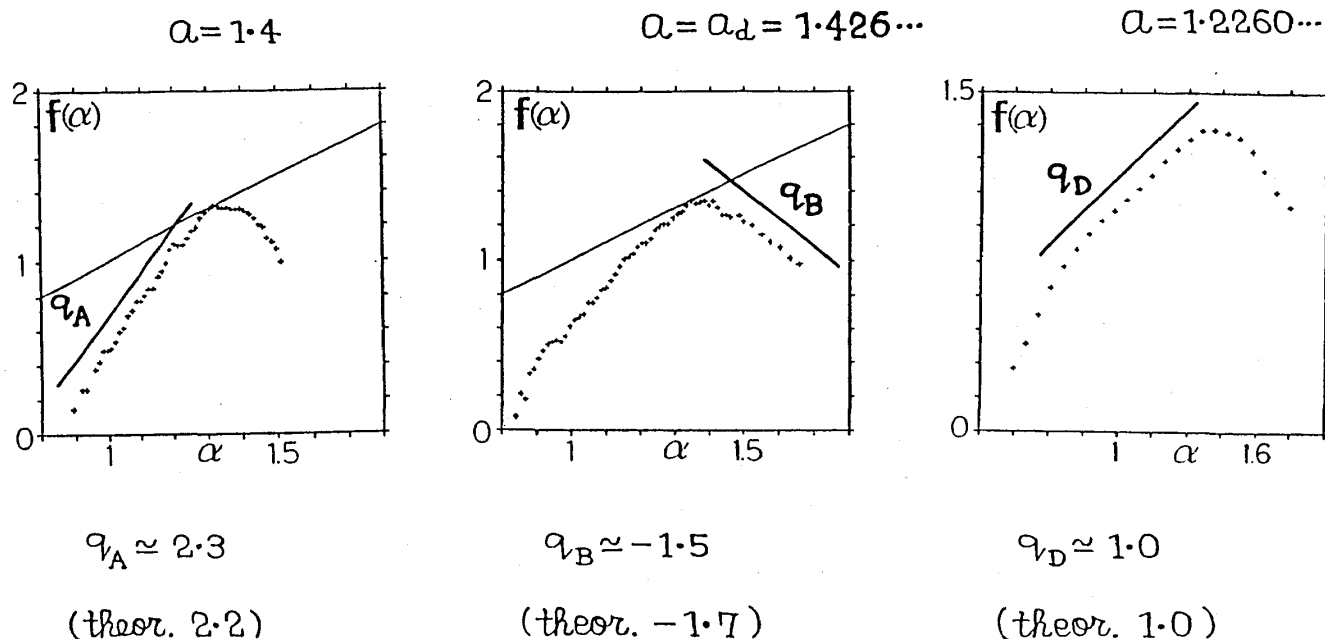
験で得られたものが黒点で示されておりまして、右側のものは先ほどの臨界黄金トーラス、左側のものは2倍、2倍、2倍となって2の無限大乗に集積したちょうど臨界点での $f(\alpha)$ を測定したものです。実線は理論で、サイン・サー

クル・マップとかロジスティック・マップから得られたものです。³⁾ この例ではちょうどカオスの発生点を考えているわけですが、カオス自身では $f(\alpha)$ の性質が違ってきます。例えばカオスでは $f(\alpha)$ が一般に線形部分を持ちます。図9はうちの院生が見出したもので、典型的なある写像について、理論とコンピュータシュミレーションをかいたものですが、左側のところに線形部分がある。それから、カオスの構造が変わるところでは、右側に線形部分がでるわけです。こういう形で、 $f(\alpha)$ によってカオスの特徴づけることができます。このように α が分布しているものを、多重フラクタルといいます。図7で、 D_0 とかいたのは、数学の言葉を使いますとハウスドルフ・ディメンジョンで、この対角線と接したところは、キャパシティー・ディメンジョンと言います。多重フラクタルでは、だから、無限個の次元が必要だと言っているわけです。それは、空間的に不均一であるということに依ります。

このように、散逸力学系と言うのはあるアトラクターに落込みます。摩擦の

Linear slopes of $f(\alpha)$

Hénon map



: Kyushu group ('89)

図 9

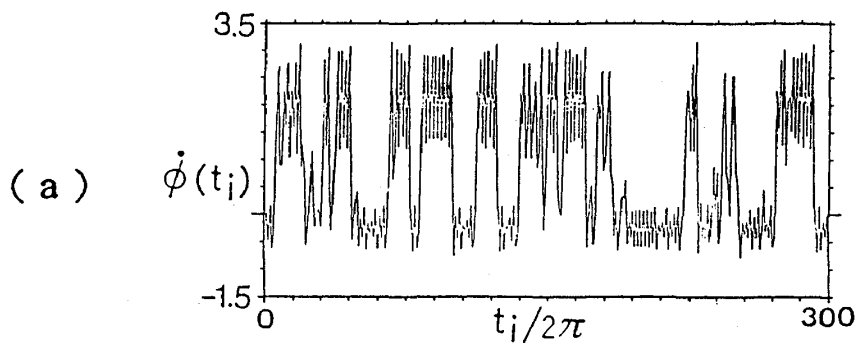
saddle-node bif.
(period 7)

ある強制振子とか、あるいは流体、あるいは化学反応系というのも充分時間が経ちますと、系の状態変数の空間の中で、あるアトラクターと呼ばれる低次元の空間に落ち込んでしまいます。例えば、先ほどのリミットサイクルや、トーラスでは ω_0 , ω_1 の比が無理数で、先ほどはこれが黄金比だったわけです。ポアンカレ断面のディメンジョンは、リミットサイクルが0で、滑らかなトーラスは1です。クリティカルやカオティックな場合には1と2との間にあり、一般には多重フラクタルをつくっています。ですが基礎運動方程式は決定論的な運動方程式ですから、こういう時も横断面上の点のプロットは、ひとつ前の時刻のものから完全に一義的に決まることになります。しかも、レスラー系で見ましたように、制御パラメーター a を変えると次々と異質な構造へ転移します。そのため、カオスでは、統計力学で先ほどお話しした相転移とか不可逆性の研究で見出された諸々の概念や方法が、全部集約的な形で必要になってきます。うちのグループがやってきたのはその研究で、その様子を少しお話ししたいわけですが、ここで例えば振子を考えます。振子の角度を ϕ として、摩擦項 0.22、

