

盤面および使用セルを考慮した 回転型セル迷路の PSPACE 完全性

上條 裕介[†]

上嶋 章宏[‡]

^{†‡} 大阪電気通信大学大学院 工学研究科 情報工学専攻
[†]tm08306@mail.osakac.ac.jp, [‡]uejima@isc.osakac.ac.jp

1 はじめに

パズルやゲームの計算複雑さや攻略法の解析は古くから盛んに行われている。その理由として、パズル等の面白さを左右する一要素として考えられる本質的な難しさを、理論的に解明するという目的が挙げられる。また、これらの研究対象は、施設配置、経路設定などの現実的な諸問題に対する単純なモデルとして考えられるという背景もある。

本稿では、NTT 関連サイト [4] でも“くるくるめいろ”として紹介されている、回転型セル迷路と呼ばれるパズルを扱う。このパズルの計算複雑さについては、筆者の研究 [3] により、制限の無い場合について PSPACE 完全性を証明した。一方、[1] では、入力のある程度制限した回転型セル迷路について NP 困難であると証明し、さらに PSPACE 完全ではないかと予想されている。以上から、本稿では [1] において NP 困難性が示された制限について、[3] における手法を簡略化する形で、PSPACE 完全性を証明する。さらに、簡略化された証明手法を用い、盤面形状を変更した回転型セル迷路の PSPACE 完全性も証明する。

2 回転型セル迷路

本節では、回転型セル迷路に関する用語を定義し、その計算複雑さについて既存結果を略説する。

回転型セル迷路とは、基盤形状の盤面上に、正方形のセルと呼ばれるものが並べられており、セル上に存在するプレイヤーを、後述のルールに従いスタートセル c_s からゴールセル c_g へ移動させることを目的としたパズルである。セルには、移動可能な方向を示す路が描かれており、図 1 の 6 種が存在する。盤面のサイズはセルの個数で表し、縦に m 個、横に n 個並んだ $m \times n$ 盤面とする。

プレイヤーは、自身が存在するセルと辺を介して接しており、互いの方向への路が存在するセルへの



図 1: 回転型セル迷路におけるセル

み移動できる。移動すると、移動先のセルが回転し、路の方向が変化する。回転方向は右回りまたは左回り、回転角度は 90° とし、プレイヤーは全てのセルの回転方向をあらかじめ知っているものとする。本稿では、セルの色によって回転規則を表しており、白色を右回り、灰色を左回りとしている。

回転型セル迷路問題は次のように定義される。

入力: (縦) $m \times$ (横) n の盤面 C , $c_s, c_g \in C$,
質問: プレイヤーは、 c_s から c_g へ移動可能か?

回転型セル迷路の問題例とその解答例を図 2 に示す。なお、プレイヤーの位置を円、その進行方向を灰色の矢印、ゴールセルを太い点線で表す。

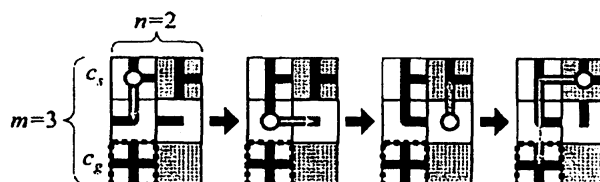


図 2: 回転型セル迷路の問題例とその解答例

[1] および [3] により、回転型セル迷路問題の計算複雑さは、使用セル制限の違いに従い、図 3 のように整理できる。図 3 では、同一行にマーク (●, ■) があるセルを使用セルとしており、●は回転規則を右回転 90° に制限し、■は回転方向の制限をしていない。

本稿では、[1] で議論され、NP 困難性が証明された使用セル制限における回転型セル迷路について、PSPACE 完全性を証明することで、[1] での予想を肯定的に解決する。本稿での証明の過程において、[3] での証明手法を基に、還元を用いる機構を再構築することで、議論を単純にする仕組みを導入しており、

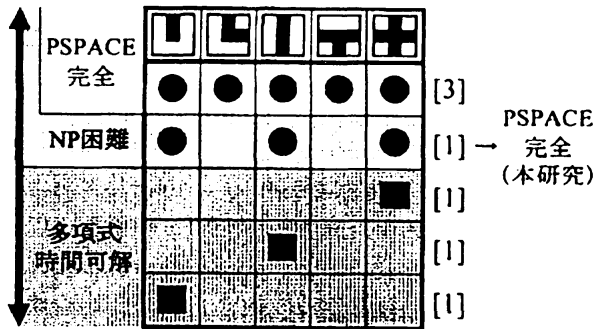


図 3: 回転型セル迷路における計算複雑さの既存結果
その仕組みに乗せることで、盤面を変更した回転型セル迷路の PSPACE 完全性も合わせて略証する。

3 制限つき回転型セル迷路の PSPACE 完全性

本節では、以下の定理を証明する。証明手順としては、まず [3] での還元方法を概観し、その還元を使用した部品を再整理する。その際、代替可能な部品や、部品間の依存関係を議論することで、本質的に必要となる極小な部品構成を示す。さらに、定理 1 での制限に合わせて、必要な部品の具体的な構成法について略説する。

