

扁平固定球殻の動的座屈解析
(有限要素法とモード重畳法による定式化)

豊橋技術科学大学 工学部 加藤史郎

§1 序 初期不整のない浅い球殻の対称変形動的座屈解析は, Humphreys と Bodner 以来, 多くの研究者により進められ, その座屈機構がかなりに究明されてきた。しかし, 初期不整を有する場合には, 動的座屈問題は殆んど解析が行われていない。

本論文では, 有限要素法とモード重畳法を用いて, 初期不整を有する球殻の動的座屈解析法を定式化し, 2, 3 の解析例を通してその座屈機構を検討する。

§2 解析方法 図 1 に示す回転殻が接線方向変位 u , v 及び法線方向変位 w を受けると, 殻に生ずる歪は次のように表わされる。ただし, w^I は法線方向の初期不整である。

$$\varepsilon = (\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{s\theta}, K_s, K_\theta, K_{s\theta})^T$$

$$= L_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + L_b(w) + \frac{1}{2} N(w) + \bar{N}(w, w^I) \quad (1)$$

ここで $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{s\theta}$ は面内歪, $\kappa_s, \kappa_\theta, \kappa_{s\theta}$ は面外曲げ歪を示し, 微分演算子 $L_t, L_b, N, \bar{N}$ は各々, 次のものである。

$$L_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ \frac{1}{s_0} & \frac{1}{s_0 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{2s_0 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{2s_0} \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} & 0 \\ -\frac{1}{s_0} \frac{\partial \varphi}{\partial s} & \frac{\cos \varphi}{s_0^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ -\left(\frac{3}{4s_0 \sin \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\cos \varphi}{4s_0^2 \sin^2 \varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} & \left(\frac{1}{4} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{3 \cos \varphi}{4s_0 \sin \varphi} \right) \frac{\partial}{\partial s} \\ & -\left(\frac{3 \cos \varphi}{4s_0 \sin \varphi} + \frac{1}{4s_0} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$L_b(w) = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial s}, -\frac{\cos \varphi}{s_0 \sin \varphi}, 0, \frac{\partial^2}{\partial s^2}, \frac{1}{s_0^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{s_0} \frac{\partial}{\partial s}, \frac{1}{s_0 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{s_0} \right) \right]^T (w)$$

$$N(w) = \left[\left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2, \left(\frac{1}{s_0 \sin \varphi} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2, \frac{1}{s_0 \sin \varphi} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial s}, 0, 0, 0 \right]^T$$

$$\bar{N}(w, w^I) = \left[\frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w^I}{\partial s}, \left(\frac{1}{s_0 \sin \varphi} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial w^I}{\partial \theta}, \frac{1}{2s_0 \sin \varphi} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial w^I}{\partial s} + \frac{\partial w^I}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial s} \right), 0, 0, 0 \right]^T$$

なお，式(1),(2)を導くにあたって，歪の非線形性は面内歪に生じ，かつ，法線方向変位 w のみが原因すると仮定した。

回転殻は法線方向にのみ荷重 p を受け，接線方向の慣性力は省略しうると仮定すると，回転殻に蓄積される歪エネルギー $-V_I$ ，運動エネルギー $-V_K$ ，外力エネルギー $-V_E$ はそれぞれ次式で表わされる。

$$V_I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_S \varepsilon^T \cdot H \cdot \varepsilon \cdot s_0 \sin\varphi \cdot dS \quad (3)$$

$$V_K = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_S \dot{w} \cdot \mu \cdot \dot{w} \cdot s_0 \sin\varphi \cdot dS \quad (4)$$

$$V_E = \int_0^{2\pi} d\theta \int_S w \cdot p \cdot s_0 \sin\varphi \cdot dS \quad (5)$$

ここで， μ は単位面積当り質量， $\dot{}$ は時間微分を示し， t ， ν を殻厚およびポアソン比とすると，

$$H = \begin{bmatrix} E_I & 0 \\ 0 & \frac{t^2}{12} E_I \end{bmatrix}, \quad E_I = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (6)$$

歪を式(2)のように仮定した場合，殻の接線方向釣合式が， u ， v について線形となる。この性質を利用すれば，モード重畳法で仮定すべき変位は w だけとなる。したがって， w を一般化変位 $d_i(t)$ ，モード $w_i(s)$ を用いて，次のように展開する。

$$W = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \cdot w_i(s) \cdot \cos N_i \theta \quad (7)$$

ここで、 N_i は i モードの θ 方向展開次数、 t は時間を示す。
初期不整 w^I も同様に、モードで展開する。

$$w^I = \varepsilon \sum_{i=1}^n \alpha_{i0} \cdot w_i(s) \cdot \cos N_i \theta \quad (8)$$

接線方向変位 u, v に対する基本式は Hamilton の原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad L = V_I - V_E - V_K \quad (9)$$