重力の項 $\sin \phi$ 、それに外力 $\cos t$ が加えられるとします。

$$\ddot{\phi} + 0.22 \dot{\phi} + \sin \phi = 2.7 \cos t$$

あとは初期値を与えて、方程式を数値的に積分すればいいわけですが、ここでは外力の周期 2π 毎に時刻 $t_i = 2\pi i$, ($i=0, 1, 2, \dots$) で値を求め、初期の点はアトラクターに落ち着くまでのトランジェントとして捨てて、残りをプロットすると図10が得られます。角速度 $\dot{\phi}$ の時系列は、ランダムです。つま



時系列は *random*

$$X_i \equiv \{\phi(t_i), \dot{\phi}(t_i)\}$$

自己相似な
多重紐構造

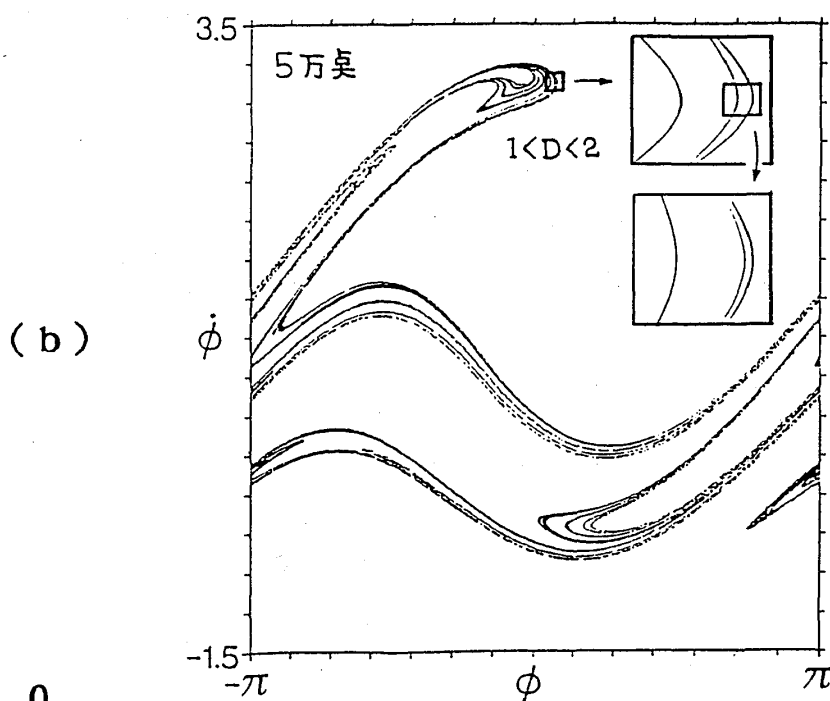


図 10

アトラクターは立端正な姿

り、ある点での値を知って次の値を予測せよと言ったときに、それが予測できない。これはカオスの一般的な性質ですが、しかし一方で状態変数 ϕ と $\dot{\phi}$ とでポアンカレ断面を描きますと、非常に端正な構造が出来上がります。ただ 2π 毎、つまり外から加えた外力の周期毎に点を取るとするのが大切で、位相まで考えると実は独立変数は3つなのです。それを 2π 毎に取ることによって、2次元面に表現しているというわけです。時刻 t_i におけるこの2次元プロットを $x_i = \{\phi(t_i), \dot{\phi}(t_i)\}$ とすれば、 x_{i+1} は x_i の一義的な関数として $x_{i+1} = F(x_i)$ とかける。これをポアンカレ写像といいます。図の四角で囲ったところを拡大しますと、実は三本の線から成っていて、それをさらに拡大しますと、実は外側の線はさらに二本の線から成っている。こういう形で、多重な紐構造から成っていきまして、 $f(\alpha)$ とかフラクタル次元を導入することが出来ます。これは 2π 毎にみたわけですが、途中で何が起こっているかというのが非常に大切ですので、途中で何がおこっているかというのを示したのが図11です。 ϕ は周期 2π でくりかえすわけですが、それをさきに延ばしてエクステンディッド・コオーディネイトを取ります。先ほどの図10は、 $-\pi$ と π の間だけをかいたわけですが、図11の一番上の図で黒く塗った部分だけに着目して、これが時間的にどう変化するかを $2\pi/3$ おきにかいています。まず $2\pi/3$ ですと、横に引きばされています。面積はちょっと縮小しています。さらに $2\pi/3$ たちますと、ずっと引き伸ばされて、かつ折り畳まれていく。これがカオスの特徴で、さらに $2\pi/3$ たってちょうど 2π にきたときには、横にずっと広がってっております。これを区間 $[-\pi, \pi]$ に全部写し変えてしまいますと、その全領域にわたって広がっているということが解るわけです。それも、1ステップ毎に全体に広がってるわけです。ですから場合によると、物理的に大事なことが途中で起こっているかもしれず、そうすれば、こういうポアンカレ写像をとることが有効ではなくなります。物理としては、全体的な性質を知るためにはポアンカレ写像が有用ですが、物理的な機構を明らかにするためには必ずしもポアンカレ写像が有効ではない、ということが起こるわけです。しかし、図10をどう特徴づけるのかというのが、カオス統計力学を作るときに、まず最初にでてくる問題です。