定理 1 回転型セル迷路は、使用セルを Type-U, I, X, 回転を右回転に制限しても、PSPACE 完全である。

3.1 証明手法の概要

回転型セル迷路問題が PSPACE に属することは自明である。既知の PSPACE 完全問題からの多項式時間還元については、使用セルの制限がない場合の回転型セル迷路における証明手法である、**QUANTIFIED 3SAT**[2] (以下、**Q-3SAT**と略す) からの還元に従う。

Q-3SAT とは、変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ を用いた論理和標準形の論理式 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'_1 \wedge X'_2 \wedge \dots \wedge X'_m$ (X'_j は 3 つのリテラル $x'_{j-2}, x'_{j-1}, x'_{j-3}$ の論理和) に、各変数 x_i に対して量化記号 $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ による制限を加えた式があるとき、その式の出力が真であるか否かを問う問題である。

Q-3SAT から回転型セル迷路問題への多項式時間還元は、[3] にて、以下のような手法で示された。

還元の概念図を図 4 に示す。図 4 の構成は、スタートセル c_s 、**Q-3SAT** の各 $Q_i x_i$ ($1 \leq i \leq n$) を再現した部分盤面 c_{q_i} ($1 \leq i \leq n$) の集合 C_Q 、各リテラル x'_j ($1 \leq j \leq 3m$) を再現した部分盤面 $c_{x'_j}$ ($1 \leq j \leq 3m$) によって構成された、論理式 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を再現し

た部分盤面 $C_{f(x)}$ 、折り返しが可能な部分盤面、ゴールセル c_g に大別される。

各部分盤面上を移動することを、部分盤面を通行と呼び、ある部分盤面から異なる部分盤面へ移動可能な構成にすることを、部分盤面を接続と呼ぶ。各 c_{q_i} は、 $x'_j \in \{x_i, \bar{x}_i\}$ となるような各 $c_{x'_j}$ へ接続されている。また、 $C_{f(x)}$ では、 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を再現するため、 $c_{x'_{j-2}}, c_{x'_{j-1}}, c_{x'_j}$ ($1 \leq j \leq m$) が並列になるよう接続することで、各節におけるリテラルの論理和 $C_{X'_j}$ を再現しており、各 $C_{X'_j}$ を直列に接続することで、節同士の論理積を再現している。

上記の構成で、スタートセル c_s から移動を始めると、まず $c_{q_1}, c_{q_2}, \dots, c_{q_n}$ の順に通行する。このとき、変数 x_i に対し真を割り当てらば、 c_{q_i} を通行する際、 c_{q_i} から接続された各 $c_{x'_j}$ も通行する。以上により、各 $c_{x'_j}$ が、真であるか偽であるかの情報を持つことができる。なお、 $\forall x_i$ を再現した c_{q_i} では、最初は偽を選択し、 $\exists x_i$ を再現した c_{q_i} では、真か偽を選択して通行する。 $c_{q_1}, c_{q_2}, \dots, c_{q_n}$ を全て通行すると、次は $C_{f(x)}$ を通行する。その際、各 $c_{x'_j}$ ($1 \leq j \leq 3m$) では、接続された c_{q_i} ($1 \leq i \leq n$) からの通行の有無、および x'_j ($1 \leq j \leq 3m$) の真偽により、真を出力するのであれば通行可能、偽を出力するのであれば通行不可能となる。これにより、節 $(x'_{j-2} \vee x'_{j-1} \vee x'_j)$ が真である場合 (x'_{j-2}, x'_{j-1}, x'_j のうちいずれかが真となる場合) のみ、 $C_{X'_j}$ を通行することが可能となり、 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ における全ての節が真となる場合のみ、 $C_{f(x)}$ を通行することが可能である。

