

Regularity of the solution to the hyperbolic equation with non-smooth coefficients

大阪大・理 加藤 圭一 (Keiichi Kato)

1. 序

線型双曲型方程式の特異性の伝播については、数多くの結果があるが、そのほとんどは、係数が解析的あるいは C^∞ という仮定をおいている。ここでは、係数が C^∞ でない場合の特異性の伝播について考察する。[1] では、係数が連続であるような場合を考察しているが、我々は、係数の滑らかさをもう少し上げて、しかも、[1] で考察しているのより高い regularity の伝播を調べる。

次の方程式(1)を用いて問題の意味をもう少しはっきりさせよう。

$$(1) \quad \square u + a(t, x)u = 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n,$$

$$\text{ここで、} \square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

しばらくは、この(1)についてのみ考察し、§3 に於いて、もう少し一般の方程式も取り扱うことにしよう。

今、図の W においてのみ、
係数 Q が滑らかでないとする。
解 u が Ω で (1) をみた
しているとし、 $u \in C^\infty \cap K$
とすると、 Q の W における
singularity がどのような場合
に解 u が D において C^∞ とな
るか」という問題を考える。

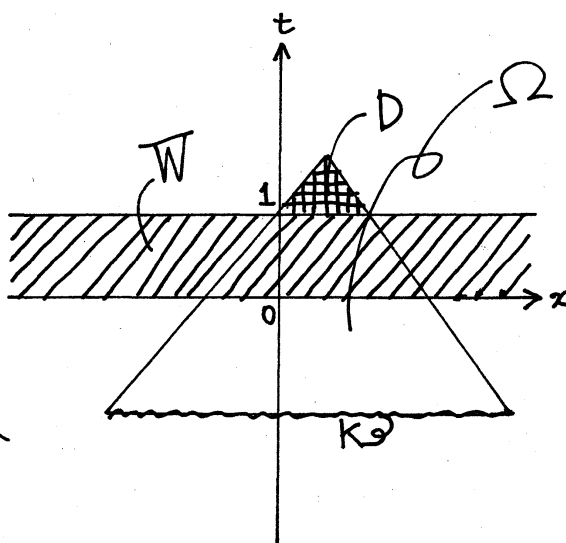


図 1

結果を述べるために少し記号を定義しよう。

(定義)

$s, r \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ に対し、

$$u \in H_{v, \text{loc}}^{s, r}(\Omega)$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} u \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ かつ}$$

$$(1+t^2+|z|^2)^{\frac{s}{2}} (1+|t+v \cdot z|^2)^{\frac{r}{2}} \widehat{\chi u}(\tau, \zeta) \in L^2(\mathbb{R}^{n+1})$$

$$\text{for } \forall \chi(t, x) \in C_0^\infty(\Omega).$$

(定義)

$$u \in H^r \text{ at } (t_0, x_0, \tau_0, \zeta_0) \in T\Omega \setminus 0$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \chi(t, x) \in C_0^\infty(\Omega) \text{ with } \chi(t_0, x_0) \neq 0 \text{ と}$$

(τ_0, ζ_0) の錐近傍 $\square(\tau_0, \zeta_0)$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ が存在して、

$$\iint_{\square(\tau_0, \zeta_0)} (1+t^2+|z|^2)^r |\widehat{\chi u}|^2 d\tau d\zeta < +\infty.$$

(定義)

$$\text{Char } \square = \{ (t, x, \tau, \beta) \in T^*\Omega \setminus \{0\} \mid \tau^2 - |\beta|^2 = 0 \}$$

係数 a が次の仮定をみたすことが、上記のことが成立するための十分条件である。

(仮定 A)

$\exists s_1 > \frac{n+1}{2} - 1, \quad \exists v_1 \in \mathbb{R}^n$ with $|v_1| < 1$ があって

$$a(t, x) \in H_{v, \text{loc}}^{s_1, \infty}(\Omega)$$

をみたす。

ただし、 $u \in H_{v, \text{loc}}^{s_1, \infty}(\Omega)$ とは $u \in H_{v, \text{loc}}^{s_1, r}(\Omega)$ for $\forall r \in \mathbb{R}$ なること。