ここで、振子は複雑でしたので、上右側の湾曲部だけを持つような簡単なへ

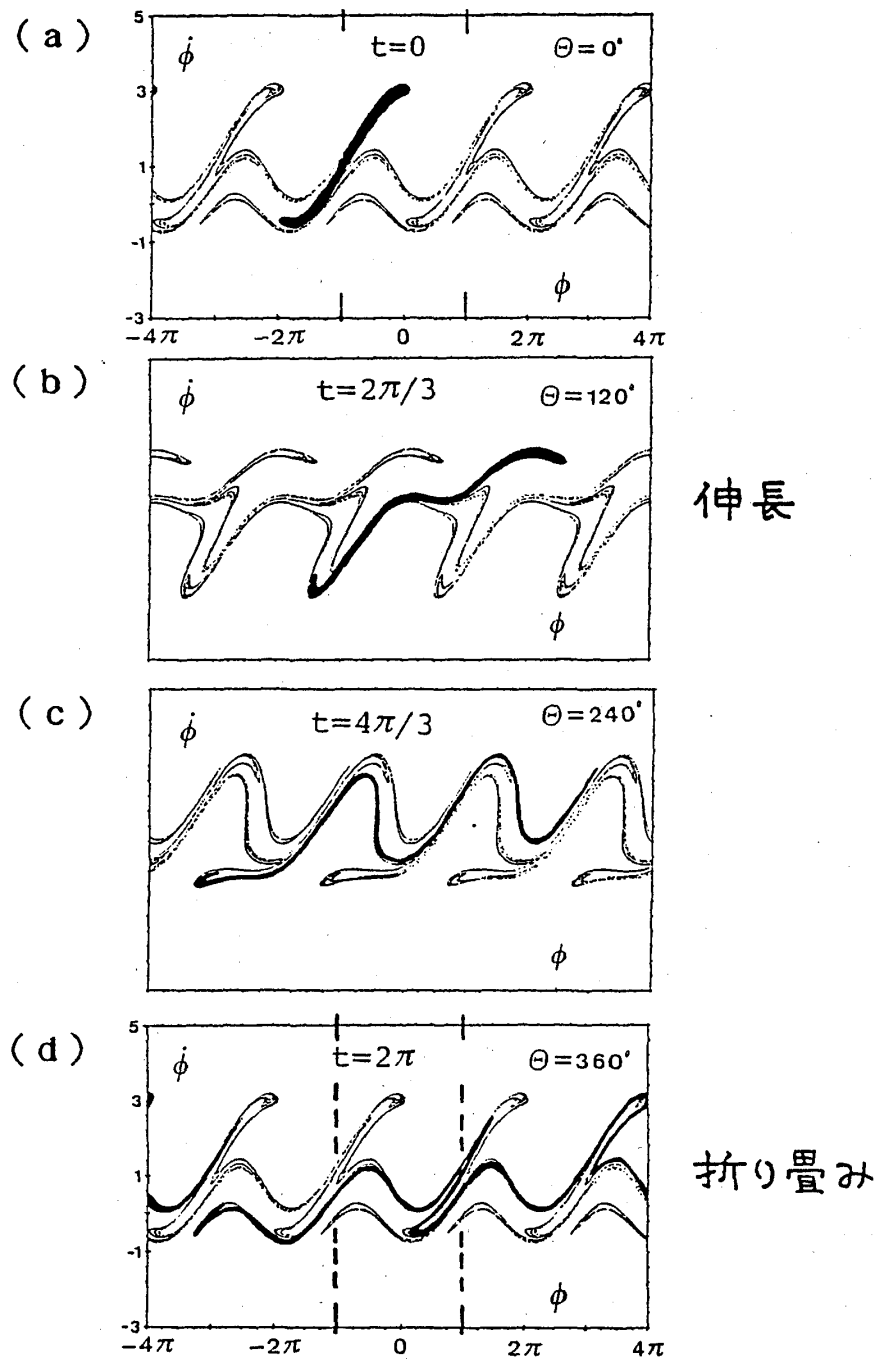


図 1.1

ノン写像という2次元写像

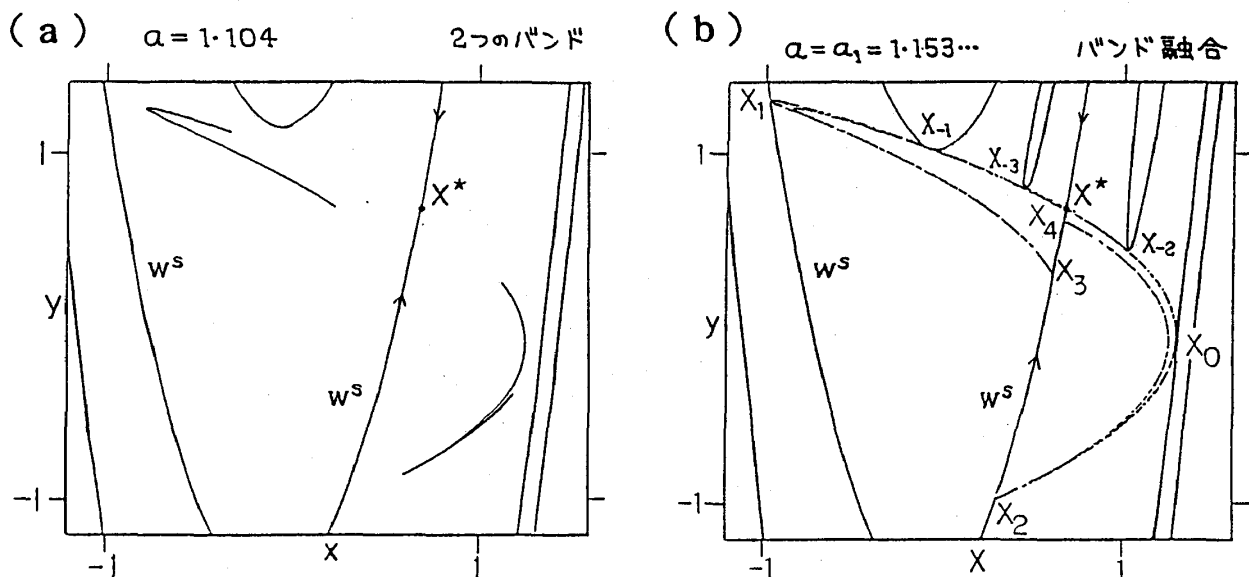
$$x_{i+1} = 1 - a x_i^2 + 0.3 y_i$$

$$y_{i+1} = x_i$$

を考えます。湾曲部がどう動くかと言うのが非常に大切なのですが、ヘノン写

像は2変数で、非線形項は x^2 があるだけです。このアトラクターをかきますと、 $a = 1.10357$ では、図12 (a) のように二つのバンドから出来ています。実