$C_{f(x)}$ を通行すると、折り返しが可能な部分盤面に到達し、それまでに移動してきた経路を逆方向に通行する。これを逆走という。逆走後、各セルは移動前の状態に戻り、逆走を終えた際に再度通行可能である。逆走により C_Q に到達すると、 $c_{q_n}, c_{q_{n-1}}, \dots, c_{q_1}$ の順に逆走することとなる。その際、 $\exists x_i$ を再現した c_{q_i} では、そのままスタートセルの方向へ逆走を続ける。 $\forall x_i$ を再現した c_{q_i} では、偽を選択していた場合は、偽の経路の逆走の後真の経路を通行し、 c_{q_n} 以外の c_{q_i} であれば $c_{q_{i-1}}$ を通行、新たな状態の $C_{f(x)}$ を通行、折り返し部に到達後の逆走を行う。真を選択した後に逆走してきた場合は、そのままスタートセルの方向へ逆走を続ける。これにより、**Q-3SAT** における変数選択および選択による $f(x)$ の真偽と、セル迷路における経路選択とその選択において $C_{f(x)}$ が通行できるか否かを対応させることができる。

最後に、**Q-3SAT** の入力式が真を出力するのであれば、 C_Q を全て逆走してスタートセル c_s へ到達する

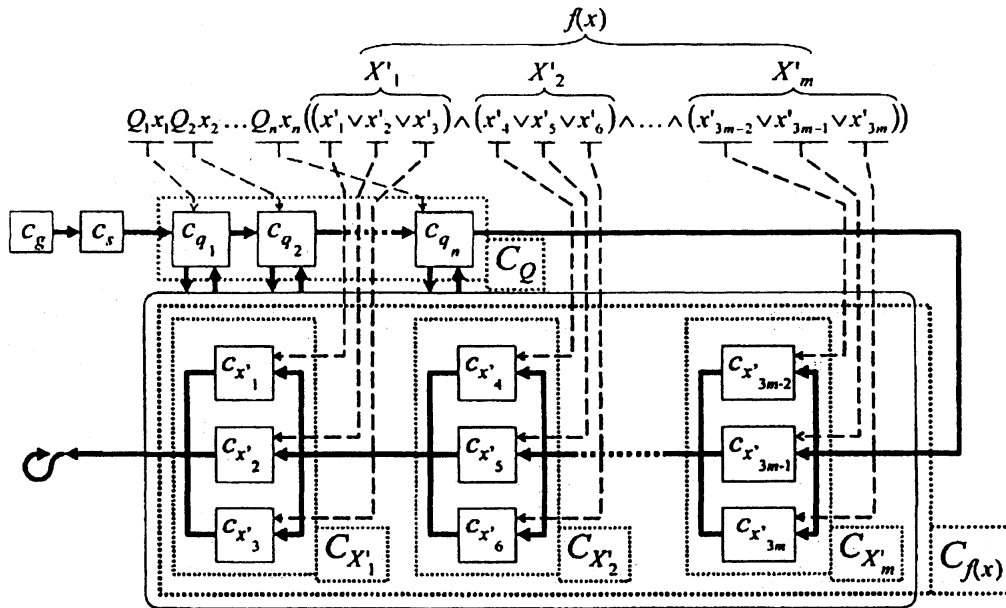


図4: Q-3SAT から回転型セル迷路への還元手法

ことができる。このときはじめて c_g に到達できるように構成することで、両者の解が一致する。

[3] では、図4の構成を実現するために、複数のセルの組み合わせによって部品を構成している(図5)。各部品にはいくつかの出入り口が設けられており、部品内へ移動することを部品に進入する、部品内にある出入り口から別の出入り口へ移動することを、部品を通行と呼ぶ。

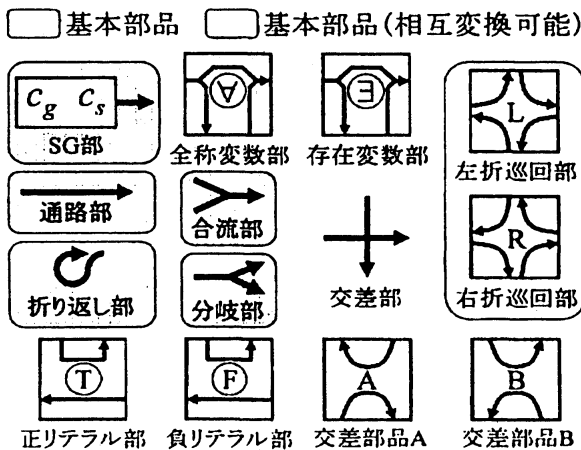


図5: 還元を用いる部品

図5で示した部品はそれぞれ、各部品を接続する通路部、 c_s と c_g を組み込んだSG部、 $\forall x_i$ を再現した c_{q_i} に相当する全称変数部、 $\exists x_i$ を再現した c_{q_i} に相当する存在変数部(全称変数部と存在変数部を変数部と総称する)、正のリテラルに対応する正リテラル部、負のリテラルに対応する負リテラル部(正リテラル部と負リテラル部をリテラル部と総称する)、