より得られ、次式のように、 u, v が求められる。

$$\begin{aligned} u = & \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot u_i \cos N_i \theta + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \sum_{\beta=0}^K u_{\beta ij} \cos \beta \theta \\ & + 2\varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_{j0} \sum_{\beta=0}^K u_{\beta ij} \cos \beta \theta \\ v = & \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \sin N_i \theta + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \sum_{\beta=0}^K v_{\beta ij} \sin \beta \theta \\ & + 2\varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_{j0} \sum_{\beta=0}^K v_{\beta ij} \sin \beta \theta \end{aligned} \quad (10)$$

$$K = 2 \cdot \max(N_i)$$

ここで、 $u_i, v_i, u_{\beta ij}, v_{\beta ij}$ は、 u, v に対する線形方程式を有限要素法を適用する事により容易に得られる。式(9)と式(7),(8),(10)を用いて α_i で表示すると、

$$\begin{aligned}
L = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ({}_0A_{ij} + \varepsilon \cdot {}_1A_{ij} + \varepsilon^2 \cdot {}_2A_{ij}) \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j \\
& + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n ({}_0A_{ijk} + \varepsilon \cdot {}_1A_{ijk}) \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j \dot{\alpha}_k \\
& + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n {}_0A_{ijkl} \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j \dot{\alpha}_k \dot{\alpha}_l - \sum_{i=1}^n \dot{\alpha}_i Q_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j
\end{aligned} \quad (11)$$

したがって, α_i に対する基本式は Hamilton の原理より, 次式となる。

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n M_{ij} \ddot{\alpha}_j + \sum_{j=1}^n D_{ij} \dot{\alpha}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ijk} \dot{\alpha}_j \dot{\alpha}_k \\
+ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n D_{ijkl} \dot{\alpha}_j \dot{\alpha}_k \dot{\alpha}_l - Q_i = 0
\end{aligned} \quad (12)$$

ここで, 式(11)(12)で用いられる各係数は以下に示すものである。

$$\begin{aligned}
D_{ij} &= \frac{1}{2} \{ {}_0A_{ij} + {}_0A_{ji} + \varepsilon ({}_1A_{ij} + {}_1A_{ji}) + \varepsilon^2 ({}_2A_{ij} + {}_2A_{ji}) \} \\
D_{ijk} &= \frac{1}{3} \{ {}_0A_{ijk} + {}_0A_{kij} + {}_0A_{jki} + \varepsilon ({}_1A_{ijk} + {}_1A_{kij} + {}_1A_{jki}) \} \\
D_{ijkl} &= \frac{1}{4} ({}_0A_{ijkl} + {}_0A_{klij} + {}_0A_{lrik} + {}_0A_{jklr}) \\
L \left(\begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} \right) &= L_t \left(\begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right) + L_b(w) \\
{}_0A_{ij} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_S L \left(\begin{matrix} u_i \cos N_i \theta \\ v_i \sin N_i \theta \\ w_i \cos N_i \theta \end{matrix} \right)^T \cdot H \cdot L \left(\begin{matrix} u_j \cos N_j \theta \\ v_j \sin N_j \theta \\ w_j \cos N_j \theta \end{matrix} \right) S_0 \sin \varphi \cdot dS \\
{}_0\bar{A}_{ijk} &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_S L \left(\begin{matrix} u_i \cos N_i \theta \\ v_i \sin N_i \theta \\ w_i \cos N_i \theta \end{matrix} \right)^T \cdot H \cdot L_t \left(\begin{matrix} \sum_{\beta=0}^K u_{\beta jk} \cos \beta \theta \\ \sum_{\beta=0}^K v_{\beta jk} \sin \beta \theta \end{matrix} \right) S_0 \sin \varphi \cdot dS \\
{}_0A_{ijk} &= \frac{1}{2} ({}_0\bar{A}_{ijk} + {}_0\bar{A}_{kji}) \\
{}_0\bar{A}_{ijkl} &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_S \left\{ L_t \left(\begin{matrix} \sum_{\beta=0}^K u_{\beta ij} \cos \beta \theta \\ \sum_{\beta=0}^K v_{\beta ij} \sin \beta \theta \end{matrix} \right) + \frac{1}{2} \bar{N} (w_i \cos N_i \theta, w_j \cos N_j \theta) \right\}^T \cdot H \cdot
\end{aligned} \quad (13)$$

$$\cdot \left\{ L_t \left(\sum_{\theta=0}^K U_{\beta R L} \cos \beta \theta \right) + \frac{1}{2} \bar{N} (W_k \cos N_k \theta, W_l \cos N_l \theta) \right\} S_0 \sin \varphi \cdot dS$$

$${}_0 A_{ijkl} = \frac{1}{2} ({}_0 \bar{A}_{ijkl} + {}_0 \bar{A}_{ilrkj})$$

$$Q_i = \int_0^{2\pi} d\theta \int_S W_i \cos N_i \theta \cdot p \cdot S_0 \sin \varphi \cdot dS$$

$$M_{ij} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_S W_i \cos N_i \theta \cdot \mu \cdot W_j \cos N_j \theta \cdot S_0 \sin \varphi \cdot dS$$

$${}_1 A_{ij} = \frac{4}{3} \sum_{k=1}^n {}_0 A_{ijk} \cdot \alpha_{k0}, \quad {}_1 A_{ijk} = 3 \sum_{l=1}^n {}_0 A_{lijk} \cdot \alpha_{l0}$$

$${}_2 A_{jil} = 2 \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n {}_0 A_{ijkrl} \cdot \alpha_{i0} \cdot \alpha_{j0}$$