X^* の安定多様体と衝突



W^s : 固定点 $X^* = F(X^*)$ の安定多様体

アトラクターは X^* の不安定多様体の上にある

接点: $X_{\pm i} \rightarrow X^* \text{ as } i \rightarrow \infty$

ホモクリニック接点

図 1 2

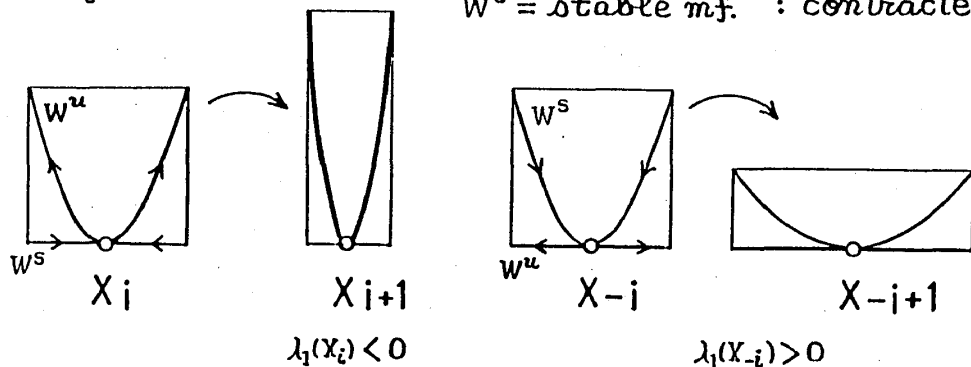
は先ほどバンド融合が起こると言ったときのポアンカレ写像は、ちょうどこんなふうに二つの部分からできています。そして、 x^* で示した固定点があります。固定点というのは、写像 F で変化しない点のことです。パラメーター a を少し大きくしますと、 $a = a_1 = 1.15357$ で、図12 (b) に示されるような形で衝突します。つまり、それぞれのバンドがどんどん伸びていって、ちょうど固定点のところで衝突をして一つのバンドとなる。その時に大切なことは、この固定点 x^* から安定多様体と不安定多様体が伸びているということです。こういう概念とか、その安定多様体と不安定多様体がどうなっているかというのは、数学の方でポアンカレ以来研究がうんと進んでおりまして、それを用いるわけですが、固定点を通る不変曲線と言うのは必ず2本あります。図で W^s と示しているのは安定多様体といわれており、この上の点は必ず時間とともに x^* に集まってきます。ですから、安定多様体。一方、不安定多様体はかいてありませんが、不安定多様体の閉包の上にアトラクターがのっかっておりますので、だい

たいアトラクターと同じ形をしているわけです。そうすると、衝突したとき、固定点の安定多様体のアトラクター、あるいは不安定多様体と接することが起こってまいります。図で x_0 とあるのがそれで、この点はワンステップだけ時間をうごかしますと x_1 にきて、次に x_2 にきて、 x_3 , x_4 にきて、そうして x^* に無限に集積していきます。逆向きにバックワードを取ると x_{-1} , x_{-2} , x_{-3} と、やはり x^* に集積していきまして、ここにフラクタル構造が出来ていくわけです。こういうものを捕まえるときに、図 1 3 のように局所構造の動きを考えると、

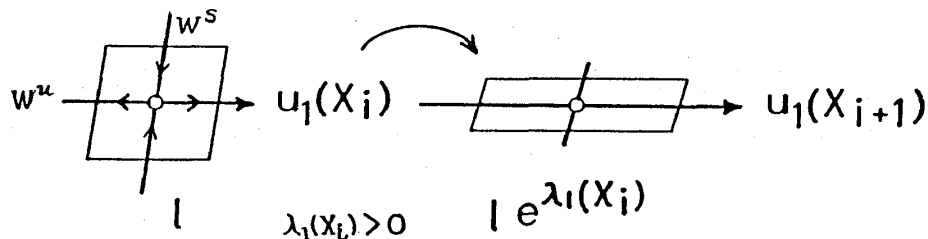
Tangency str.

$W^u = \text{unstable mf. : stretched}$

$W^s = \text{stable mf. : contracted}$



Hyperbolic str.



: Expansion rate along W^u

図 1 3

一番大事なのは図のように安定多様体と不安定多様体がちょうど接しているところです。一般の点は、安定多様体と不安定多様体とが交差していて、それを双曲点といいます。実はこういった双曲点がカオスをつくっているわけで、接点はこれにいろいろな彩りを与えているというわけです。

不安定多様体というのは時間とともに平均として指数関数的に伸びていき、安定多様体は縮むというので、時間を 1 ステップ動かしますと一方は伸びて他方は縮む。これを特徴づけるには、不安定多様体の方向の拡大率、すなわち l という長さが 1 ステップで $l \exp(\lambda_1)$ となるときの λ_1 が正であればこれは伸び

るわけで、 λ_1 を拡大率と呼びます。この拡大率に着目していくと、不安定方向には伸びるから正で、安定方向には縮むから負であるというかたちで、接点と双曲点との違いを捕まえることができるはずです。そうするとこの λ_1 という拡大率がカオスをとらえるひとつの物理量になります。位相空間内に、着目している軌道とそのごく近くのある軌道をとってやりますと、それらの間の距離は、不安定多様体の方向の成分が伸びる。その不安定成分の拡大率というのがさきほどの λ_1 で、双曲点では正、接点では負となります。双曲点というのは、近くを通りすぎる軌道がちょうど双曲線をつくるのでそういっているようです。

さて、統計力学では「ミクロでなくってマクロな量をとれ」というのがあります。つまり粗視化した量をみろ、そうすると、系のグローバルで普遍的な性質がみえるというわけです。ですから、この局所拡大率の時間 n にわたるたし算をやって算術平均

$$\Lambda_n(x_0) = (1/n) \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_1(x_i)$$

をとって、それを観測することにします。そうすると、もちろん $n \rightarrow \infty$ では長時間平均値 Λ^∞ になるわけですが、その落ち着きかたの包絡線がどういう形になるのかというのが実は系の特性をきめているわけで、これは一般に n の逆ベ

き則に従い、 $1/n^{\nu_\pm}$ とかけます。ここで、 ν_+ は上の包絡線の減衰指数、 ν_-

4)
は下の包絡線の減衰指数です。

カオスというのは一般に不安定な非周期運動なわけですが、その非周期運動には二種類あって、カオスと、それからちょうどカオスの発生点での臨界軌道とがあります。カオスでは拡大率の長時間平均 Λ^∞ が正で不安定であり、またそれが0である場合はニュートラルで、臨界軌道がそうです。さきほど $f(\alpha)$ を臨界黄金トーラスで計算しましたが、そのときの軌道です。その特徴は、局所的な拡大率の時間相関関数を考えた場合、カオスでは減衰します。これは記憶の喪失を意味し混合性とよばれております。ところが、臨界軌道ですと非減衰で、これは記憶の継続、つまり初期の記憶を時間が無限大たっても忘れないと