リテラル部を並列に接続する際に必要な分岐部と合流部、逆走を始めるための折り返し部、通路部同士の間を交差させるための交差部、これらの部品の構成を補助する左折巡回部、右折巡回部(左折巡回部と右折巡回部を巡回部と総称する)、交差部を構成するために必要な交差部品A、交差部品B([3]では交差部品A'としている)である。上記以外にも、通路部を接続する際のずれを補完する調整部、部品以外のセルに移動できないような壁という構成も必要となる。また、[3]では、交差部の構成に、さらに別の部品を用いていた。

本節では、[3]での証明に用いられた各部品を再整理し、部品間の依存関係を明らかにすることで、以下の3つの補題を証明し、それらを用いて定理1が成立することを示す。

補題1 右折巡回部および左折巡回部は、折り返し部を用いて、出入り口の数調節することが可能である。また、通路部、合流部を用いることで相互変換可能である。

補題2 正リテラル部、負リテラル部、交差部品A、交差部品Bは、通路部、分岐部、合流部、左折巡回部、右折巡回部を用いることで構成可能である。

補題3 交差部は、通路部、分岐部、合流部、交差部品A、交差部品Bを用いることで構成可能である。

以上により、Q-3SATからの多項式時間還元は、通路部、SG部、折り返し部、分岐部、合流部と、左右

どちらかの巡回部（以上をまとめて基本部品と呼ぶ）を構成できれば可能であることが示される。

[3] では、右折巡回部を除く基本部品を、右回転の Type-U, I, X セルのみで構成していた。そのため、上記の補題を示すことにより、定理 1 を証明する。

3.2 各補題の証明

巡回部の出入り口数調整（補題 1） [3] では、巡回部の出入り口が 3 つであった。後述する左折巡回部と右折巡回部の相互変換では、出入り口が 4 つの巡回部が必要であるため、その構成手法を示す（図 6）。

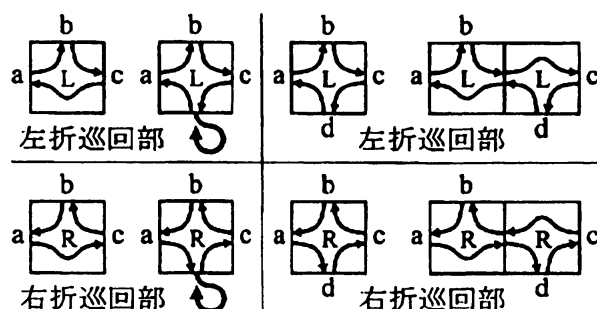


図 6: 巡回部の出入り口数調整

図 6 右のように、出入り口が 3 つの巡回部を 2 つ接続すると、出入り口が 4 つの巡回部を構成できる。また、出入り口が 4 つの巡回部に折り返し部を接続すると、出入り口が 3 つの巡回部を構成できる。また、出入り口が 5 つ以上の巡回部についても、同様の手法を繰り返すことで、出入り口を 4 つまたは 3 つにすることが可能である。

左折巡回部を用いた右折巡回部（補題 1） 右折巡回部は、ある出入り口から進入するとその右隣りの出入り口へ通行する部品であり、図 7 のように構成する。図中の左折巡回部の出入り口については、その位置から、上出入り口、右出入り口、下出入り口、左出入り口と呼ぶ。また、図中の合流部は、接続されている左折巡回部から、(1) の合流部、(2) の合流部、(3) の合流部、(4) の合流部と呼び、3 つの経路を、上段、中段、下段、または右側、中央、左側と呼ぶ。なお、灰色で示した経路は、合流部のうち通行できない経路であり、通行できる経路を通行した後に通行可能となる。

a から進入する場合、(1) の左出入り口から上出入り口へ通行し、(1) の合流部上段、(5) の左折巡回部、(2) の合流部右側を通して (2) の右出入り口へ到達する。この時点で (2) の合流部は、いずれの経路でも通行可能となる。次に、(2) の右出入り口から下出入り