このことを、もう少し精密に述べたものが、次の定理 1 である。

定理 1

K を Ω の部分集合、 $\hat{K}$ を K の決定領域とする。 $a(t, x)$ は、仮定 A をみたすとする。 u は (I) をみたし、 $s + s_1 - \frac{n+1}{2} > 0$ なる $s > 0$ に対し、 $u \in H_{\text{loc}}^s(\Omega)$ であり、さらに

$$u \in H^r \quad \text{on} \quad (K \times \mathbb{R}_{t,j}^{n+1} \setminus \{0\}) \cap \text{Char } \square$$

であるとする。そのとき、

$$u \in H_{v, \text{loc}}^{s, r-s}(\hat{K} \cap \Omega)$$

が成り立つ。

注意 1.

Q の例としては、 $v \in \mathbb{R}^n$ with $|v| < 1$, $s_1 > \frac{n+1}{2} - 1$, $f(x) \in H_{loc}^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ とするとき、 $Q(t, x) = f(x - vt)$ がある。もっと具体的には、

$$Q(t, x) = \frac{1}{|x - vt|^\delta} \quad (\delta < \frac{1}{2}) \quad \text{がある。}$$

注意 2.

この定理からすぐに、冒頭に説明したこと、則ち、 $t < 0$, $t > 1$ で $Q(t, x) \in C^\infty$ ならば、 $u \in C^\infty$ on K から、 $u \in C^\infty$ in D が従うことがわかる。(K, D は、図 1 中の集合) 実際、 $u \in H^\infty$ on K から、定理 1 より、 $u \in H_{v, loc}^{s, \infty}$ in D がわかり、 $|v| < 1$ より、 $u \in H^\infty$ on $(D \times \mathbb{R}^m \setminus \{0\}) \cap \text{char } \square$ を得る。一方、 $(D \times \mathbb{R}^m \setminus \{0\}) \cap (\text{char } \square)^c$ においては、この上で、 $\square$ が微局所的に楕円型であることから、 $\square u = a u \in H^s (\because a \in C^\infty \text{ in } D)$ より、 $u \in H^{s+2}$ が従い、この議論を繰り返すと、 $u \in H^\infty$ on $(D \times \mathbb{R}^m \setminus \{0\}) \cap (\text{char } \square)^c$ を得る。上の 2 つのことから、 $u \in C^\infty$ in D である。

2. 定理 1 の証明

次の 2 つの補題を用意する。

補題 1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ とする。

$s+t-\frac{n}{2} > 0$, $0 < s, t \leq \frac{n}{2}$ をみたす実数 s, t に対し、

$$u \in H_{loc}^s(\Omega), \quad v \in H_{loc}^t(\Omega)$$

とする。そのとき、

$$uv \in H_{loc}^{s+t-\frac{n}{2}-\epsilon}(\Omega) \text{ for } \forall \epsilon > 0$$

が成り立つ。

補題2. $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ とする。 $s_1 + s_2 - \frac{n+1}{2} > 0$, $0 < s_1, s_2 \leq \frac{n+1}{2}$,

$r \geq 0$ をみたす実数 s_1, s_2, r に対し、

$$u \in H_{v, loc}^{s_1, r}(\Omega), \quad v \in H_{v, loc}^{s_2, r}(\Omega)$$

とする。そのとき、

$$uv \in H_{v, loc}^{s_1+s_2-\frac{n+1}{2}-\epsilon, r}(\Omega) \text{ for } \forall \epsilon > 0$$

が成り立つ。

補題の証明はあとまわしにして、まず、定理1の証明をする。

(定理1の証明)

証明は、Hörmanderの特異性の伝播の定理を軸に行う。
証明を簡潔に述べるために、 $\hat{K} \subset \Omega$ とする。 $(t_0, x_0) \in \hat{K}$
を任意にとる。 $(t_0, x_0, \tau_0, \zeta_0) \in T^*\hat{K} \setminus 0 \cap \text{char} \square$ のとき、 $\hat{K}$ は
 K の決定領域だから、 $\exists (\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) \in K$ があって、 $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0, \tau_0, \zeta_0)$ も出
発する null bicharacteristic curve が $(t_0, x_0, \tau_0, \zeta_0)$ を通るようたでき
る。定理の仮定と補題1から、

$$(2) \quad \square u = -au \in H_{loc}^{s_1+s-\frac{n+1}{2}-\epsilon}(\Omega),$$