式(12)の係数を調べてみる。初期不整を有する殻に対する係数 $D_{ij}, D_{ijk}, D_{ijkl}$ は、初期不整を有しない場合の係数 ${}_0 \bar{A}_{ij}, {}_0 \bar{A}_{ijk}, {}_0 \bar{A}_{ijkl}$ 及び初期不整パラメータと、初期不整展開係数 α_{i0} を用いる簡単な行列演算から容易に得られる。この係数間の性質は、動的座屈解析を繰返し行う場合には、演算時間を大きく短縮し、実用に耐えうる計算である事を示している。

§3 初期不整を有する扁平固定球殻の動的・静的座屈解析

(3-1) 球殻の形状、荷重、初期不整の仮定及び採用モード数
解析される扁平固定球殻は、図2で示され、半開角 $\theta_0 = 10^\circ$ 、半径 $R = 50 \text{ m}$ 、ヤング率 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ ton/m}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、殻厚は一様で t 、質量 $\mu = \rho t / g$ ($\rho = 2.4 \text{ ton/m}^3$, $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$) である。扁平球殻の無次元形状パラメータ

$$\lambda = 2 \sqrt{3(1-\nu^2)} \cdot \sqrt{H/t} \quad (14)$$

である。計算例は $\lambda = 6, 7, 8$ に対して行っている。

作用する荷重は図3,4で示され、静的解析では等分布荷重、動的には、等分布ステップ荷重である。荷重の指標として P/P_{cl} を用いる。 P_{cl} は Zolty が得た完全球殻の静的座屈荷重で次式で与えられる。

$$P_{cl} = 2E / \sqrt{3(1-\nu^2)} \cdot (t/R)^2 \quad (15)$$

変形の指標として、球殻の平均変位

$$W_{ave} = \left\{ \int_0^{\theta_0} 2\pi R \sin\theta \cdot w \cdot R \cdot d\theta \right\} / \{2\pi R^2(1-\cos\theta_0)\} \quad (16)$$

を用いて W_{ave}/H を使う。ただし、 H は図2に示される球殻のライズである。動的解析では、変動する平均変位のうちの最大値を指標としている。

解析に用いられる初期不整は、法線方向変位モード w_i の1つに比例するものとし、次のように仮定している。

$$w^I = \varepsilon_i \cdot d_{io} \cdot w_i \cdot \cos N_i \theta, \quad N_i = 0 \quad (17)$$

ここで、 $\varepsilon_i = 1.0$ の時、 w^I の最大値が殻厚となるように d_{io} を定める事にする。つまり $\varepsilon_i = 1.0$ とは、1モード比

例形初期不整の最大値が、殻厚に等しくなっている事を示す。用いられるモードは、軸対称変位モード 6コであり、図5に示されている。この6コのモードは軸対称変形自由振動解析から得られたものである。

(3-2) 扁平固定球殻の軸対称変形静的・動的座屈解析結果

$\lambda=6, 7, 8$ に対する静的座屈解析結果が図6~11に示されている。実線が釣合曲線を示す。破線は動的座屈解析の結果であり、X印は直接応答解析から得られた動的座屈荷重を示す。○印は静的上座屈荷重、□印は静的下座屈荷重を示す。△印は、ポテンシャル $\Phi = V_I + V_K - V_E = 0$, $V_K = 0$ を満足し、かつ、静的釣合を満足する点で、ここではアスタティック座屈点と呼ぶ。したがって、アスタティック点では、ポテンシャル Φ はサドル点を形成し、ステップ荷重による動的座屈荷重の下界を示す。

図12~20は、初期不整によって各種の座屈荷重が受ける影響を示す。アスタティック座屈荷重は、常に静的上座屈荷重と静的下座屈荷重の間にあり、かつ、直接応答解析による動的座屈荷重(X印)以下にある。また、初期不整に対しても鈍感である。

原則的には、動的座屈変形も静的座屈変形もアスタティック点を通過して大変形へ移行するから、大変形がまさに起ろう

としている時点では、両者の座屈波形はきわめて類似する事となる。

§4 結論

(i) 初期不整の最大値が殻厚の 10~20% 程度になると、静的上座屈荷重は急激に低下する。

(ii) 静的下座屈荷重は初期不整に鈍感であり、その値は、アスタティック座屈荷重とよく近接している。

(iii) アスタティック座屈荷重は初期不整に鈍感であり、理論的にも数値実験的（直接応答解析的）にも、動的座屈荷重の下界を示す。よって、アスタティック座屈荷重は初期不整を有する球殻の静的座屈荷重及びステップ荷重による動的座屈荷重の実用的数値として用いる事ができる。

参考文献

- 1) Humphrey, J.S. and Bodner, S.R., "Dynamic Buckling of Shallow Shells Under Impulsive Loading", AS E, EM, 1962, P.P. 17-36
- 2) Kawai, T., "Finite Element Analysis of the Geometrically Nonlinear Problem of Plates," US-Japan Seminar, Tokyo, 1969
- 3) Budiansky, B., "Dynamic Buckling of Elastic Structures," Proc. Dynamic Stability of Structures, Oct. 18-20, 1965, pp 83-106
- 4) Thompson, J.M., "Dynamic Buckling under Step Loading," Proc. Dynamic Stability of Structures, Oct. 18-20, 1965, pp 83-106