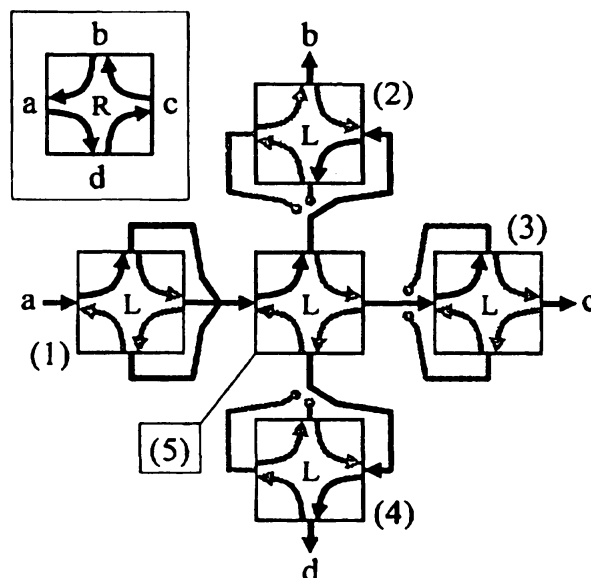


図 7: 右折巡回部

口へ通行すると、(2) の合流部中央、(5) の左折巡回部、(3) の合流部中段を通り、(3) へ到達する。(2) へ到達した場合と同様に、(3) の左出入り口から上出入り口へ通行し、(3) の合流部上段、(5) の左折巡回部、(4) の合流部右側を通り、(4) へ到達する。(4) では右出入り口から下出入り口へと通行し、d に到達する。以上のように通行することで、a から d への右折を実現している。

a から d への通行を行った後に d から進入する場合については、各合流部を通行順に考えると、a から d へ通行する際の合流部と同様になっていることが分かる。よって、同様の通行を行うことにより、c へ通行することができる。c、b から進入する場合も同様であり、b から a へ通行すると、各部品の路の状態が、a から d へ通行する前と同一のものに戻るため、再度 a から進入できる。

また、右折巡回部を用いた左折巡回部も、同様に構成することが可能である（詳細は省略する）。

正リテラル部（補題 2） 正リテラル部は、Q-3SAT からの還元盤面における正のリテラルを再現する部品であり、図 8 のように構成する。

図 8 の a、b 間の経路は、対応する変数に真を割り当てる場合に通行する変数経路、c、d 間の経路は、論理式を再現した経路の一部となる論理式経路であり、変数経路を通行した後でなければ論理式経路を通行できない。これにより、Q-3SAT での正リテラルの値を再現している。また、合流部 (5)、合流部 (6)、合流部 (7)、分岐部 (8)、合流部 (9)、合流部 (10) の集合をまとめて中心構成と呼ぶ。なお、以上 3 つの名称

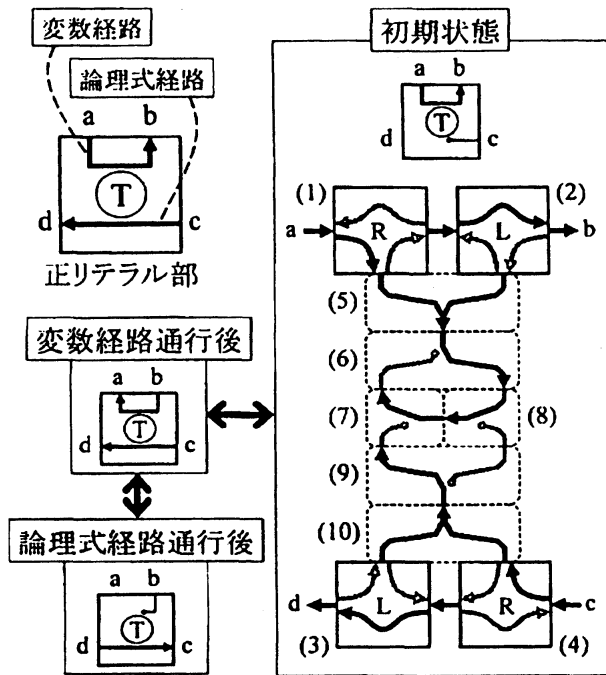


図 8: 正リテラル部

は、後述する負リテラル部でも使用する。

初期状態（図 8 右上）にて論理式経路を先に通行しようとする、論理式経路の入り口である c から入り、右折巡回部 (4)、合流部 (10)、合流部 (9)、分岐部 (7) の順に通行する。しかし、分岐部 (7) は初期状態では下の経路が通行不能であるため、c から入ると移動不能な状態に陥り、通行することができない。

変数経路を先に通行する場合では、a から進入すると、右折巡回部 (1)、合流部 (5)、合流部 (6)、分岐部 (8)、合流部 (7)、合流部 (6)、合流部 (5)、右折巡回部 (1)、左折巡回部 (2)、b の順に通行することで、変数経路の通行が可能である。このとき、通行後は変数経路の入り口が a、出口が b に変わり、通行すると (2) の左折巡回部から中心構成へ向かう形となる（図 8 左下）。また、合流部 (7)、分岐部 (8) が、双方から通行可能な状態となる。