定理の仮定から、

$$(3) \quad u \in H^r \text{ at } (\tilde{t}_0, \tilde{x}_0, \tau_0, \zeta_0)$$

だから、Hörmander の定理 を使うと、

$$(4) \quad u \in H^{\min(S+\delta, r)} \quad \text{at } (t_0, x_0, \tau_0, \zeta_0),$$

ここで $\delta = S_1 - \frac{n+1}{2} + 1 - \epsilon > 0$. (ϵ を十分小さくとり、 $\delta > 0$ にする)

一方、 $(t_0, x_0, \tau_0, \zeta_0) \in T^*\mathcal{K} \setminus 0 \cap (\text{Char } \square)^c$ のとき、 $\square$ は

$(t_0, x_0, \tau_0, \zeta_0)$ で微局所的に楕円型だから、(2)式より、

$$(5) \quad u \in H^{\min(S+\delta+1, r)} \quad \text{at } (t_0, x_0, \tau_0, \zeta_0)$$

を得る。 (4)、(5) を組み合わせると

$$u \in H^{\min(S+\delta, r)} \quad \text{at } (t_0, x_0)$$

を得、 $(t_0, x_0) \in \mathcal{K}$ は任意だから、

$$(6) \quad u \in H_{\text{loc}}^{\min(S+\delta, r)}(\widehat{\mathcal{K}})$$

を得る。この議論は $S + (m-1)\delta \leq \frac{n+1}{2} < S + m\delta$ となるまで、

m 回繰り返すことができる。 $r \leq S + m\delta$ なら証明終。以下、

$r > S + m\delta$ の場合を考える。定義から明らかに、

$$H_{\text{loc}}^{s+r}(\Omega) \subset H_{v, \text{loc}}^{s, r}(\Omega) \quad \text{for } r > 0,$$

だから、仮定 A と補題 2 から、

$$(7) \quad \square u = -a u \in H_{v, \text{loc}}^{S+(m-1)\delta+S_1-\frac{n+1}{2}-\epsilon, \delta}(\widehat{\mathcal{K}})$$

$(t_0, x_0, \tau_0, \zeta_0) \in T^*\mathcal{K} \setminus 0 \cap \text{Char } \square$ のとき、前と同様に、

$\exists (\hat{t}_0, \hat{x}_0) \in \mathcal{K}$ が存在して、 $(\hat{t}_0, \hat{x}_0, \tau_0, \zeta_0)$ を出発する null bi-characteristic curve は、 $(t_0, x_0, \tau_0, \zeta_0)$ を通る。その null bi-characteristic curve を Γ とすると、 $|\nu| < 1$ であるから、(7) より、

$$(8) \quad au \in H^{s+m\delta+s_1-\frac{n+1}{2}-\epsilon} \quad \text{on } \Gamma \cap T^*\mathcal{R} \setminus 0$$

仮定から $u \in H^r$ at (t_0, x_0, p_0, j_0) 故から. Hörmander の定理より.

$$(9) \quad u \in H^{\min(s+(m+1)\delta, r)} \quad \text{at } (t_0, x_0, p_0, j_0)$$

を得る。 $\Sigma_{\epsilon_1} = \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \tau^2 \geq (1+\epsilon_1)|\xi|^2 \text{ or } \tau^2 \leq (1-\epsilon_1)|\xi|^2\}$

とおくと. ϵ_1 を十分小にすれば. (9) より.

$$(10) \quad u \in H^{s+(m+1)\delta} \quad \text{on } \mathcal{R} \times (\Sigma_{\epsilon_1})^c$$

を得る。一方, $\mathcal{R} \times \Sigma_{\epsilon_1}$ においては, $\chi \in C_0^\infty(\mathcal{R})$ に対し.