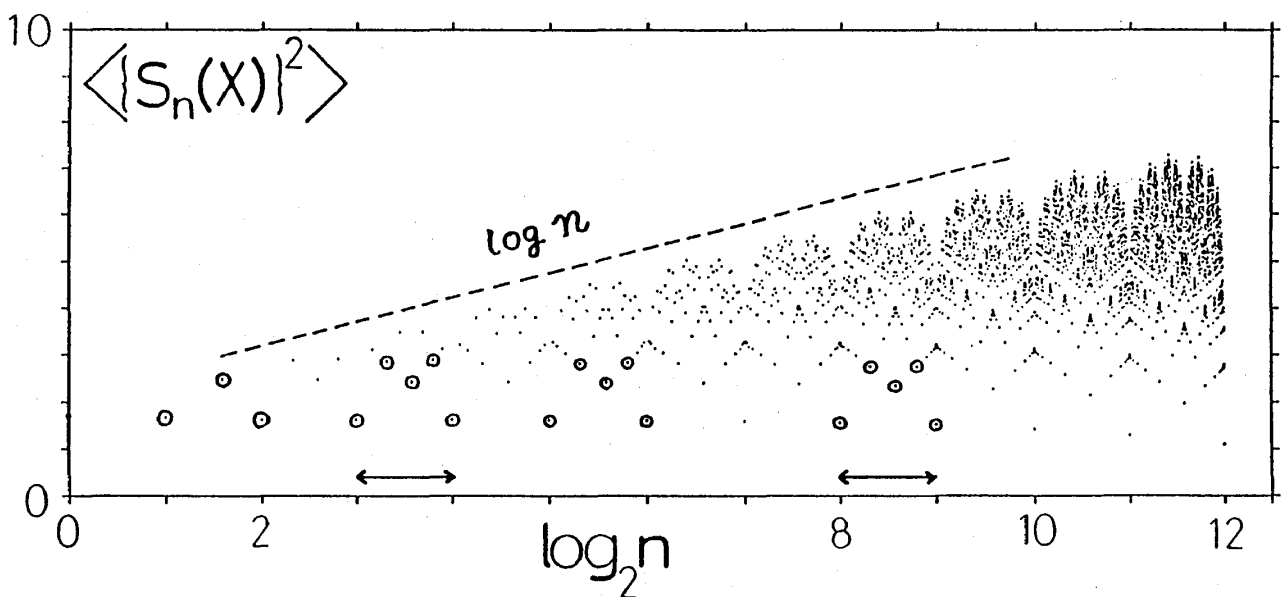
いう現象があらわれるわけです。この臨界軌道の記憶性の一例を示しますと、例えばちょうど2倍、2倍の周期倍化が起こった直後の臨界アトラクターの上で拡大率のたし算

$$S_n = n \Lambda_n(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_1(x_i)$$

の2乗平均をとる事を考えます。これはヴァリアンスといって、時間nを次第に大きくしていくわけです。そうしますと図14のようなプロットが得られて、

Temporal structure at $\alpha = \alpha_\infty$ (記憶現象)

$$S_n(X_0) \equiv n \Lambda_n(X_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_1(X_i)$$

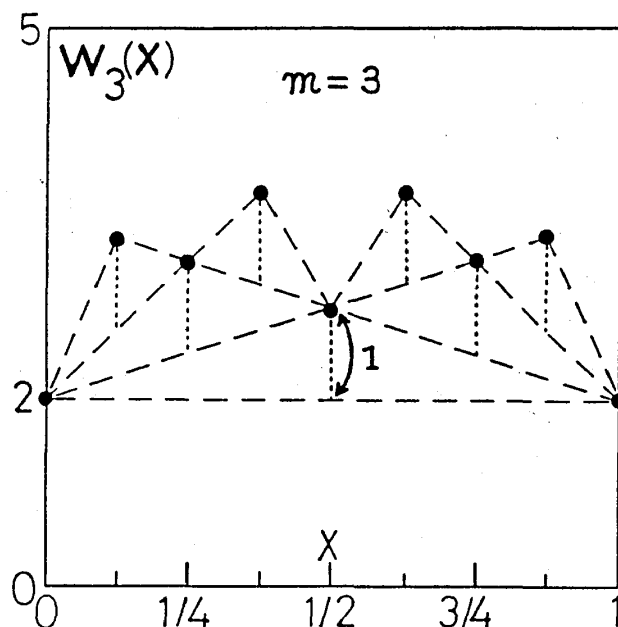


逆入れ子な block (幅 1) が展開されていく

図 1 4

その包絡線は $\log n$ となりますが、大事なのがそれが長さ1のブロックからできており、各ブロックの点が一定の規則でつくられていて、次のものはさらにその上に足されていくということを繰り返しながら構造が複雑になる、という意味で、逆入れ子なブロックが展開されていくことです。この構造自身は、理論的にくりこみ群によって決めることができます。図15のように、ブロッ

Structure function of each block



$$x = i/2^m, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 2^m)$$

$$w_{m+1}(x) = w_m(x),$$

$$w_{m+1}(x + 2^{-m-1}) = \frac{1}{2}\{w_m(x) + w_m(x + 2^{-m})\} + 1.$$

図 1 5

クはまん中から高さ 1 の点をとる、そのつぎは各辺のまん中から高さ 1 の点をとる、という具合に次から次へと点が増えていって、図 1 4 のような時間構造ができます。局所拡大率のたし算自身では包絡線が対数で発散しましたので、それを対数で割り算したもの、つまり

$$\beta_n = S_n / \log n$$

をとりますと、図 1 6 のようになり、その時系列というのがやはり構造を持っています。この、 2^m の周期倍化のカスケードによって次から次へとつくられてきたアトラクターの場合には、そのつくられ方自身が時間とともに展開されて