変数経路の逆走は、b、左折巡回部 (2)、合流部 (5)、合流部 (6)、合流部 (7)、分岐部 (8)、合流部 (6)、合流部 (5)、左折巡回部 (2)、右折巡回部 (1)、a の順に通行可能である。この際、路の状態が変数経路を通行する前と同一になるため、再び通行可能となる。なお、分岐部 (8) から合流部 (9) へ通行しようとする、合流部 (9) の右側は通行できないため、移動不能に陥る。よって、b から入り c または d へ通行することはできない。

変数経路を通行後に論理式経路を通行する場合については、c、右折巡回部 (4)、合流部 (10)、合流部

(9)、合流部 (7)、分岐部 (8)、合流部 (9)、合流部 (10)、右折巡回部 (4)、左折巡回部 (3)、d の順に通行可能である。c から a または b への通行については、変数経路の逆走と同様の議論により、不可能である。

両経路を通行した後（図 8 右下）の逆走については、d、左折巡回部 (3)、合流部 (10)、合流部 (9)、分岐部 (8)、合流部 (7)、合流部 (9)、合流部 (10)、左折巡回部 (3)、右折巡回部 (4)、c の順に通行することにより可能である。通行後の路の状態は、論理式経路を通行前と同様（図 8 左下）となる。なお、論理式経路を逆走せずに変数経路を逆走することは不可能であり、全体の構成上そのような通行は行われない。

負リテラル部（補題 2） 負リテラル部は、Q-3SAT からの還元盤面における負のリテラルを再現する部品であり、図 9 のように構成する。

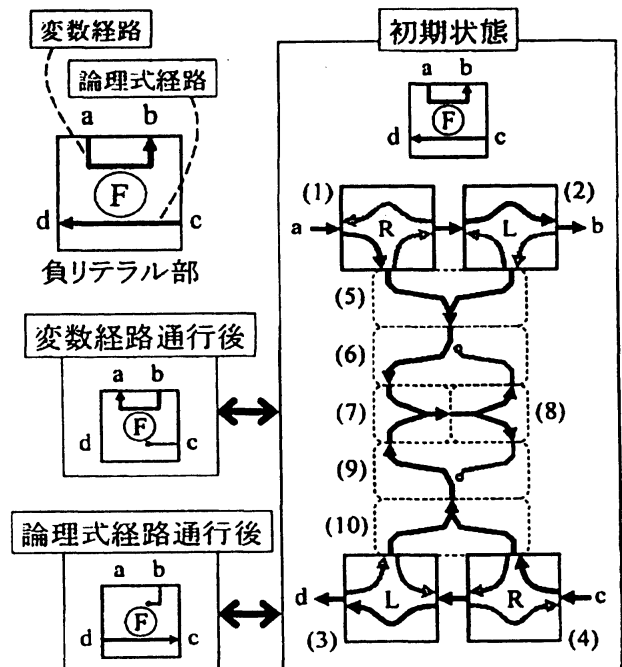


図 9: 負リテラル部

初期状態では、変数経路または論理式経路のどちらからでも通行可能であるが、一方を通行すると、他方の経路が通行できなくなり、通行した経路の逆走のみが可能となる。これにより、接続されている変数部で真の経路を通行した場合、論理式を再現した部分盤面において通行できない負リテラル部とすることが可能である。また、具体的な構成および通行経路は正リテラル部と同様であるが、中心構成の初期状態を図 8 左下（変数経路を通行後の正リテラル部）と同一の状態に変えることで、上記のような働きを実現している。

交差部品 A (補題 2) 交差部品 A は、交差部を構成するために必要な部品であり、図 10 のように構成する。

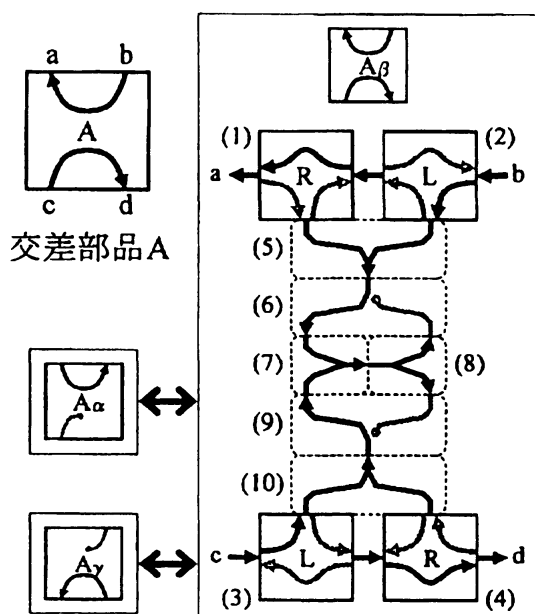


図 10: 交差部品 A

交差部品 A には、「a から b へのみ通行可能」「b から a への通行、および c から d への通行が可能」「d から c への通行のみ可能」の 3 状態があり、それぞれ交差部品 A_α 、交差部品 A_β 、交差部品 A_γ と記す。具体的な構成および通行経路はリテラル部と類似しており、正リテラル部と比較すると、cd 間の通行方向が逆である以外は同一の構成をしている。