$$(11) \quad \square(\chi u) = \chi_t u_t + \chi_{tt} u - 2\nabla \chi \cdot \nabla u - (\Delta \chi)u - \chi au \\ =: F(t, x)$$

とすると, $u \in H_{r, \text{loc}}^{s+(m-1)\delta, \delta}(\mathcal{R})$, $a \in H_{r, \text{loc}}^{s_1, \infty}(\mathcal{R})$ 故から. 補題

2より, $F(t, x) \in H_{r, \text{loc}}^{s+(m-1)\delta-1, \delta}(\mathcal{R})$ を得る。(11) の両辺を

Fourier 変換して.

$$(\tau^2 - |\xi|^2) \widehat{\chi u}(\tau, \xi) = \widehat{F}(\tau, \xi).$$

$\left| \frac{\tau^2 + |\xi|^2}{\tau^2 - |\xi|^2} \right| \leq C$ on Σ_{ϵ_1} 故から.

$$(12) \quad (1 + \tau^2 + |\xi|^2)^{s+(m-1)\delta+1} (1 + |\tau + v \cdot \xi|^2)^\delta |\widehat{\chi u}|^2 \in L^1(\Sigma_{\epsilon_1})$$

を得る。(9) と (12) を合わせると.

$$u \in H_{r, \text{loc}}^{\min(s+m\delta, r-\delta), \delta}$$

この議論を $\min(s+m\delta, r-2\delta) = r-2\delta$ となるまで繰り返せば.

定理1 を得る。(証明終)

さて, 残っている補題1, 2 を証明する。

(補題1の証明)

Cu off function を掛けることにより、 $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $v \in H^t(\mathbb{R}^n)$ のとき、 $uv \in H^{s+t-\frac{n}{2}-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ を示せば十分。 $\sqrt{1+|\xi|^2}$ を $\langle \xi \rangle$ と書くことにする。 $r = s+t-\frac{n}{2}-\varepsilon$ とおくとき、

$$(B) \quad \langle \xi \rangle^r |\widehat{uv}(\xi)| \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

を示せばよい。

$$\begin{aligned} \langle \xi \rangle^r |\widehat{uv}(\xi)| &= C \langle \xi \rangle^r \left| \int \widehat{u}(\xi-\eta) \widehat{v}(\eta) d\eta \right| \\ &\leq C \langle \xi \rangle^r \left(\sum_{k=1}^4 \int_{D_k} |\widehat{u}(\xi-\eta) \widehat{v}(\eta)| d\eta \right) \\ &= \sum_{k=1}^4 I_k \end{aligned}$$

$$\text{ここで、 } D_1 = \{ \eta \in \mathbb{R}^n \mid |\xi-\eta| \geq \frac{1}{2}|\xi| \geq |\eta| \},$$

$$D_2 = \{ \eta \in \mathbb{R}^n \mid |\xi-\eta| \leq \frac{1}{2}|\xi| \leq |\eta| \},$$

$$D_3 = \{ \eta \in \mathbb{R}^n \mid |\xi-\eta| \geq |\eta| \geq \frac{1}{2}|\xi| \},$$

$$D_4 = \{ \eta \in \mathbb{R}^n \mid |\eta| \geq |\xi-\eta| \geq \frac{1}{2}|\xi| \}.$$

まず、 I_1 を考察する。 $s > 0$, $t-\frac{n}{2}-\varepsilon < 0$ だから、

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C \int_{D_1} \langle \xi-\eta \rangle^s |\widehat{u}(\xi-\eta)| \langle \eta \rangle^{t-\frac{n}{2}-\varepsilon} |\widehat{v}(\eta)| d\eta \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi-\eta \rangle^s |\widehat{u}(\xi-\eta)| \langle \eta \rangle^{t-\frac{n}{2}-\varepsilon} |\widehat{v}(\eta)| d\eta \end{aligned}$$

$\langle \cdot \rangle^s |\widehat{u}(\cdot)| \in L^2$, $\langle \cdot \rangle^{t-\frac{n}{2}-\varepsilon} |\widehat{v}(\cdot)| \in L^1$ だから、Hausdorff-Young の不等式を用いると、 $I_1 \in L^2(\mathbb{R}_\xi^n)$ 。全く同様にして、