$\beta_n(X_0) = S_n(X_0)/\log n$, ($n \geq 2$) の記憶現象

2^∞ へ至る cascade 2^m , ($m=1, 2, \dots$) が展開される

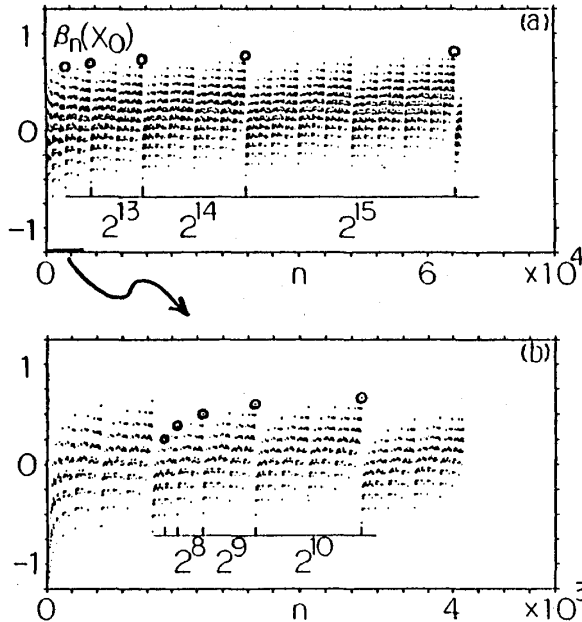


図 1 6

Power spectrum of β_n

ratio 1/2

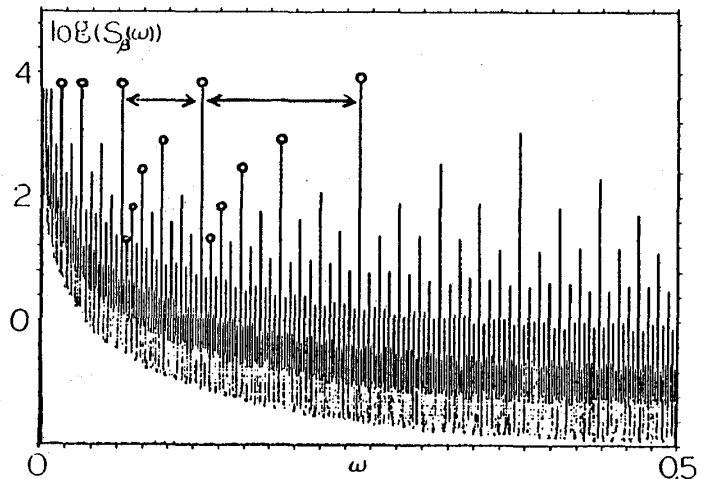


図 1 7

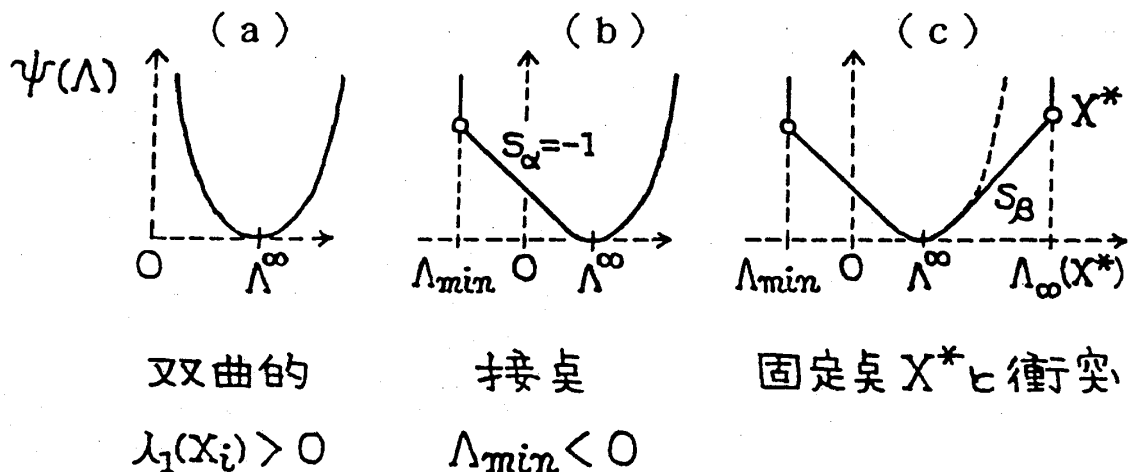
っています。その様子は、この図からわかるように、 2^{13} , 2^{14} , 2^{15} と次々にブロックが展開されていきます。また、この一部分をとってもやはり同じ構造をもっている、そういう意味でこのブロックはsimilar であつ自己相似です。図17はそのパワースペクトラムで、ピーク間の比率が $1/2$ になっており、similar でしかも自己相似な構造を持っております。この図は非周期軌道でもニュートラルな臨界点 —— カオスの発生点です。

ではカオス自身はどうとらえるのかといいますと、先ほどの時間 n にわたる $\lambda_1(x_i)$ の算術平均 $\Lambda_n(x_0)$ をとると、それが値 Λ をとる確率密度は、指数関数の形で

$$P(\Lambda; n) \sim \exp[-n \phi(\Lambda)]$$

のようにかけて、しかも n が大きい極限で $\phi(\Lambda)$ が n に依らなくなる。これは熱平衡系でいいますと、粒子数を大きくした極限で1粒子あたりの自由エネルギーが存在するという存在定理と同じなわけですが、このスペクトル $\phi(\Lambda)$ が

いろいろなカオスによって性格が異なっております。典型的な性質をいいますと、例えば、もしこの λ_1 というローカルな軌道拡大率の時間相関がなければ、 $P(\Lambda; n)$ は中心極限定理によってガウス分布になり、 $\phi(\Lambda)$ は2次関数になります。 Λ が全部正である双曲的なアトラクターのときには、図18 (a) のよ

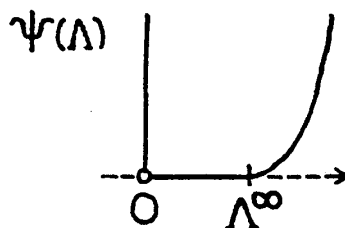


保存系：

self-organized
criticality

$$\langle \hat{\lambda}_1(X_i) \hat{\lambda}_1(X_0) \rangle \propto i^{-2/3}$$

：長時間相関



臨界トラスへの
局所的 sticking

図18

うに、たしかにこうなります。ですが、振子とかヘノン系のように接点がある場合には、接点のところで拡大率が負になることができますので、 $\phi(\Lambda)$ の左端が負まで伸びて、図18 (b) のように、そこに線形部分 s_α が形成されます。先ほどのように固定点 x^* と衝突をおこすときには、その拡大率 $\Lambda_\infty(x^*)$ が外にあるため、ここからもとの $\phi(\Lambda)$ に向けて接線をひいて、図18 (c) のような線形部分 s_β ができます。これは実は相転移現象をつくりだします。それから、ハミルトン系の話は詳しくできませんが、その特徴はトラスとカオティ

ックな領域とが位相空間の中にいつも共存しているということで、カオティックな軌道はトーラスと衝突する、あるいはスティックするということが起こります。そうするとトーラスの $\Lambda = 0$ とカオティックな軌道の $\Lambda^\infty > 0$ との間に間欠的スイッチングが起こって、その $\phi(\Lambda)$ は図18(d)のような形になります。この場合には、実は時間相関関数に長時間な相関がありまして、さきほどの Λ_n というのは局所拡大率のたし算だったわけですが、その一つ一つの時間相関というのがべき則に従います。このように、 $\phi(\Lambda)$ でカオスのいろいろな構造を特徴づけることができます。⁴⁾ なお、先に紹介しました $f(\alpha)$ も、この $\phi(\Lambda)$ で表すことができます。