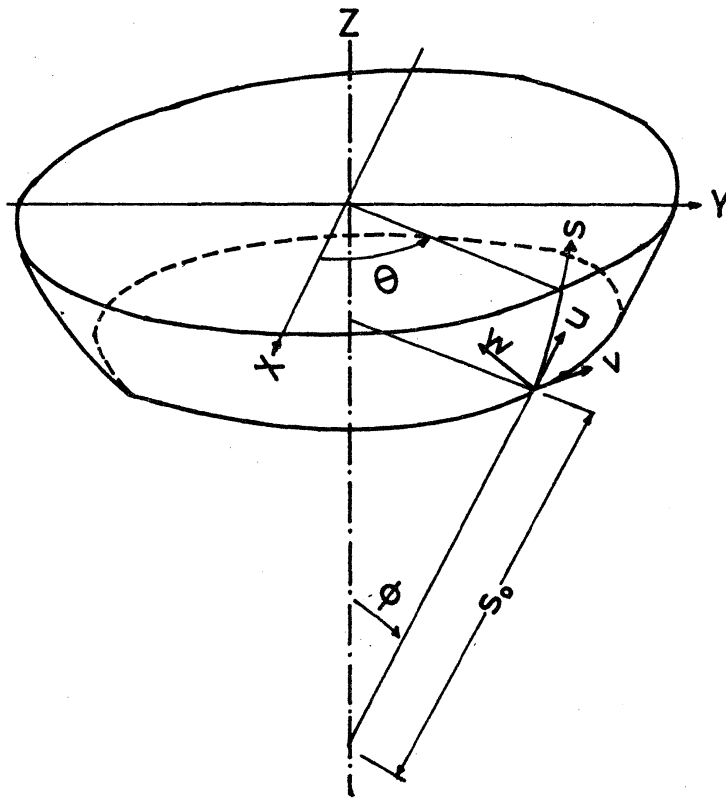


図1 回転殻の幾何形状

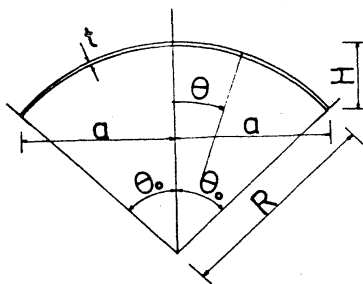


図2 球殻の形状

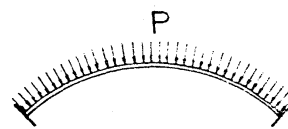


図3 等分布荷重

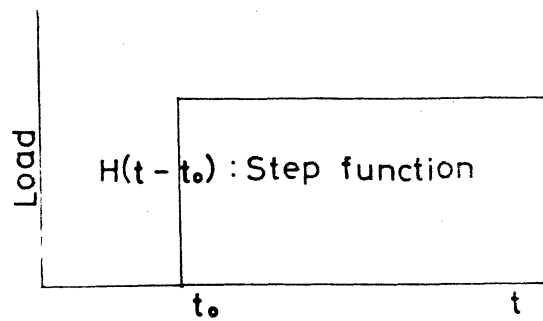


図4 ステップ荷重

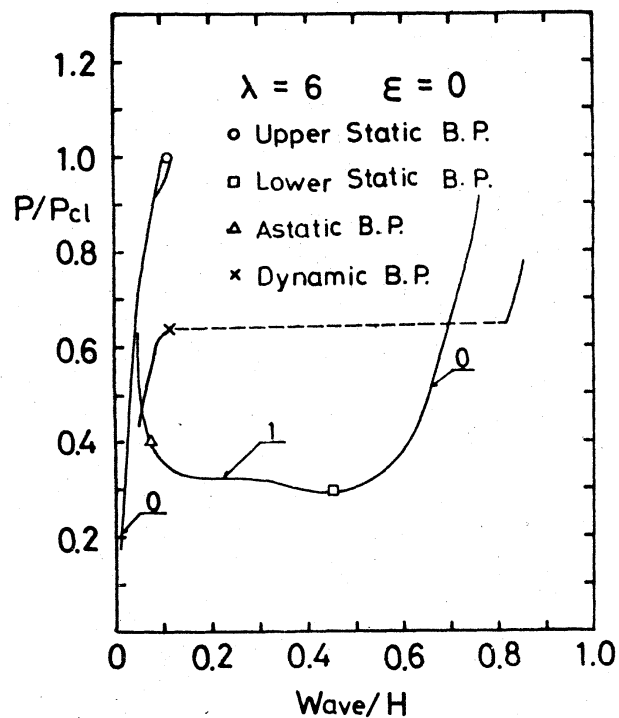


図6 軸対称変形・静的動的釣合曲線
 $\lambda=6, \epsilon=0$

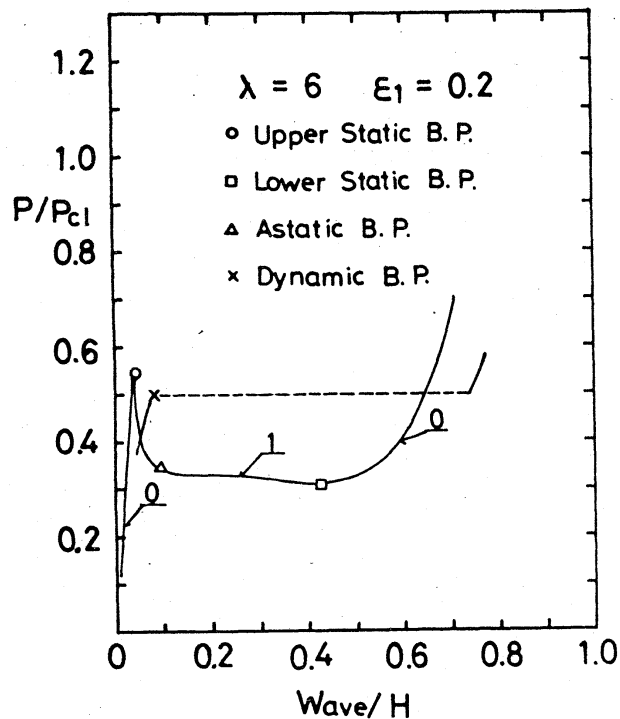


図7 軸対称変形・静的動的釣合曲線
 $\lambda=6, \epsilon_1=0.2$

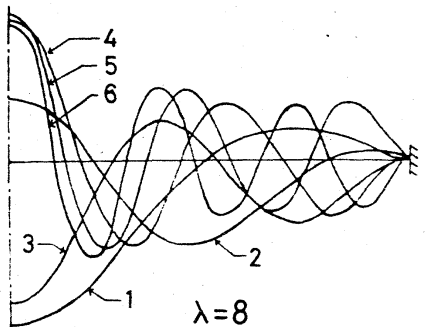
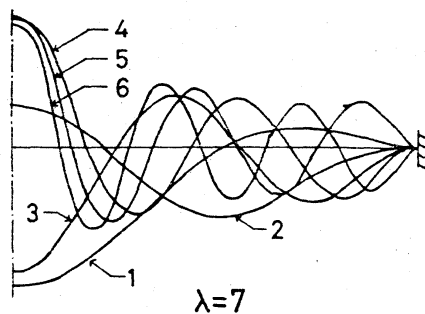
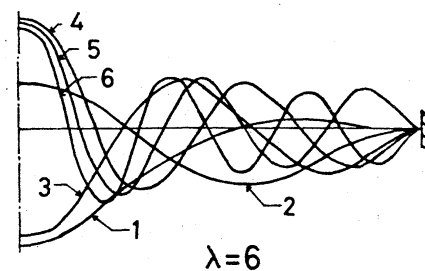