交差部品 B (補題 2) 交差部品 B は、交差部を構成するために必要な部品であり、図 11 のように構成する。

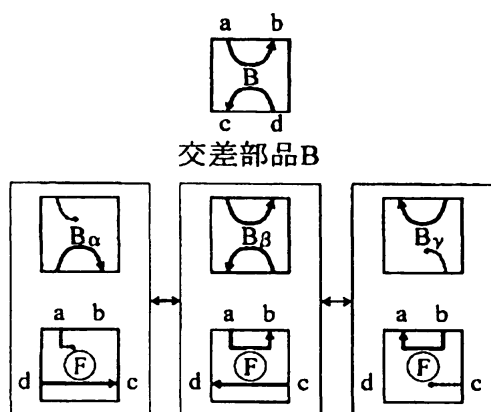


図 11: 交差部品 B

交差部品 B には、「c から d へのみ通行可能」「d から c への通行、および a から b への通行が可能」「b から a への通行のみ可能」の 3 状態があり、それぞ

れ交差部品 B_α 、交差部品 B_β 、交差部品 B_γ と記す。交差部品 A と比較すると、ab 間と cb 間の通行を可能とする順が逆になっている。具体的な構成については、負リテラル部と同一であり、交差部品 B_α が負リテラル部の論理式経路通行後 (図 9 右下)、交差部品 B_β が負リテラル部の初期状態 (図 9 右上)、交差部品 B_γ が負リテラル部の変数経路通行後 (図 9 左下) と対応する。

交差部 (補題 3) 交差部は、通路部同士の平面交差を実現する部品であり、図 12 のように構成する。

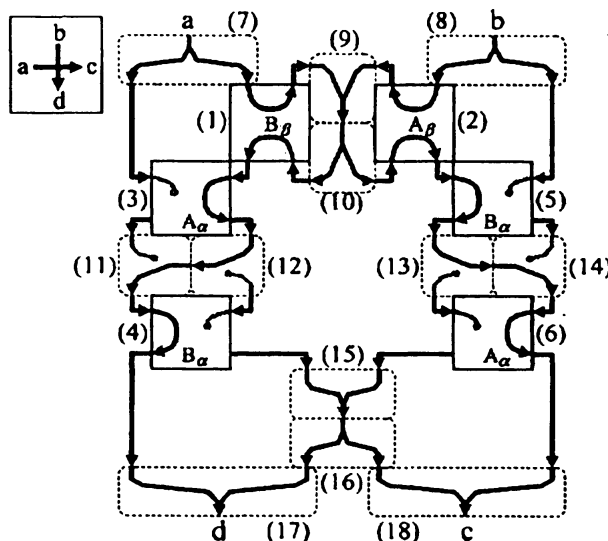


図 12: 交差部

初期状態では a から c、および b から d への通行が可能であり、a から c へ通行後は c から a への逆走および b から d への通行が可能となり、a から c、b から d への通行を行うと、d から b への逆走のみ可能である。b から d への通行を先に行った場合は、d から b への逆走および a から c への通行が可能となり、b から d、a から c への通行を行うと、c から a への逆走のみ可能である。

構成は左右対称となっており、a から c へを先に通行する場合と b から d へを先に通行する場合を比較しても、通行経路が左右対称となるため、a から c への通行を先に行う場合についてのみ説明する。

まず初期状態で a から入る場合であるが、a、分岐部 (7)、交差部品 B_β (1)、合流部 (9)、分岐部 (10)、交差部品 A_β (2)、交差部品 B_α (5)、分岐部 (13)、合流部 (14)、交差部品 A_α (6)、合流部 (18)、c と通行することで、bd 間を横断して c へ通行できる。このとき、各交差部品の状態について、交差部品 B_β (1) は交差部品 B_γ へ、交差部品 A_β (2) は交差部品 A_γ へ、交差