いまは確率だけを考えましたが、これを統計熱力学と平行なフォーミュレーションにのせることができます。そのためには変分原理を構成するわけですが、先ほどの $\phi(\Lambda)$ という指数、これにあるバイアス q をかけて

$$\phi(\Lambda) + (q-1)\Lambda = \text{最小}$$

とします。統計熱力学とのアナロジーでいいますと、カオスの場合には運動方程式が基本になるわけですが、統計熱力学の場合にはハミルトニアンが与えられればそれからつくれます。いま、 N 個のスピンのからできている強磁性体の場合を考えて、スピンの各 i サイトの磁気モーメントを総数 N で算術平均をとり、1スピン当りの磁化 m_N をだします。一方カオスではさきほどの局所軌道拡大率をとって、その算術平均 Λ_n をとる。さて、粒子数 N が非常に大きいときには、 m_N がある値 m をとる確率密度というのは

$$P(m; N) \sim \exp[-N g(m)]$$

という形にかけて、この $g(m)$ というのがランダウの自由エネルギーです。あるいはエントロピー S ですと、状態数 $W = \exp[S/k]$ となって、エントロピーは粒子数に比例していますから、これはやはり指数関数の形を持っているわけです。カオスの場合にも、それと同じもの

$$P(\Lambda; n) \sim \exp[-n \phi(\Lambda)]$$

を作ったわけです。

強磁性体のばあいにはキュリー温度 T_c より下をとりますと、ランダウの自由エネルギーは表1の図のように底がフラットな形になっております。ただ平均場近似をやると、底がダブル・ミニマムになるわけで、そのときには先ほどのファンデアワールスの方程式のようにマックスウェル・ルールをつくらないといけないわけですが、近似なしに exact に考えますと必ずフラットになって、

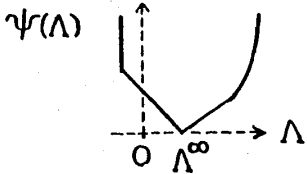
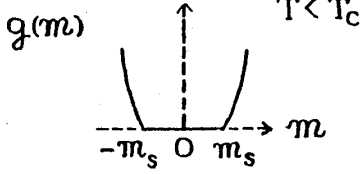
カオス	統計熱力学(強磁性)
$X_{i+1} = F(X_i)$	$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - HN m_N(X)$
時間的粗視化: $\Lambda_n(X_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_1(X_i)$	空間的粗視化: N : スピンの数 $m_N(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i(X)$
$n \rightarrow \infty$: $P(\Lambda; n) \propto e^{-n\psi(\Lambda)}$	$N \rightarrow \infty$: $P(m; N) \propto e^{-N\mathcal{G}(m)}$
拡大率スペクトル  $\psi(\Lambda) \neq \psi(-\Lambda)$: 時間反転非対称	Landau の自由エネルギー  $\mathcal{G}(m) = \mathcal{G}(-m)$: 時間反転対称
$\psi(\Lambda) + (q-1)\Lambda = \text{最小}$ $\psi'(\Lambda) = 1-q$ $\psi''(\Lambda) = 1/\sigma(q)$	$\mathcal{G}(m) - \beta H m = \text{最小}$ $\mathcal{G}'(m) = \beta H \quad \beta = 1/kT$ $\mathcal{G}''(m) = \beta/\chi(H)$
q -相転移: $\psi(\Lambda)$ の線形スロープ S_β 転移点 $q_\beta = 1 - S_\beta$	強磁性転移: $\mathcal{G}(m)$ の線形スロープ 0 転移点 $H=0$

表 1

下に凸な関数となります。カオスの $\phi(\Lambda)$ も一般にはこういう形をもっており
ます。つまり図のように線形部分があって、これにバイアスをかけて倒すと、
底がフラットな形ができますので、強磁性体で磁化 $-m_s$ から $+m_s$ へと強磁性
相転移があるように、ここでもそれと同じ転移 (q -相転移) が起こるというわ
けです。それをつくるやりかたは、今の場合は磁場 H を変えます。磁場を変え
るというのは、ランダウの自由エネルギーに磁場のバイアス mH をかけると
いうことで、 $\beta = 1/kT$ として

$$g(m) - \beta H m = \text{最小}$$

というのが熱力学の原理です。この微分をとると

$$g'(m) = \beta H,$$

さらに微分すると

$$g''(m) = \beta / \chi,$$

χ は帯磁率です。またこれから m を H の関数として求めるとそれが磁化という
ことですが、カオスの場合もこれと同じ形式にやることができてバイアス q を
かけて微分をとると各点のスロープ

$$\phi'(\Lambda) = 1 - q,$$

さらに微分をとると分散

$$\sigma(q) = 1 / \phi''(\Lambda)$$

が得られます。分散というのは、揺動の観点からいいますと磁化の揺らぎなわけ
です。ですから、カオスの場合は Λ の揺らぎを表しています。強磁性体で強磁性
相転移がおこるとき、 $g(m)$ の線形スロープが 0 で、転移点は磁場 0 になります。
カオスの場合にはスロープは一般に 0 ではありませんので、 s_β というスロープ
をもっていけば q を動かしたとき $q_\beta = 1 - s_\beta$ が転移点となります。

ただ、一番基本的な違いは、熱平衡系では秩序パラメーター m について自由

エネルギー $g(m)$ は 0 の左右で対称です。この対称性は、ハミルトン系の時間反転対称に立脚しています。一方、カオスでは $\phi(\Lambda)$ は対称ではなくって、カオスですから $\phi(\Lambda)$ の最小値の位置 $\Lambda = \Lambda^\infty$ は正でないといけない。その点が時間反転対称を破っています。散逸系を考えるとときには散逸がありますから、その時間反転対称の破れから出てくるわけですが、実はハミルトン系でも図 1 8 (d) のように非対称になります。ですからそれは、カオス自体がみずから時間反転対称性を破って不可逆性を作りだしているということです。不可逆性、自然現象はすべて「覆水盆に帰らず」なわけですが、しかし我々は映画のフィルムを逆転させることができます。力学法則によると、逆転したフィルムが描くものも自然現象として起こりえるわけですが、しかし自然界ではそんなことは起こらない。それはカオスの観点から説明ができて、 $\Lambda^\infty > 0$ では運動の不安定成分がいつもあるということ、そして不安定成分が 0 であるような measure が 0 であるということから、その様な時間反転した運動が起こらないといえる

4)