図5 法線方向変位モード

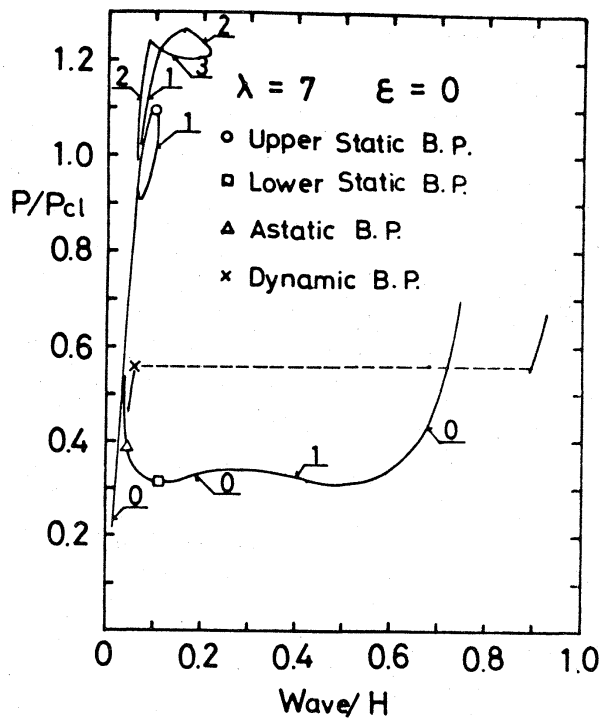


图8 轴对称变形·静的·動的釣
合曲線 $\lambda=7, \epsilon=0$

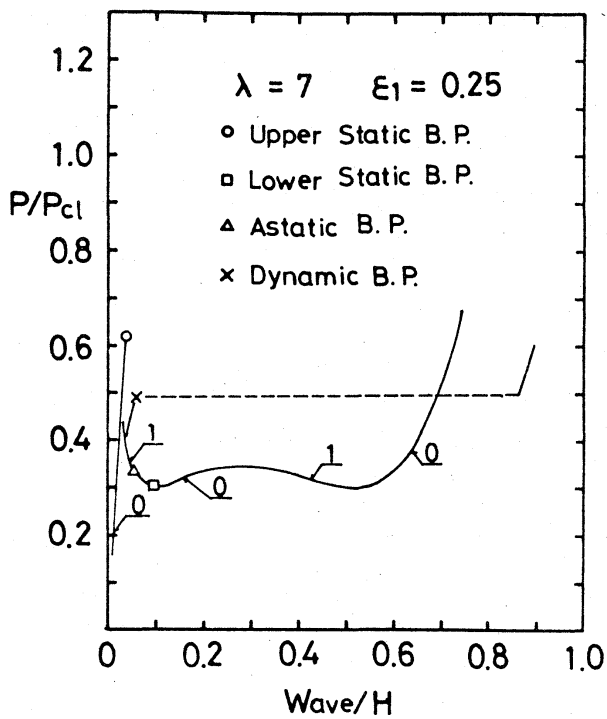


图9 轴对称变形·静的·動的釣
合曲線 $\lambda=7, \epsilon_1=0.25$

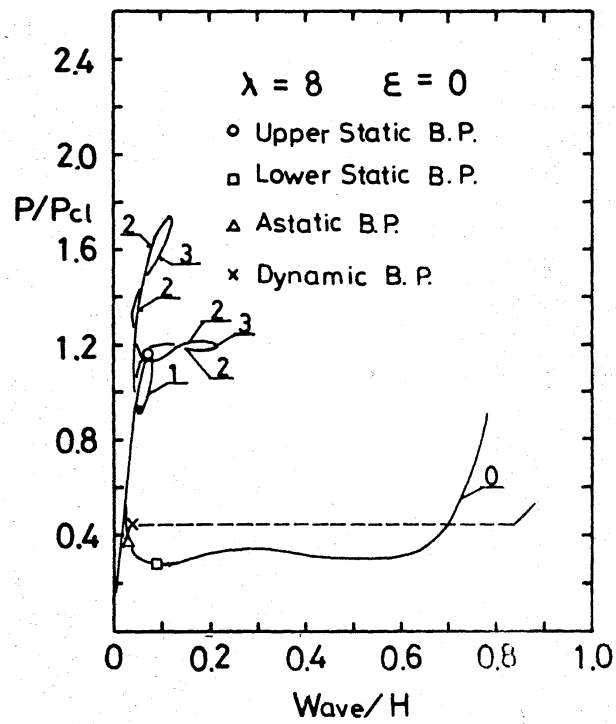