部品 $B_\alpha(5)$ は交差部品 B_β へ、交差部品 $A_\alpha(6)$ は交差部品 A_β へ変化する。

a から c へ通行後では、c から a への逆走、または b から d への通行が可能である。

c から a への逆走については、a から c への通行の逆順を辿ることで可能である。各交差部品も通行前の状態に戻る。

b から d への通行は、b、分岐部 (8)、交差部品 $B_\beta(5)$ 、合流部 (14)、分岐部 (13)、交差部品 $A_\beta(6)$ 、合流部 (15)、分岐部 (16)、合流部 (17)、d の順に通行することで可能である。

a から c、b から d の順に通行した後は、d から b への逆走のみ可能である。なお、d から b へ逆走する前に c から a への逆走を行うことは不可能であり、全体の構成上そのような通行は行われない。d から b への逆走は、b から d への通行と逆順を辿ることで可能である。この際、通行可能な方向は常に一意に定まっている。

以上のように部品を作り変えることで、補題 1～補題 3 が成り立つ。また、全称変数部、存在変数部は [3] において基本部品のみで構成されており、合成部品は全て基本部品のみで構成できるため、以下の命題が示された。

命題 1 PSPACE 困難性は、Q-3SAT からの多項式時間還元において、通路部、SG 部、折り返し部、分岐部、合流部、巡回部（巡回方向、および出入り口の数は不問）、調整部、壁を構成することで証明可能である。□

[3] では、命題 1 で示した必要な基本部品を、全て定理 1 における制限を満たすよう構成している。よって、定理 1 の PSPACE 完全性が証明された。

また、命題 1 で必要とする部品は、いずれも比較的簡単に構成できるものであり、PSPACE 困難性、ひいては PSPACE 完全性の証明が容易になったといえる。これを利用し、次節では、盤面の形状を変更した新たなセル迷路の PSPACE 完全性について触れる。

4 盤面を変更したセル迷路

本節では、盤面を正六角格子状にした回転型セル迷路（以下、六角セル迷路と呼ぶ）について考える。

六角セル迷路は、回転型セル迷路と同様に、セルに描かれた路を辿って、スタートセルからゴールセルへ到達することを目的としたパズルである。六角セル迷路における使用セルは図 13 の 14 種であり、回

転規則については、方向が右回りまたは左回り、角度が 60° とする。

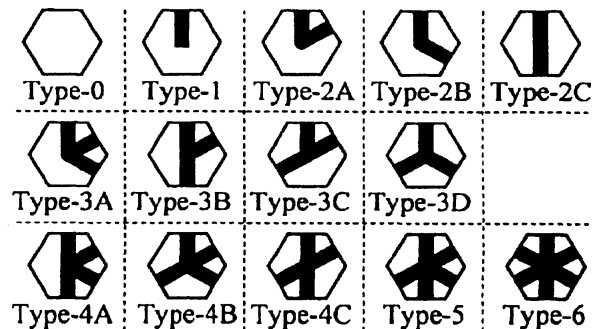


図 13: 六角セル迷路におけるセル

この六角セル迷路に、命題 1 に従い各部品を構成することで、以下の定理を証明した（詳細は省略する）。

定理 2 六角セル迷路は、使用セルを Type-1, 3D, 6, 回転を右回転に制限しても、PSPACE 完全である。□

定理 3 六角セル迷路は、使用セルを Type-1, 3D, 5, 回転を右回転に制限しても、PSPACE 完全である。□

定理 4 六角セル迷路は、使用セルを Type-1, 2C, 6, 回転を右回転に制限しても、PSPACE 完全である。□

定理 5 六角セル迷路は、使用セルを Type-1, 2C, 5, 回転を右回転に制限しても、PSPACE 完全である。□

5 まとめ

本研究では、使用セルを制限した回転型セル迷路に対し、未解決であった制限について PSPACE 完全性を証明した。また、本手法を用い、異なる盤面における回転型セル迷路の PSPACE 完全性も証明した。今後の課題として、様々な盤面の回転型セル迷路に対して、使用セルの制限ごとの計算複雑さをさらに解析することなどが挙げられる。

参考文献

- [1] S. Aoki, H. Ito, H. Uehara, M. Yokoyama, and T. Hori-nouchi, "NP-hardness of Rotation Type Cell-Mazes," IEICE Transactions Fundamentals, Vol. E83-A, No. 3, March, 2000.
- [2] M. R. Garey and D. S. Johnson, *COMPUTERS AND INTRACTABILITY: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. FREEDMAN AND CAMPANY, 1979.
- [3] 上條 裕介, 上嶋 章宏, "回転型セル迷路の PSPACE 完全性," 第 22 回 回路とシステム 軽井沢ワークショップ 論文集, pp. 207-212, 2009.
- [4] <http://www.mmlab.tnl.ntt.co.jp/Kurukuru/index.html>