$I_2 \in L^2(\mathbb{R}_\xi^n)$ であることがわかる。

次に、 I_3 を考察する。 $r = s+t-\frac{n}{2}-\varepsilon > 0$, $t-\frac{n}{2}-\varepsilon < 0$ だから、

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq C \int_{D_3} \langle \xi - \eta \rangle^r |\hat{u}(\xi - \eta)| |\hat{v}(\eta)| d\eta \\
&\leq C \int_{D_3} \langle \xi - \eta \rangle^s |\hat{u}(\xi - \eta)| \langle \eta \rangle^{t - \frac{n}{2} - \varepsilon} |\hat{v}(\eta)| d\eta \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi - \eta \rangle^s |\hat{u}(\xi - \eta)| \langle \eta \rangle^{t - \frac{n}{2} - \varepsilon} |\hat{v}(\eta)| d\eta
\end{aligned}$$

$\langle \cdot \rangle^s |\hat{u}(\cdot)| \in L^2$, $\langle \cdot \rangle^{t - \frac{n}{2} - \varepsilon} |\hat{v}(\cdot)| \in L^1$ だから、Hausdorff-Young の不等式から、 $I_3 \in L^2(\mathbb{R}_\xi^n)$ を得る。全く同様にして、 $I_4 \in L^2(\mathbb{R}_\xi^n)$ であることもわかる。以上より、(13) が示された。(証明終)

(補題2の証明)

$r=0$ のときは、補題1 そのものである。まず、 r が自然数のときを、証明する。 $M = \partial_t - v \cdot \partial_x$ とおくと、 $u \in H_{v, \text{loc}}^{s, r}(\Omega)$ であることと $M^k u \in H_{\text{loc}}^s(\Omega)$ for $k=0, 1, \dots, r$ は同値である。したがって、 $M^k(uv) \in H_{\text{loc}}^{s_1+s_2-\frac{n+1}{2}-\varepsilon}(\Omega)$ for $k=0, 1, \dots, r$ を示せばよい、これは、補題1 からすぐにわかる。実際、

$$M^k(uv) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (M^j u) (M^{k-j} v)$$

であるが、 u, v の仮定から、 $M^j u \in H_{\text{loc}}^{s_1}(\Omega)$, $M^{k-j} v \in H_{\text{loc}}^{s_2}(\Omega)$ だからである。 r が正の実数の場合は、interpolation による。

(証明終)

3. 定理の一般化

一般の strictly hyperbolic な方程式に関し、同様のことを考察しよう。

$$(13) \quad p(x, D) u = f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

$$\text{ここで, } p(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad x = (x_0, x') = (x_0, x_1, \dots, x_n),$$

$$D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{である。}$$

$p(x, D)$ に次の strictly hyperbolic の仮定をおく。

(仮定 B)

$$a_\alpha(x) \in C^\infty \quad \text{for } |\alpha| = m$$

$p_m(x, D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha$ は $(1, 0, \dots, 0)$ 方向に strictly hyperbolic で、 D_0^m の係数は 1 とする。則ち、 $x, \tau \neq 0$ を固定したとき、

$$p_m(x, \tau) = \tau^m - \hat{p}(x, \tau) = 0$$

は、 m 個の互いに異なる実根をもつ。

$b(x) \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ に対し、 $M = M_{b(x)} = \partial_{x_0} + b(x) \cdot \partial_{x'}$ と書くことにする。

(定義)

$s \in \mathbb{R}, \quad r \in \mathbb{N}, \quad b(x) \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ に対し、

$$u \in H_{b(x), \text{loc}}^{s, r}$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} u \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ かつ}$$

$$M^k u \in H_{\text{loc}}^s(\Omega) \quad \text{for } k = 0, 1, \dots, r.$$

この空間に対しても、補題 2 と同様のことが成り立つことは、容易にわかる。さらに、(仮定 A) に対応して、次の (仮定 C)

をおく。

(仮定 C)

$\exists b(x) \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ と $\exists S_\alpha > \max(m-1+|\alpha|-\frac{n+1}{2}, 0)$ が存在して、次の i) ii) をみたす。

$$i) \{ (x, \zeta) \in T^*\Omega \mid \zeta_0 + b(x)\zeta' = 0 \} \cap \{ (x, \zeta) \in T^*\Omega \mid P_m(x, \zeta) = 0 \} = \{0\}$$

$$ii) a_\alpha(x) \in H_{b(x), loc}^{S_\alpha, +\infty}(\Omega) \text{ for } |\alpha| \leq m-1.$$

定理 2.