图10 轴对称变形 静的 動的釣合曲線 $\lambda=8, \epsilon=0$

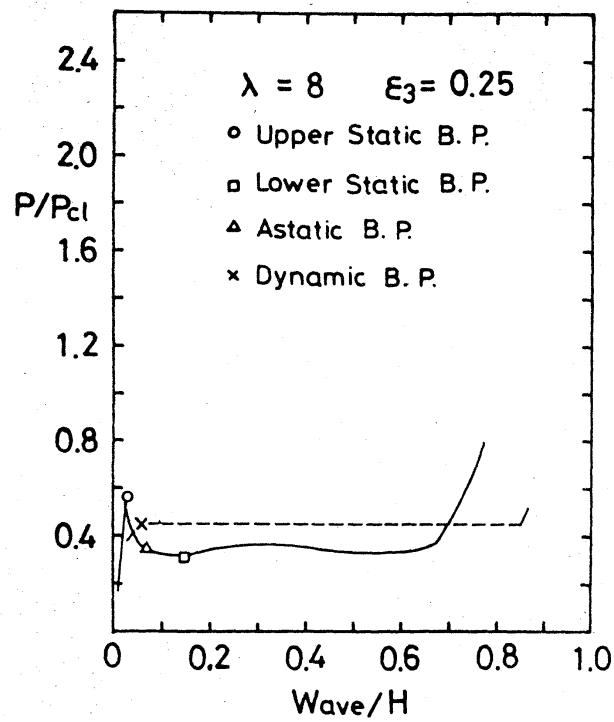


图11 轴对称变形 静的 動的釣合曲線 $\lambda=8, \epsilon_3=0.25$

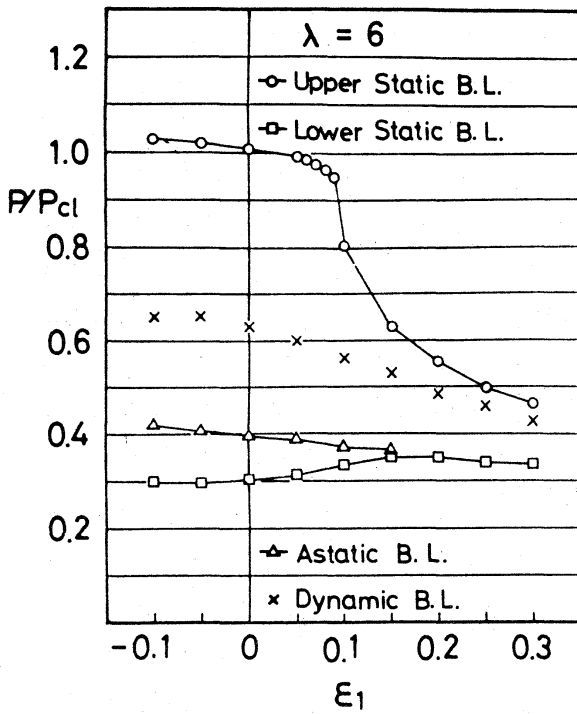


図12 初期不整に対する座屈敏感度

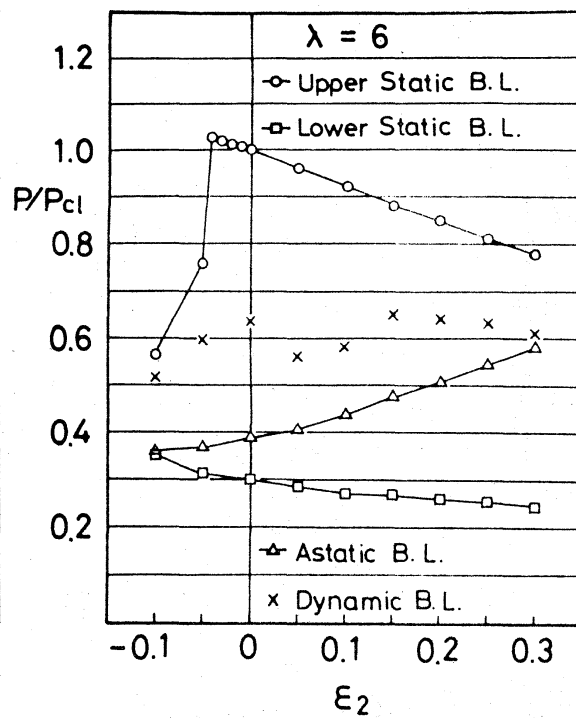