図 1 9 は、前に見たヘノン写像のバンド融合点 $a = a_1 = 1.153 \dots$ におけるスペクトル $\phi(\Lambda)$ を数値的に求めたものです。ここで、 $\phi(\Lambda)$ が s_α という線形スロープをもつのは、接点があるということからでてきますし、 s_β の方は固定点で衝突しているということからでてきます。ここで、先ほどの変分原理から Λ を q の関数として求めると図 1 9 (b) のようになり、 q_α, q_β でとびが見られます。このとびは、 $\phi(\Lambda)$ の線形スロープの端から端へ不連続転移が起きて生じるわけです。また、分散 $\sigma(q)$ を計算すると、ここでは $n = 40$ で計算しますから無限大にはならないんですが、この n をどんどんおおきくしていくと $n = \infty$ の極限で分散が発散すると考えています。こういうふうに、確率が持つ $\phi(\Lambda)$ の性質を相転移という概念で特徴づけることができます。これは微分方程式系その他についても展開されていて、当研究室の院生を中心に研究がなされてきました。

4)

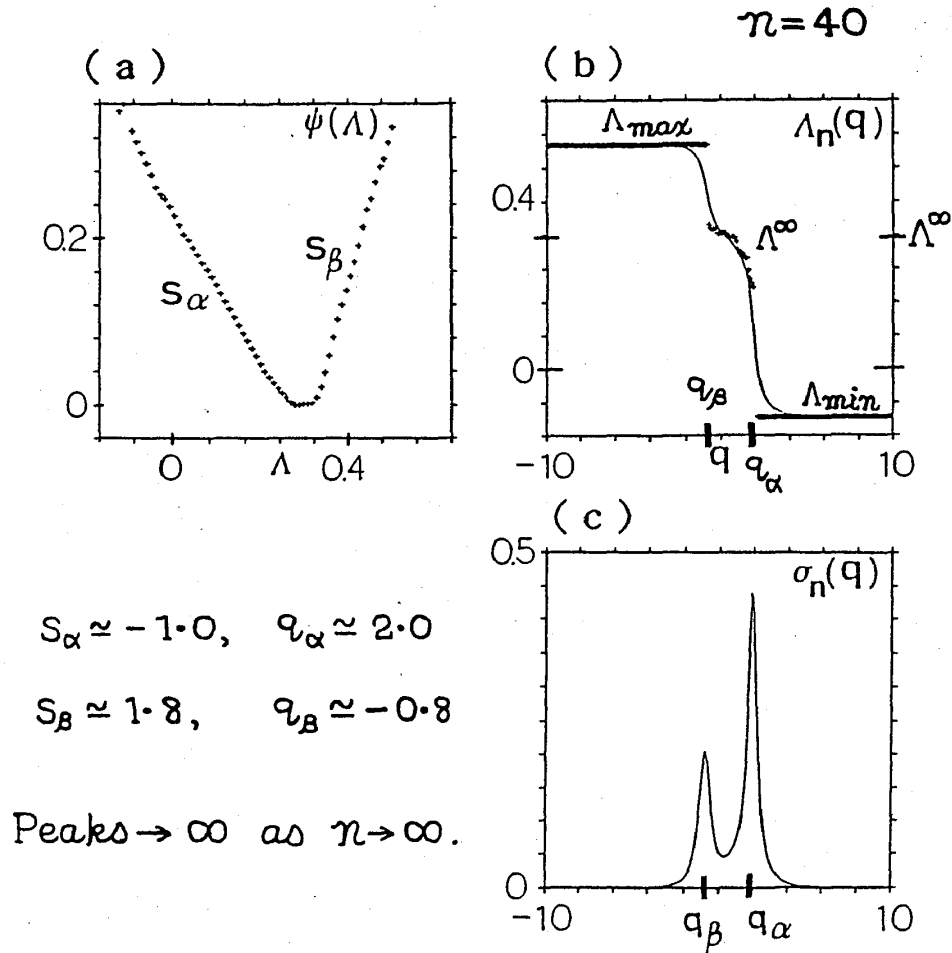


図 19

こういう形で、ごく一面だけを話してきましたが、力学は、いままさに更新されつつあります。古典力学の散逸系についてお話をしたわけですが、流体力学の振動する層流による流体の混合・拡散とか、あるいは散逸構造の非周期的

振動とか ...⁴⁾ 実は発達した乱流の渦の伸張・折り畳みというのでも $f(\alpha)$ スペクトラムが重要な役割を果たします。また、ハミルトン系も同様に取扱うことができます。量子力学で取り扱うべきミクロなレベルでの、レーザー中の水

素原子とかあるいは分子自身の高励起状態などの研究も行われております。⁵⁾ あるいは、対称性を破るとシュレーディンガー方程式が解けなくなりますが、その例として強磁場中の水素原子などが考えられています。こういうふうに、古典力学、流体力学、量子力学のいろんな分野で非線形の研究が可能となって興味深い現象がいろいろと見出されてきております。その中で、非線形によって生み出された非周期運動を解明するというのが新しい統計力学の役割です。

ちょうどカオスの発生点で現れるいろんな臨界的な非周期軌道は、フラクタルな構造で記憶性を持っています。一方カオティックなものは、フラクタルで混合性を持つ。またハミルトン系みたいに、いつもカオスとトーラスが共存しているときには、パラメーターを変えてもカオスに接しているトーラスの外側は常に臨界的になるよう自己調節をやっておりまして、それを self-organized criticality と呼んでいます。その特徴は、逆べきの長時間相関がいつも存在することです。

学生のころは気にならなかったようですが、学部の子どものときに習う教科書に日本人の名前がでてこない、それが最近になるととても残念に思います。大学院の教科書にはでてくるんですが、学部の教科書にはなかなかでてこない。生物科学とか地球科学というのは、高校の教科書も変えつつありますが、物理学でもこういう分野は、きっと学部の教科書にもでるような、そういう基本的な変更というか新しいパラダイムをつくっていくと思います。事実、カオスは、力学におけるニュートンパラダイムの最後の砦である力学の決定論的予測性をうち破るものとして、相対論や量子論に比肩できる革新をもたらすと言われています。その中で、非周期運動の統計力学は、決定論と確率論を橋渡しするものとして、若い方々がこれから作っていかれるものと期待しております。

それでは、どうも長い間ありがとうございました。

参考文献

- 1) 統計力学の進歩 (裳華房, 1981年) .
- 2) Nonlinear Nonequilibrium Statistical Mechanics, Prog. Theor. Phys. Suppl. No.64 (1978).
- 3) T.C. Halsey, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia and B.I. Shraiman, Phys. Rev. **A33** (1986), 1141.
- 4) H. Mori, H. Hata, T. Horita and T. Kobayashi, Prog. Theor. Phys. Suppl. No.99 (1989), 1.
- 5) G. Casati and L. Molinari, Prog. Theor. Phys. Suppl. No.98 (1989) , 287.