K を Ω の部分集合、 $\hat{K}$ を K の決定領域とする。

$S > \max_{|\alpha| \leq m} \max(\frac{n+1}{2} - S_\alpha, |\alpha|)$ に対して、 $u \in H_{loc}^S(\Omega)$.

さらに $r \in \mathbb{N}$ に対し、

$$u \in H^{S+r} \text{ at } (K \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \cap \text{Char } P_m$$

とする。そのとき、

$$u \in H_{b(x), loc}^{S, r}(\hat{K})$$

が成り立つ。

(定理 2 の証明)

定理 1 の証明の前半部と同様にして、

$$(14) \quad u \in H_{loc}^{\min(S+l\delta, S+r)}(\hat{K})$$

ここで、 $S + (l-1)\delta < \frac{n+1}{2} \leq S + l\delta$, $\delta = \min_{|\alpha| \leq m-1} (S_\alpha - |\alpha| - \frac{n+1}{2} + m - 1 - \epsilon)$ である。 δ は ϵ を十分小さくとることににより、正にしておく。

$s+r \leq s+l\delta$ なら、証明が完了するから、 $s+r > s+l\delta$ としよう。則ち、

$$u \in H_{loc}^{s+l\delta}(\hat{K})$$

定義から明らかに、

$$H_{loc}^s \subset H_{b(x), loc}^{s-1, 1}$$

であるから、

$$u \in H_{b(x), loc}^{s+l\delta-1, 1}(\hat{K}).$$

ゆえに、補題2を用いて、

$$P_m u = -P'u + f \in H_{b(x), loc}^{s+l\delta+s_\alpha-|\alpha|-\frac{n+1}{2}-1-\epsilon, 1}(\Omega) \quad (2)$$

(仮定C)により、

$$-P'u \in H^{s+l\delta+s_\alpha-|\alpha|-\frac{n+1}{2}-\epsilon} \text{ on } \text{Char } P$$

であるから、 $(x, \xi) \in T^*\hat{K} \setminus 0 \cap \text{Char } P$ とすると、Hörmanderの定理を用いて、

$$(15) \quad u \in H^{\min(s+(l+1)\delta, s+r)} \text{ at } (x^\circ, \xi^\circ).$$

一方、 $(x, \xi) \in T^*\hat{K} \setminus 0 \cap (\text{Char } P)^c$ とする。

$$P_m(Mu) = [P_m, M]u + MP'u + Mf$$

$$[P_m, M]u \in H^{s-m+l\delta} \text{ at } (x, \xi)$$

$$MP'u \in H^{s+l\delta-m+\delta} \text{ at } (x, \xi)$$

$$Mf \in H^\infty \text{ at } (x, \xi)$$

だから、 P_m が (x, ξ) により楕円型であることより、

$$(16) \quad Mu \in H^{s+l\delta} \text{ at } (x, \xi)$$

(15), (16) を合わせると.

$$u \in H^{\min(s + (l+1)s - 1, s + r - 1), 1}_{b(x), bc}(\Omega) \quad (17)$$

この議論を繰り返すと、定理2の結論を得る。(証明終)

REFERENCES

1. M. Beals and R. Reed, *Propagation of Singularities for Hyperbolic Pseudodifferential Operators with Non-Smooth Coefficients*, Comm. on Pure and Appl. Math. **35** (1982), 169-184.
2. L. Hörmander, "Linear Partial Differential Operators," Springer-Verlag, 1964.
3. M. E. Taylor, "Pseudodifferential Operators," Princeton Univ. Press, 1981.
4. K. Kato, "Regularity of the solution to Wave equation with a non smooth coefficient (Preprint)"