図13 初期不整に対する座屈敏感度

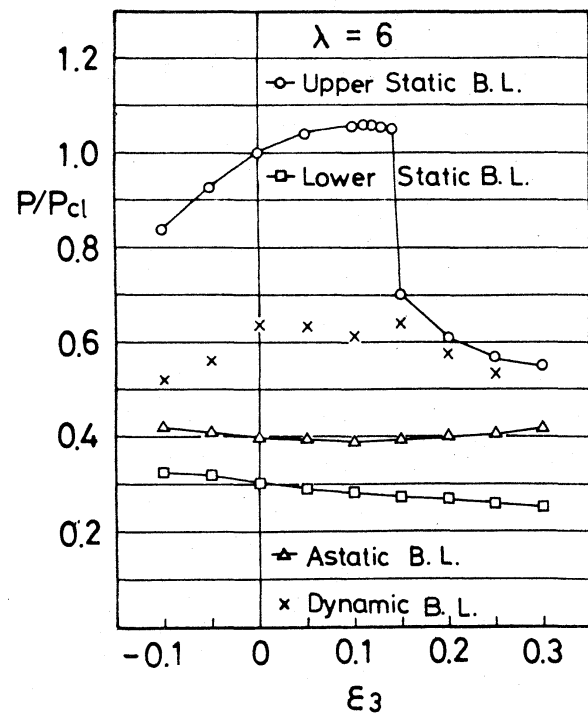


図14 初期不整に対する座屈敏感度

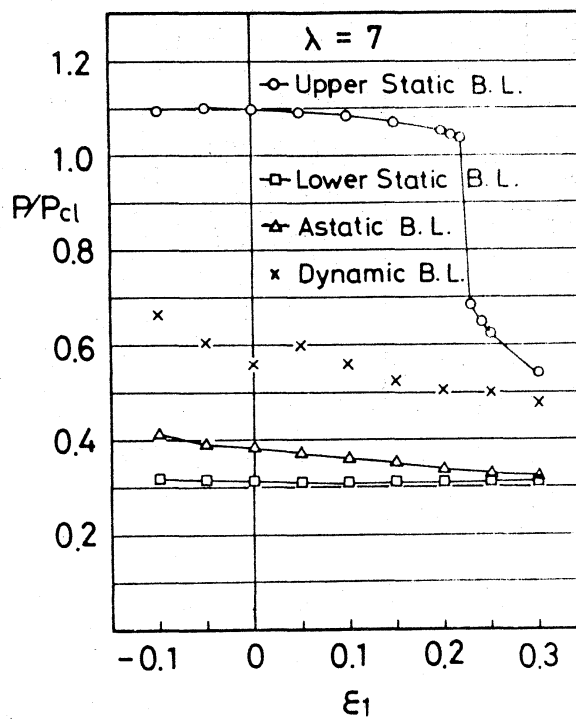


図15 初期不整に対する座屈敏感度

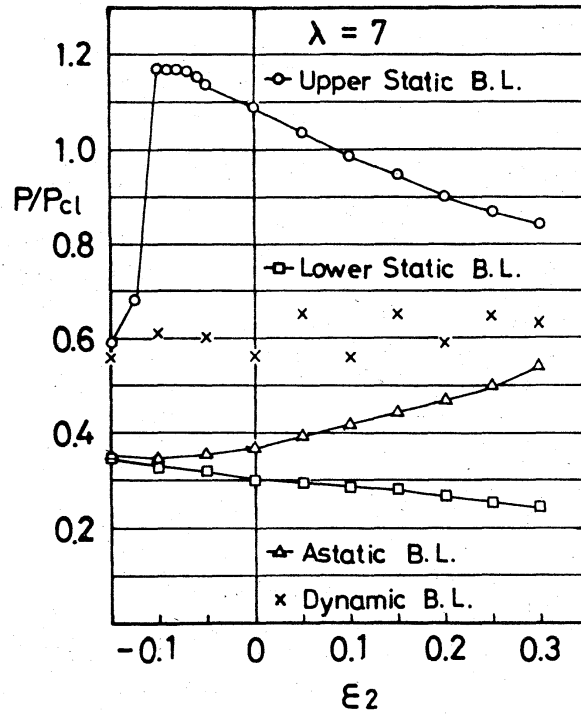


図16 初期不整に対する座屈敏感度

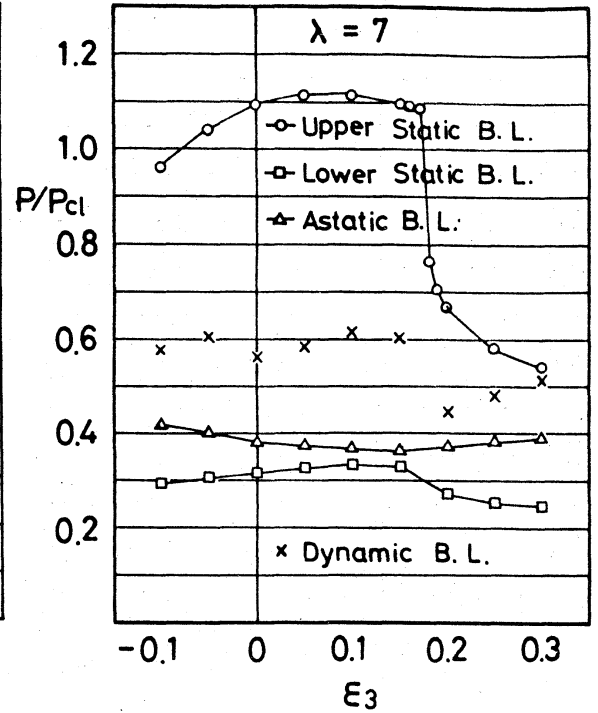


図17 初期不整に対する座屈敏感度

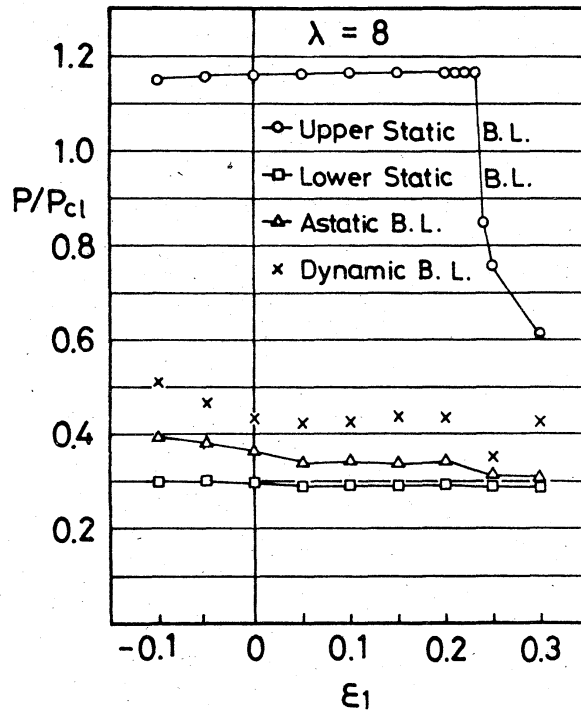


図18 初期不整に対する座屈敏感度

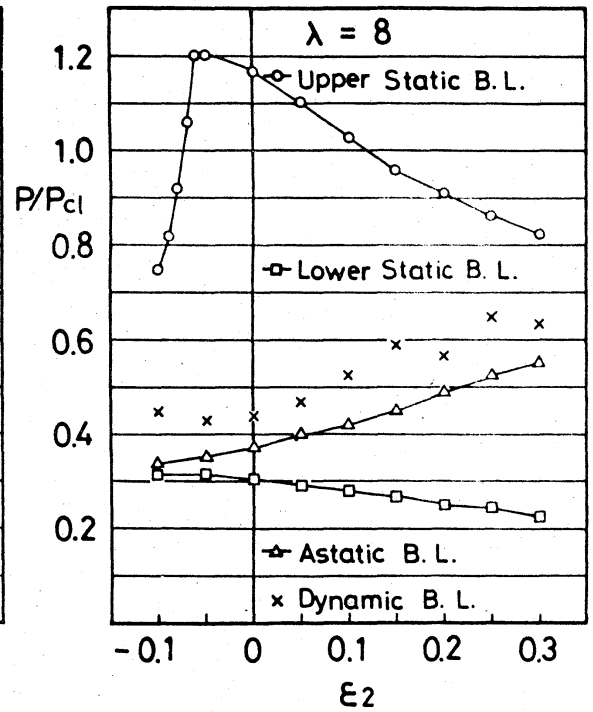


図19 初期不整に対する座屈敏感度

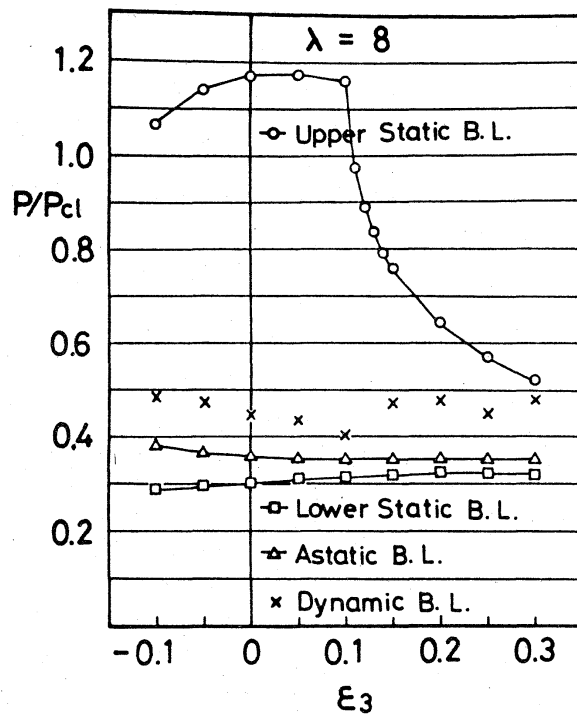


図 20 初期不整に対する座屈敏感度